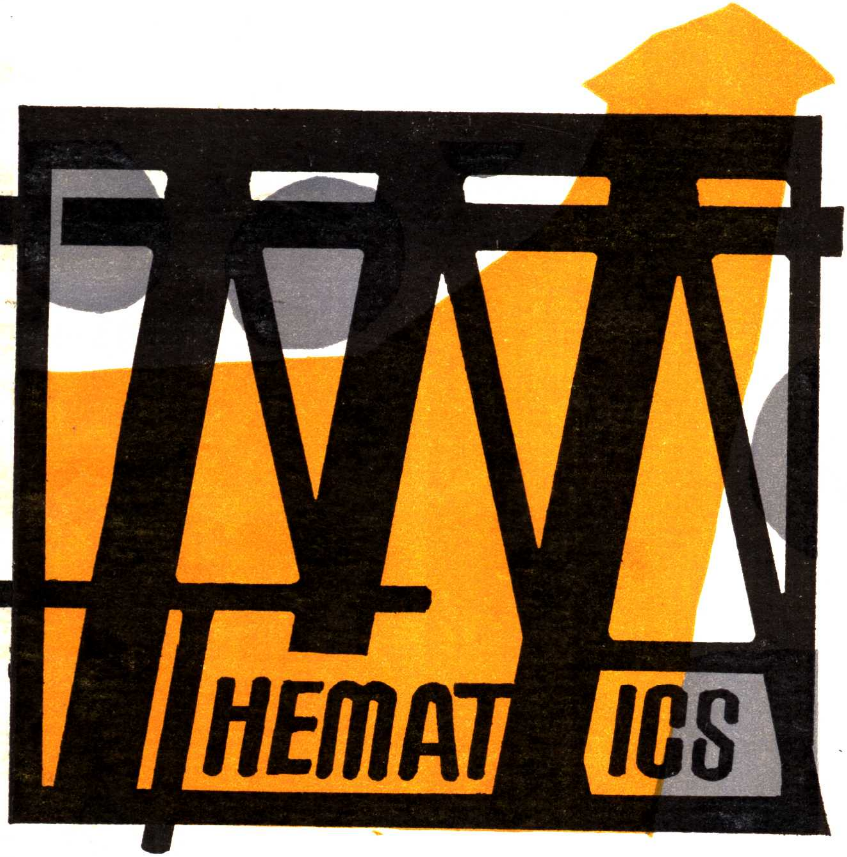
高中复习丛书

数学



数　　学

（高中复习丛书）

孔令颐　盛珍娥　薛文叙
贾育明　何振琪

原子能出版社

内容简介

本书是由北京市海淀区清华大学附中、中国人民大学附中、石油学院附中、八一学校的孔令颐、盛珍娥、薛文叙、贾育明、何振琪五位老师结合他（她）们的教学心得编写的。内容包括：第一单元函数，第二单元三角函数和反三角函数，第三单元不等式，第四单元复数、排列组合和数列，第五单元直线、平面与简单几何体，第六单元解析几何。各单元通过大量例题深入阐明基本概念，以利提高读者分析问题和解决问题的能力。各单元附有适量的练习题供读者选做。

数　学

（高中复习丛书）

孔令颐　盛珍娥　薛文叙

贾育明　何振琪

原子能出版社出版

（北京2108信箱）

地质印刷厂排版

1201工厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

★

开本 787×1092 1/32·印张 12.625·字数280千字

1985年6月北京第一版·1985年9月北京第一次印刷

印数1——70,000册　统一书号：7175·683

定价：1.90 元

前 言

本书供高中数学单元复习及总复习参考用。高考总复习时间紧迫，功课繁重。同学们重点应该提高分析问题和解决问题的能力。在学习高中数学各单元过程中，及时总结基础知识和解题方法。本书为同学们进行自我复习提供了一些方法。这些方法是我们教学实践中的心得体会。

在编写过程中，我们力争使本书具有如下几个特点：

1．对于初等数学概念、公式等基础知识，力争通过解题，结合解题思路的分析、论述去阐明，不再单独系统列出。这样做的目的是希望读者对数学基础知识的本质有较深刻的认识和体会。

2．本书对高中数学各种解题过程中常用的分析方法、论证方法、运算方法等，作了较系统的说明。这些方法都是通过具体题目体现的，方法的总结也是在每个题目的分析与小结中阐明的。用【 】注明的部份为说明

