

HONGXUE  
JUXUE DUOTIYUE WENLI

# 中学数学 多题一解 100例

上海科技教育出版社

# 中学数学 多题一解 100 例

吴公达 程光斗 王茂森 编

上海科技教育出版社

**中学数学多题一解 100 例**

吴公达 程光斗 王茂森 编

上海科技教育出版社出版发行

(上海延生西路 393 号)

各地新华书店经销 上海翔文印刷厂印刷

开本  $787 \times 1092$  1/32 印张 8 字数 177000

1989 年 3 月第 1 版 1989 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—17400 本

ISBN 7-5428-0222-4

G·223

定价: 2.20 元

# 前 言

归纳与演绎是科学研究中的重要方法之一。中学数学教学不仅是数学知识的传授,更重要的是思维方法的训练与培养。通过中学数学的教学,要使学生具有独立思考问题和分析问题的能力,为今后研究高深学科奠定良好的基础。

笔者从事中学数学教学卅余年,发现当前数学教学中存在的问题有二:其一是布置习题过多,尤其是面临毕业前夕,教师搜集国内、国外和历届高考的大量习题,其中有同类型的,有外型不同实质相似的习题,重复演算,学生泳于题海之中,不胜负担,严重影响下一代的健康;其二是在教学过程中,偏重于解题的技能技巧和推导能力,而忽视运用数学知识观察分析,从而探索解题的规律。盖社会上世事纷芸,在科学研究中也现象千万,我们必须从大量的事例中,运用抽象概括能力,找出问题的共性,掌握问题的本质,从而归纳出事物的规律,才能提高解决问题的能力,成功地搞好科研工作。

数学书刊上讨论“一题多解”者较多,涉及“多题一解”者极少,致不能完整地达到教育大纲的目的要求。笔者利用余暇,分类选辑各种类型的中学数学题,汇编成“中学数学多题一解”一书,共百例,计四百余题。以供中学生课余阅读,也可供教师选题参考。

此书问世后,期能达到下列要求:

(1) 能使学生会现象不同而实质同一类型的数学题,可抓住其本质来求解,俾能“做一题,解一类”,有助于学生从

题海中解脱。

(2) 能使学生对同一类型的数学题, 有一基本的思考路线和基本解法, 做到有章可循, 减少解题中的盲目性, 以提高解题能力。

(3) 能使学生通过剖析同一类型的数学题的解法, 归纳其共性, 收到“举一反三”之实效。

“多题一解”与“一题多解”其实质是矛盾的两个侧面, 在数学上有其内在联系, 应予沟通。学生既要学会根据事物的发展、演变、推导, 得出它的结论, 也要通过多种事物的现象, 找出它们的共性, 归纳其规律, 两者不可偏废。

由于编者水平有限, 不当之处, 必然存在, 敬请读者指正。

编者

1988年6月

# 目 录

|                                            |    |
|--------------------------------------------|----|
| 一、代数部分                                     | 1  |
| [ 1 ] 倒置变换                                 | 1  |
| [ 2 ] 分子有理化                                | 3  |
| [ 3 ] 共轭无理式性质的运用                           | 5  |
| [ 4 ] 拆项法                                  | 6  |
| [ 5 ] 配凑法                                  | 9  |
| [ 6 ] 平均值代换法                               | 10 |
| [ 7 ] $\omega$ 的性质的运用                      | 13 |
| [ 8 ] 应用辅助数列                               | 14 |
| [ 9 ] 不等式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ 的应用        | 16 |
| [ 10 ] 运用一元二次方程有根“1”的条件                    | 19 |
| [ 11 ] 复数关系式 $ z ^2 = z \cdot \bar{z}$ 的应用 | 20 |
| [ 12 ] 应用齐次线性方程组有非零解的条件                    | 22 |
| [ 13 ] 二项式定理的应用                            | 24 |
| [ 14 ] 递推法                                 | 26 |
| [ 15 ] 质数 2 的应用                            | 29 |
| [ 16 ] 运用三阶范德蒙行列式的展开式                      | 30 |
| 二、平面几何部分                                   | 33 |
| [ 17 ] 重心定理的应用                             | 33 |
| [ 18 ] 垂心定理的应用                             | 35 |
| [ 19 ] 面积法                                 | 37 |
| [ 20 ] 中位线定理的应用                            | 39 |