3．本书对同学们在解题过程中容易出现的问题及其原因进行了探讨，并提出了解决的办法。

由于本书是以论述解题思路与方法为主，所以读者最好对高中数学基础知识有初步的了解。

如果广大读者在读了本书后有所收获，那是我们最大的希望和安慰。

本书是由北京市海淀区清华大学附中、中国人民大学附中、石油学院附中、八一中学的孔令颐、盛珍娥、薛文叙、贾育明、何振琪五位老师结合他（她）们的教学心得编写的。由于水平有限，难免有疏漏之处，欢迎老师和同学们批评指正。

编者1985年 4 月

目　录

第一单元　函　　数

函数概念是中学数学课程中几个重要概念中的一个。函数是初等数学进入高等数学的枢纽，函数揭示了中学教材中很大一部分内容的内在联系，因此正确理解函数概念，熟练掌握函数研究问题的方法、技巧，对提高我们的数学素养会产生很大的影响。

一、函数的基本概念

在本节内，我们将通过五个例题，谈谈我们对函数的概念、函数定义域及值域、函数记号、函数的图象等内容的认识。

例 1．判断下列各对函数是同一个函数吗？为什么？

（1） $y=5^x$，$x\in R^+$，$y=\log_5 x$，$x\in R^+$；

（2） $y=\sqrt{x^2}$，$y=|x|$；

（3） $y=\sin x$，$x\in R$，$y=\sin x$，$x\in[0,2\pi]$；

（4） $y=\sin x$，$y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$；

（5） $y=3x^2-6x+1$，$y=3t^2-6t+1$．

解：

从函数的定义中得知，确定一个函数有三个要素，即定义域、对应关系、值域，（2）、（4）、（5）中的各对函数的三个要素完全相同，因此它们表示的都是同一个函数。

（1）中的两个函数对应关系不同；（3）中的两个函数

定义域不同，它们表示的都是不同的函数。

小结：

（1）从本题可以看出，同一个函数可以有不同的解析表达式；

（2）对应关系是函数的本质属性，函数中的变量使用什么字母是非本质的。所以（5）中的两个函数应看成是同一个函数。

例 2．求函数$y=\dfrac{\sqrt{\log_2 x}}{\log_3(3-x)}$的定义域。

解：要使 y 有意义，x 需满足下列不等式组：

$$\begin{cases}\log_2 x \geqslant 0, \\ x>0, \\ \log_3(3-x)\neq 0, \\ 3-x>0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant 1, \\ x>0, \\ x\neq 2, \\ x<3.\end{cases}$$

∴定义域为

$$(1,2)\cup(2,3)$$

【求函数 $y=f(x)$ 定义域可参考以下 6 个准则：

（1）$f(x)$是整式，定义域为全体实数；

（2）若出现$\dfrac{1}{f(x)}$，则有$f(x)\neq 0$；

（3）若有$\sqrt[2K]{f(x)}$（$K\in N$），则应$f(x)\geqslant 0$；

（4）若有$\log_a f(x)$，规定$f(x)>0$〔a如果为$g(x)$，$g(x)>0$且$g(x)\neq 1$〕；

（5）若有$\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$，应要求$|f(x)|\leqslant 1$；

(6) 若上述几种情况同时出现，可分别找出它们的定义域，取公共部分为所求的定义域。】

小结：

（1）定义域在函数中的作用大致可以归纳成以下几点：（a）定义域与函数对应规律的辩证关系——一个完整的函数解析式应该明确指出函数定义域，特别是分段函数，对于没有指明定义域而给出函数对应规律的题目，我们可以这样理解，人们约定，自变量应取使函数有意义的一切实数，此时定义域是题目中的一个重要隐蔽条件。（b）定义域与值域的关系——由函数定义我们可以得知，有了定义域和对应规律，就可以求到值域。在研究一一对应的函数时，正是利用函数值域对函数定义域的依赖性，将求值域这样一个陌生的问题，转化成求定义域这类熟悉的问题。（c）定义域即是函数概念的基本要素，又是研究函数性质、绘制函数图象的基础。在解某些数学题目时，忽视定义域这个隐蔽条件，往往是产生错误的根源。（d）在条件极值中，定义域起着重要的作用。

（2）在代数问题中，探讨字母的取值范围是一个难点。加强对定义域地位的认识，可以培养一种良好的数学习惯，即时时注意每个字母的取值范围及数个字母间相互关系，为学好有关文字讨论的题目作好准备。

（3）在应用问题中，定义域要根据实际意义作取舍。

例 3．求下列函数的值域：

(1) $y=1+x^2$；(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$，$x\in[-1,2]$；

(2) $y=\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$．

解：

(1) 由 $y=1+x^2$，得

$$x^2=y-1\geqslant 0,$$

$\therefore\quad y\geqslant 1.$

【由观察可以判断函数的值域，我们称之为"观察法"。作出函数的图象，不仅可以验证函数的各种性质，同时也可以直接解决某些数学问题，如本例，称为"图象法"。】

(2)
$$y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2,$$

且 $-1\leqslant x\leqslant 2$，

作草图(图1-1)。

由图象可知

$$0\leqslant y\leqslant 2.$$

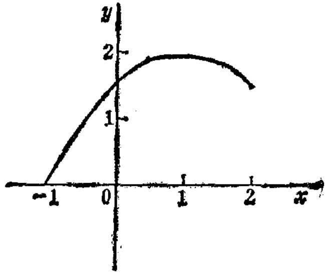


图 1-1

(3) 由 $y=\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$，

得 $\quad 2yx^2+(3y-1)x+(6y-2)=0,$

x 为实数，当且仅当判别式

$$\Delta=(3y-1)^2-8y(6y-2)$$
$$=-39y^2+10y+1\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{13}\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}.$$

【将函数关系式化为 x 的二次三项式 $a(y)x^2+b(y)x+c(y)=0$，利用"判别式法"求出值域，其中 $a(y)$ 不能为零。】

小结：

(1) 求函数值域一般有四种方法，除以上三种方法外，某些函数还可以利用求其反函数的定义域来求原函数的值

域。

(2) 使用判别式法的过程中，采用了某些变形步骤，有时导致函数值发生变化，自然也就影响了此方法的可靠性。此处不对这个问题作进一步的探讨，但它却提醒我们注意数学的严密性，注意文字的取值问题。

例 4. 作出下列函数的图象。

(1) $y=\begin{cases} x^2, & 当|x|>1, \\ -2, & 当|x|\leqslant 1; \end{cases}$ (2) $y=\sqrt{1-x}$.

解：(1)图象如图1-2所示。

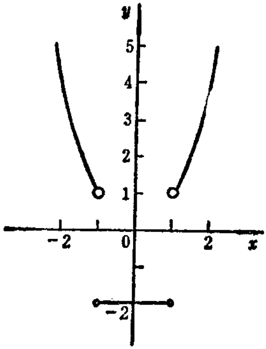


图 1-2

【作分段函数的图象，要注意图象分界点处的画法。】

(2) $y=\sqrt{1-x}$,

$\therefore$ $1-x\geqslant 0$,

得 $x\leqslant 1$, $y\geqslant 0$.

函数解析式变形，

得 $x=1-y^2$.

图象如图1-3所示.

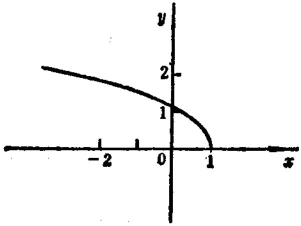


图 1-3

【通过变形将函数关系式转化为熟悉的二次函数。为此，特别注意原函数的定义域、值域，以保证图象的真实性。】

小结：

（1）图象对了解及应用函数性质有着重要的作用，我们一定要培养利用函数图象分析问题、解决问题的能力。

（2）为了上述目的，（a）要熟练掌握基本初步函数的图象；（b）要掌握经过平移坐标轴后化为基本初等函数的图象；（c）要了解有特殊联系的两个函数的图象间的关系，比如已经作出 $y=f(x)$ 的图象，由此应该会画 $y=|f(x)|$、$y=f(|x|)$、$y=f(x+m)$、$y=f^{-1}(x)$ 等函数的图象。

（3）学过函数以后，我们可以把方程和不等式分别视为用等号或不等号联结起来的两个函数。解方程或不等式就是在两个函数的公共定义域上求与其图象交点的横坐标有关的问题。比如本例，如果我们在同一坐标系中再作出 $y=2x-1$ 的图象，就可以用图象法解 $\sqrt{1-x}=2x-1$、$\sqrt{1-x}>2x-1$ 等问题。

例 5．已知 $f(x)=2x-3$，$g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$．求 $f(3)$，$g[f(x)+2]$.