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| [ 21 ] 应用位似变换·····                                  | 41 |
| [ 22 ] 托勒密定理的应用·····                                | 44 |
| [ 23 ] $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 在几何中的应用·····  | 46 |
| [ 24 ] 解析法证几何题·····                                 | 48 |
| [ 25 ] $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 的应用····· | 51 |
| <b>三、立体几何部分</b> ·····                               | 55 |
| [ 26 ] 三垂线定理的应用·····                                | 55 |
| [ 27 ] 应用辅助平面·····                                  | 57 |
| [ 28 ] 应用异面直线上任意两点间的距离公式·····                       | 60 |
| [ 29 ] 体积法·····                                     | 63 |
| [ 30 ] 补形法·····                                     | 65 |
| [ 31 ] 旋转变换·····                                    | 67 |
| [ 32 ] 同一法·····                                     | 70 |
| <b>四、平面三角部分</b> ·····                               | 73 |
| [ 33 ] 应用半角定理·····                                  | 73 |
| [ 34 ] 模尔外德公式的应用·····                               | 74 |
| [ 35 ] 应用合分比定理证三角题·····                             | 76 |
| [ 36 ] 正弦定理的应用·····                                 | 78 |
| [ 37 ] 应用两角和、两角差的正切公式·····                          | 80 |
| [ 38 ] 射影定理的应用·····                                 | 81 |
| [ 39 ] 应用方程观点解三角题·····                              | 83 |
| [ 40 ] 变角法·····                                     | 86 |
| [ 41 ] 倍次公式的应用·····                                 | 88 |
| <b>五、平面解析几何部分</b> ·····                             | 92 |
| [ 42 ] 应用准线方程·····                                  | 92 |
| [ 43 ] 对称知识的应用·····                                 | 95 |

|                                          |     |
|------------------------------------------|-----|
| [ 44 ] 平凡知识的应用                           | 96  |
| [ 45 ] 韦达定理的应用                           | 99  |
| [ 46 ] 应用直线的参数方程                         | 103 |
| [ 47 ] 应用圆锥曲线的参数方程                       | 107 |
| [ 48 ] 应用曲线系方程                           | 110 |
| [ 49 ] 点圆的应用                             | 112 |
| [ 50 ] 三角知识的应用                           | 114 |
| [ 51 ] 设点消元法                             | 117 |
| [ 52 ] 多项式恒等定理的应用                        | 120 |
| [ 53 ] 应用椭圆的光学性质                         | 122 |
| [ 54 ] 极坐标的应用                            | 125 |
| <b>六、综合题</b>                             | 131 |
| [ 55 ] 因式分解的应用                           | 131 |
| [ 56 ] 极限的应用                             | 132 |
| [ 57 ] 应用辅助方程                            | 136 |
| [ 58 ] 函数定义域的应用                          | 139 |
| [ 59 ] 函数图象的应用                           | 141 |
| [ 60 ] 应用不等式 $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ | 143 |
| [ 61 ] 解析几何中三角形面积公式的应用                   | 145 |
| [ 62 ] 反函数的运用                            | 149 |
| [ 63 ] 应用韦达定理的逆定理                        | 150 |
| [ 64 ] 应用等式 $ a  = \sqrt{a^2}$           | 152 |
| [ 65 ] 应用复数相等的充要条件                       | 154 |
| [ 66 ] 运用辅助式解题                           | 156 |
| [ 67 ] 复数的几何意义的应用                        | 157 |
| [ 68 ] 换元法                               | 160 |
| [ 69 ] 配方法                               | 162 |

|                                                                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| [ 70 ] 复变量代换法.....                                                                                                                                                  | 165 |
| [ 71 ] 辅助圆的应用.....                                                                                                                                                  | 167 |
| [ 72 ] 应用中线长公式.....                                                                                                                                                 | 170 |
| [ 73 ] 等比定理的应用.....                                                                                                                                                 | 173 |
| [ 74 ] 三角形中 $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$<br>的应用..... | 175 |
| [ 75 ] 余弦定理的变形及其应用.....                                                                                                                                             | 178 |
| [ 76 ] 万能公式的应用.....                                                                                                                                                 | 181 |
| [ 77 ] 参数的运用.....                                                                                                                                                   | 183 |
| [ 78 ] 数形结合法.....                                                                                                                                                   | 186 |
| [ 79 ] 反面思考法.....                                                                                                                                                   | 188 |
| [ 80 ] 设某些线段之长为 1 的方法.....                                                                                                                                          | 190 |
| [ 81 ] 待定系数法.....                                                                                                                                                   | 193 |
| [ 82 ] 移动比较法.....                                                                                                                                                   | 195 |
| [ 83 ] 应用定义解题.....                                                                                                                                                  | 197 |
| [ 84 ] 平移法.....                                                                                                                                                     | 199 |
| [ 85 ] 利用实数的平方为非负数解题.....                                                                                                                                           | 202 |
| [ 86 ] 迫等法的运用.....                                                                                                                                                  | 203 |
| [ 87 ] 反证法.....                                                                                                                                                     | 205 |
| [ 88 ] 凑“0”法.....                                                                                                                                                   | 208 |
| [ 89 ] 对称假设法.....                                                                                                                                                   | 210 |
| [ 90 ] 因数不够用“1”凑的方法.....                                                                                                                                            | 213 |
| [ 91 ] 应用辅助函数.....                                                                                                                                                  | 214 |
| [ 92 ] 三倍角公式的应用.....                                                                                                                                                | 217 |
| [ 93 ] 数学归纳法.....                                                                                                                                                   | 219 |
| [ 94 ] 比值法.....                                                                                                                                                     | 222 |
| [ 95 ] 辅助角的应用.....                                                                                                                                                  | 224 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| [ 96 ] 对称变换.....           | 226 |
| [ 97 ] 应用一元二次方程的根的判别式..... | 229 |
| [ 98 ] 线性代换法.....          | 232 |
| [ 99 ] 变更问题法.....          | 234 |
| [100] 模型三角形的应用.....        | 237 |

## 一. 代数部分

### [1] 倒置变换

1° 已知:  $a$  为任意整数,

求证:

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+1} \text{ 为既约分数.}$$

2° 解方程组

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = a \\ \frac{yz}{y+z} = b \\ \frac{zx}{z+x} = c \end{cases} \quad (abc \neq 0).$$

3° 已知  $x, y, z$  均大于 1,  $n$  为正实数, 且  $\log_x n = 24$ ,  $\log_y n = 40$ ,  $\log_{xyz} n = 12$ , 求  $\log_z n$  的值.

4° 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$ , 求该数列的通项公式.

解 1° 证: 由于原分式分母中的  $a$  的次数高于分子中  $a$  的次数, 故难以推证. 若将分式的分子、分母倒置, 则

$$\frac{a^4+7a^2+1}{a^2+3} = a^2+4 - \frac{1}{a^2+3}.$$

因为  $a$  为任意整数,  $\frac{1}{a^2+3}$  为既约分数,

故  $\frac{a^4+7a^2+1}{a^2+3}$  为既约分数.

所以,原分式亦为既约分数。

2° 解: 将各方程的分母、分子倒置后, 可将原方程组化成

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{c} \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x = \frac{2abc}{bc+ca-ab} \\ y = \frac{2abc}{ca+ab-bc} \\ z = \frac{2abc}{bc+ab-ca} \end{cases}$$

3° 解: 利用对数换底公式倒置各已知式, 得

$$\log_n x = \frac{1}{\log_x n} = \frac{1}{24}, \log_n y = \frac{1}{\log_y n} = \frac{1}{40},$$

$$\log_n xyz = \frac{1}{\log_{xyz} n} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{而 } \log_n xyz = \log_n x + \log_n y + \log_n z,$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \log_n z,$$

$$\log_n z = \frac{1}{60},$$

$$\therefore \log_z n = 60.$$

4° 解: 将关系式  $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 3}$  倒置后得

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 1 + \frac{3}{a_n}.$$

$$\text{令 } b_n = \frac{1}{a_n}, \text{ 则 } b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}.$$

$$b_n = 1 + 3b_{n-1} = 1 + 3(1 + 3b_{n-2})$$

$$= 1 + 3 + 3^2 b_{n-2}$$

$$= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} b_1$$

$$= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2} - \frac{3^{n-1}}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 3^{n-1} - 1}{2},$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{2 \cdot 3^{n-1} - 1}.$$

## [2] 分子有理化

$$1^\circ \text{ 解方程 } \sqrt{2x^2+5x-2} - \sqrt{2x^2+5x-9} = 1.$$

$$2^\circ \text{ 解不等式 } \sqrt{a^2+1} - \sqrt{a^2-a+3} > 0.$$

$$3^\circ \text{ 求证: } |\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{b^2+c^2}| \leq |a-b|.$$

$$4^\circ \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}).$$

解 1° 解: 将原方程写成

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x-2} - \sqrt{2x^2+5x-9}}{1} = 1 \quad (1)$$

将左式中的分子有理化, 方程化为

$$\frac{7}{\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{2x^2+5x-9}} = 1$$

$$\text{并转化为 } \sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{2x^2+5x-9} = 7 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \quad \sqrt{2x^2+5x-2} = 4,$$

$$\text{解得 } x_1 = 2, x_2 = -\frac{9}{2}.$$

检验后知此两根都适合原方程。

2° 解: 原不等式可看成是

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-a+3}}{1} > 0.$$

将分子有理化, 得

$$\frac{a-2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-a+3}} > 0 \quad (1)$$

因为(1)的分母恒为正值, 所以(1)与不等式组

$$\begin{cases} a-2 > 0 \\ a^2-a+3 \geq 0 \end{cases}$$

同解。

解此不等式组, 得  $a > 2$ ,

∴ 原不等式的解是  $a > 2$ 。

3° 略证:

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}} \leq \frac{|a+b| \cdot |a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &\leq \frac{|a|+|b|}{|a|+|b|} \cdot |a-b| = |a-b| = \text{右边}. \end{aligned}$$

$$4^\circ \text{ 解: 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

### [3] 共轭无理式性质的运用

1° 已知  $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$  的小数部分为  $1$ , 试求  $2a^2+a-3$  的值.