解：$f(3)=2\times3-3=3$.

$$g[f(x)+2]=g[2x-3+2]=g(2x-1)$$

$$=\frac{1}{(2x-1)^2+1}.$$

小结：

（1）同学们开始学习函数时，往往不容易理解 $f(x)$ 和 $f(a)$ 的意义，一般来说，$f(a)$ 表示自变量为 a 时的函数值，而 $f(x)$ 是指对应法则。

（2）要掌握好一个数学概念，对与它有关的记号甚至于

记号的读法都要十分重视，比如$\log_a b$读作“以a为底的b的对数”。开始学习对数时，读作“a的多少次方为b”对理解对数概念、进行简单计算都会大有好处，如见到$\log_2\frac{1}{8}$马上由读法知道它表示的值为-3。

练习

1．下列函数的图象相同吗？

(1) $f(x)=\frac{x}{x}$与$f(x)=1$；(2) $y=x$与$y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=|x|$与$y=\sqrt[3]{x^3}$；　(4) $y=\lg x^2$与$y=2\lg x$；

(5) $y=\sin x$与$y=\sin|x|$；

(6) $y=10^{\lg x^{-2}}$与$y=\lg(10^x)^{-2}$。

2．求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{\lg(2-|x|)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$；(2) $y=\lg[\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x-4}-3)]$。

3．设$y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求下列函数定义域：

(1) $f(x^2)$；(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$。

4．求下列函数的值域：

(1) $y=-2x^2+6x$；(2) $y=3-\sqrt{x-4}$；

(3) $y=x+\sqrt{1+2x}$；(4) $y=\sqrt{\lg\sin x}$；

(5) $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$。

5．将函数$y=\sqrt{\sin^2x}+\sqrt{\cos^2x}$，$x\in(0,2\pi)$化为不含根号的分段函数。

6．动点P从单位正方形$ABCD$顶点A开始，(图1-4)，绕周界一圈。当x表示点P的行程，y表示$|PA|$的长时，求y的解析式及图象，并求$f\left(\frac{5}{2}\right)$。

7. 作下列函数图象(草图):

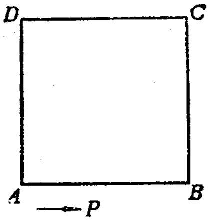


图 1-4

(1) $y=x^{\frac{1}{2}}-2$;(2) $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}$;

(3) $y=(x-1)^{-2}$; (4) $y=\log_2|x|$;

(5) $y=\sqrt{4-x^2}$;

(6) $y=-\sqrt{x^2-2x+1}$;

(7) $y=x^2+2|x|-1$; (8) $y=|2x+1|-|x-4|$.

8. 在同一坐标系中,作 $y=x^2+2x+3$ 和 $y=3|x+1|$ 的图象,根据图象写出 $x^2+2x+3=3|x+1|$ 及 $x^2+2x-3|x+1|+3>0$ 的解集。

9. $f(x)$ 表示 $x-1$ 与 $|x^2-4x+3|$ 二者中较大者,求在 $0\leqslant x\leqslant 5$ 内,函数 $f(x)-x$ 的取值范围。

参考答案

1. 全都不相同。2. (1) $-2<x<1$; (2) $13<x<20$. 3. (1) $-1\leqslant x\leqslant 1$; (2) $2k\pi\leqslant x\leqslant \pi+2k\pi$, $(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$; (3) 当 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 时, $a\leqslant x\leqslant 1-a$, 当 $a>\frac{1}{2}$ 时,定义域为空集。4. (1) $y\leqslant\frac{9}{2}$; (2) $y\leqslant 3$; (3) $y\geqslant -\frac{1}{2}$; (4) $y=1$; (5) $\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

5.
$$y=\begin{cases}\sin x+\cos x, & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \sin x-\cos x, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\\ -\sin x-\cos x, & \pi<x\leqslant\frac{3\pi}{2},\\ -\sin x+\cos x, & \frac{3\pi}{2}<x<2\pi.\end{cases}$$

6.
$$y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{1^2+(x-1)^2}, & 1\leqslant x<2,\\ \sqrt{1^2+(3-x)^2}, & 2\leqslant x<3,\\ 4-x, & 3\leqslant x<4,\\ \text{且}\quad f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$$

8. $x^2+2x+3=3|x+1|$的解集为$\{-3,-2,0,1\}$; $x^2+3x-3|x+1|+3>0$的解集为$(-\infty,-3)\cup(-2,0)\cup(1,\infty)$. 9. 令$g(x)=f(x)-x$,则$-1\leqslant g(x)\leqslant 3$.

二、初等代数函数

例 6. 观察下列图形(图1-5),确定斜率K和常数b的值。

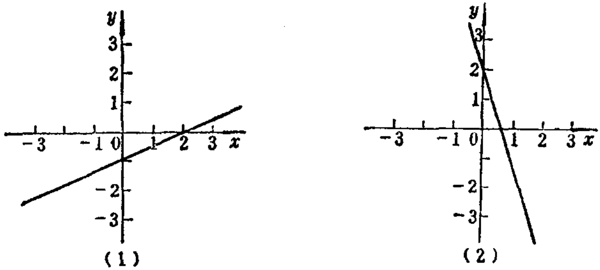


图 1-5

解:

(1) $K_1=\frac{1}{2}$, $b_1=-1$;

(2) $K_2=-3, b_2=2$.

小结:

(1) 与函数有关的一些系数,人们常称它们叫参变量,如$y=Kx+b$中的K与b, $y=a^x$中的a。这些系数对函数的图象有很大的影响,自然也影响着函数的性质,成为我们学习和掌握一类函数的关键。因此对参变量的个数和作用要认真对待。

(2) 一次函数的图象是直线(图1-6), b是直线的截距,由图象上易于观察。K是直线的斜率,是直线倾角的正

切值，它往往写成比值，即$K=\frac{n}{m}$，m、n为某直角三角形ABC的两直角边长的向量值。从图象上看，m、n是相互依赖、相互影响的，直线位置确定时，这个比值K是确定的，只要选取恰当A、C的点，由RtΔABC的两直角边长m、n的向量值，可以直接看出K的值（坐标平面上的一个点的横纵坐标如果都为整数，称此点为整数点，所谓恰当选取A、C，就是尽量使A、C为整数点，则m、n也为整数）。

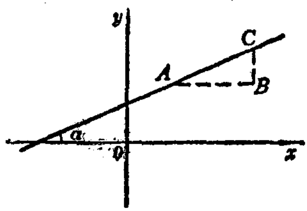


图 1-6

例 7．已知函数$y=ax+b$和$y=ax^2+bx+c$，下列四个图象中，那一个符合题意？说明理由。

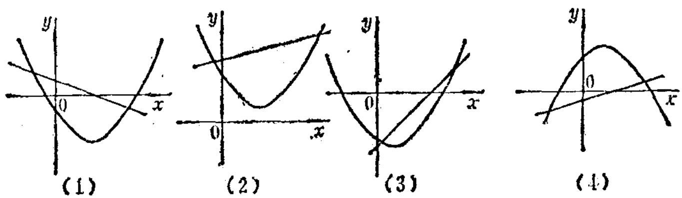


图1-7

解：图（1）中，抛物线开口向上，a应为正值，由于一次函数为减函数，a应为负值，出现矛盾，所以图（1）不符合题意。

类似的理由，图（4）不合题意。图（2）中，由$y=ax+b$的图象可判断$b>0$，设抛物线的顶点为(m,n)，则$m=-\frac{b}{2a}>0$，而$a>0$，判断$b<0$，出现矛盾，不合题意。

图（3）符合题意。

【此题根据图象的位置，判断参变量 a、b 的范围，确定合理的图象。由此看出，所给的图象是本题的隐蔽条件。】

小结：本题是从求解的反面入手，通过某些性质，将明显错误的结论逐个排除，缩小范围，最后选出正确的结果，曰“筛选法”。这种去伪存真的方法，适合作选择题。

例 8．抛物线 $y=x^2+2ax+b$ 过(2，4)点，顶点在直线 $y-2x-1=0$ 上，求 a、b 的值。

解：$\because\quad y=x^2+2ax+b$ 过(2，4)点，

$\therefore\quad 4=4+4a+b,$

即 $\quad 4a+b=0 \qquad (1)$

令抛物线顶点为(m,n)，则

$$m=-\frac{2a}{2}=-a,$$

$$n=\frac{4b-4a^2}{4}=b-a^2,$$

把(m,n)代入，$y-2x-1=0$，得

$b-a^2+2a-1=0. \qquad (2)$

由（1）与（2）得

$$a=-1,\ b=+4.$$

【求一个确定类型的函数解析式就是求未知的系数，一般是依据已知条件，利用方程或方程组解之。】

小结：本题解法的实质是待定系数法。使用此法时，并不是在一无所知的情况下，任意去设参数，往往是在已知函数类型的情况下，充分利用已知条件，待定最少的系数，求出函数解析式。

例 9．在下列的各幂函数与各图象之间建立能符合实际情况的一一映射：