2° 解方程  $(4+\sqrt{15})^x + (4-\sqrt{15})^x = 6$ .

3° 求  $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots$   
 $+ \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$

4° 若  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 并记  $\{x\} = x - [x]$ , 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{(2+\sqrt{3})^n\}$ .

解 1° 解:  $\frac{1}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4},$

$$\therefore 2 < \sqrt{5} < 3, \quad 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{4} < 1,$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \therefore 2a^2+a-3 &= (2a+3)(a-1) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+3\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}-1\right) \\ &= -2\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2° 解:  $\because 4+\sqrt{15} = \frac{1}{4-\sqrt{15}},$

$$\therefore \text{设 } y = (4+\sqrt{15})^x,$$

原方程可化成  $y + \frac{1}{y} = 6,$

解此方程得  $y = 3 \pm 2\sqrt{2}.$

由  $(4+\sqrt{15})^x = 3+2\sqrt{2}$ , 得  $x = \log_{4+\sqrt{15}}(3+2\sqrt{2})$ .

由  $(4+\sqrt{15})^x = 3-2\sqrt{2}$ , 得  $x = \log_{4+\sqrt{15}}(3-2\sqrt{2})$ .

经检验知此两根都是原方程的根。

$$\begin{aligned} 3^{\circ} \text{ 解: } & \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots \\ & + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ & = (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ & = \sqrt{n+1}-1. \end{aligned}$$

4<sup>°</sup> 解: 由  $\{x\}$  的定义可知,  $0 \leq \{x\} < 1$ , 且对于任何自然数  $m$  总有  $\{x+m\} = \{x\}$ , 而对于任何非整数  $x$  总有  $\{-x\} = 1 - \{x\}$ .

因为  $(2+\sqrt{3})^n$  总可以表示成  $p+q\sqrt{3}$  的形式 ( $p, q$  为正整数), 且  $(2-\sqrt{3})^n$  总可以表示成  $p-q\sqrt{3}$  的形式, 所以

$$\begin{aligned} \{(2+\sqrt{3})^n\} &= \{p+q\sqrt{3}\} = \{q\sqrt{3}\} = 1 - \{-q\sqrt{3}\} \\ &= 1 - \{p-q\sqrt{3}\} \\ &= 1 - \{(2-\sqrt{3})^n\}. \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < 2 - \sqrt{3} < 1,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{(2-\sqrt{3})^n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2-\sqrt{3})^n = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{(2+\sqrt{3})^n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \{(2-\sqrt{3})^n\}) = 1.$$

#### [4] 拆项法

$$1^{\circ} \text{ 解方程 } \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}.$$

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \text{ 试证: } & \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \\ & + \frac{1}{(n+m)(n+m+1)} = \frac{m+1}{n(n+m+1)}. \end{aligned}$$

3° 已知  $a_1, a_2, a_3, \dots$  都是正数, 且构成等比数列,

$$\begin{aligned} \text{求证: } & \frac{1}{\lg a_1 \cdot \lg a_2} + \frac{1}{\lg a_2 \cdot \lg a_3} + \dots + \frac{1}{\lg a_{n-1} \cdot \lg a_n} \\ &= \frac{n-1}{\lg a_1 \cdot \lg a_n}. \end{aligned}$$

4° 已知  $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2+x+1}{x^2}$ , 求  $f(x)$ .

**解** 1° 解: 拆分子:

$$1 + \frac{1}{x-5} - 1 - \frac{1}{x-6} = 1 + \frac{1}{x-8} - 1 - \frac{1}{x-9},$$

从而将原方程化成

$$\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-8} - \frac{1}{x-9}.$$

$$\text{通分, 得 } \frac{1}{(x-5)(x-6)} = \frac{1}{(x-8)(x-9)},$$

解之, 得  $x=7$ . 检验后知  $x=7$  是原方程的根.

2° 证: 左式中每一项可拆成两项:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(n+m)(n+m+1)} = \frac{1}{n+m} - \frac{1}{n+m+1}$$

$$\text{两边逐项相加得 左式} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}$$

$$= \frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

= 右式,