中学数学多题一解100例

上海科技教育出版社

中学数学
多题一解100例

吴公达　程光斗　王茂森　编

上海科技教育出版社

中学数学多题一解100例

吴公达　程光斗　王茂森　编

上海科技教育出版社出版发行

（上海冠生园路393号）

各地新华书店经销　上海翔文印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 8　字数 177000

1989年3月第1版　1989年3月第1次印刷

印数 1—17400 本

ISBN 7-5428-0222-4

G·223

定价：2.20 元

前　言

归纳与演绎是科学研究中的重要方法之一。中学数学教学不仅是数学知识的传授，更重要的是思维方法的训练与培养。通过中学数学的教学，要使学生具有独立思考问题和分析问题的能力，为今后研究高深学科奠定良好的基础。

笔者从事中学数学教学卅余年，发现当前数学教学中存在的问题有二：其一是布置习题过多，尤其是面临毕业前夕，教师搜集国内、国外和历届高考的大量习题，其中有同类型的，有外型不同实质相似的习题，重复演算，学生泳于题海之中，不胜负担，严重影响下一代的健康；其二是在教学过程中，偏重于解题的技能技巧和推导能力，而忽视运用数学知识观察分析，从而探索解题的规律。盖社会上世事纷芸，在科学研究中也现象千万，我们必须从大量的事例中，运用抽象概括能力，找出问题的共性，掌握问题的本质，从而归纳出事物的规律，才能提高解决问题的能力，成功地搞好科研工作。

数学书刊上讨论"一题多解"者较多，涉及"多题一解"者极少，致不能完整地达到教育大纲的目的要求。笔者利用余暇，分类选辑各种类型的中学数学题，汇编成"中学数学多题一解"一书，共百例，计四百余题，以供中学生课余阅读，也可供教师选题参考。

此书问世后，期能达到下列要求：

(1) 能使学生体会现象不同而实质同一类型的数学题，可抓住其本质来求解，俾能"做一题，解一类"，有助于学生从

题海中解脱。

(2) 能使学生对同一类型的数学题，有一基本的思考路线和基本解法，做到有章可循，减少解题中的盲目性，以提高解题能力。

(3) 能使学生通过剖析同一类型的数学题的解法，归纳其共性，收到“举一反三”之实效。

“多题一解”与“一题多解”其实质是矛盾的两个侧面，在数学上有其内在联系，应予沟通。学生既要学会根据事物的发展、演变、推导，得出它的结论，也要通过多种事物的现象，找出它们的共性，归纳其规律，两者不可偏废。

由于编者水平有限，不当之处，必然存在，敬请读者指正。

编者

1988年6月

目　录

一. 代 数 部 分

[1] 倒置变换

1° 已知：a 为任意整数，

求证：

$$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+1}\text{为既约分数。}$$

2° 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a\\[2mm] \dfrac{yz}{y+z}=b\\[2mm] \dfrac{zx}{z+x}=c \qquad (abc\neq 0)。\end{cases}$$

3° 已知 x、y、z 均大于 1，n 为正实数，且 $\log_x n=24$，$\log_y n=40$，$\log_{xyz} n=12$，求 $\log_z n$ 的值。

4° 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$，求该数列的通项公式。

解 1° 证：由于原分式分母中的a的次数高于分子中a的次数，故难以推证。若将分式的分子、分母倒置，则

$$\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}=a^2+4-\frac{1}{a^2+3}。$$

因为 a 为任意整数，$\dfrac{1}{a^2+3}$为既约分数，

故$\dfrac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}$为既约分数，

所以,原分式亦为既约分数。

2° 解：将各方程的分母、分子倒置后，可将原方程组化成

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}\\[2mm] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{b}\\[2mm] \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{c}\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=\dfrac{2abc}{bc+ca-ab}\\[2mm] y=\dfrac{2abc}{ca+ab-bc}\\[2mm] z=\dfrac{2abc}{bc+ab-ca}\end{cases}$$

3° 解：利用对数换底公式倒置各已知式,得

$$\log_n x=\frac{1}{\log_x n}=\frac{1}{24},\log_n y=\frac{1}{\log_y n}=\frac{1}{40},$$

$$\log_n xyz=\frac{1}{\log_{xyz}n}=\frac{1}{12}。$$

而 $\log_n xyz=\log_n x+\log_n y+\log_n z$,

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{24}+\frac{1}{40}+\log_n z,$$

$$\log_n z=\frac{1}{60},$$

$$\therefore\quad \log_z n=60。$$

4° 解：将关系式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+3}$ 倒置后得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=1+\frac{3}{a_n}.$$

令$b_n=\frac{1}{a_n}$,则$b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}b_n&=1+3b_{n-1}=1+3(1+3b_{n-2})\\&=1+3+3^2b_{n-2}\\&=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}b_1\\&=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\\&=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}\\&=\frac{3^n-1}{2}-\frac{3^{n-1}}{2}\\&=\frac{2\cdot 3^{n-1}-1}{2},\end{aligned}$$

$\therefore\quad a_n=\frac{2}{2\cdot 3^{n-1}-1}$.

[2] 分子有理化

1° 解方程 $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$.

2° 解不等式 $\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-a+3}>0$。

3° 求证：$|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}|\leqslant|a-b|$。

4° 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$。

解 1° 解：将原方程写成

$$\frac{\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}}{1}=1 \qquad (1)$$

将左式中的分子有理化，方程化为

$$\frac{7}{\sqrt{2x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+5x-9}}=1$$

并转化为 $\sqrt{2x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=7 \qquad (2)$

(1)+(2) $\sqrt{2x^2+5x-2}=4$,

解得 $x_1=2$, $x_2=-\frac{9}{2}$.

检验后知此两根都适合原方程。

2° 解：原不等式可看成是

$$\frac{\sqrt{a^2+1}-\sqrt{a^2-a+3}}{1}>0.$$

将分子有理化，得

$$\frac{a-2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{a^2-a+3}}>0 \tag{1}$$

因为(1)的分母恒为正值，所以(1)与不等式组

$$\begin{cases}a-2>0\\ a^2-a+3\geqslant 0\end{cases}$$

同解。

解此不等式组，得 $a>2$，

∴ 原不等式的解是 $a>2$。

3° 略证：

$$\text{左边}=\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}}\leqslant\frac{|a+b|\cdot|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\leqslant\frac{|a|+|b|}{|a|+|b|}\cdot|a-b|=|a-b|=\text{右边}.$$

4° 解：$\text{原式}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3+x^2+1)(x^3-x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

[3] 共轭无理式性质的运用

1° 已知 $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分为 a，试求 $2a^2+a-3$的值。

2° 解方程 $(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=6$。

3° 求 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots$

$$+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \qquad (n\in N)。$$

4° 若$[x]$表示不超过x的最大整数，并记$\{x\}=x-[x]$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}$。

解 1° 解：$\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，

$$\because\quad 2<\sqrt{5}<3,\ 0<\frac{\sqrt{5}-1}{4}<1,$$

$$\therefore\quad a=\frac{\sqrt{5}-1}{4}。$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 2a^2+a-3&=(2a+3)(a-1)\\&=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+3\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}-1\right)\\&=-2\frac{1}{2}。\end{aligned}$$

2° 解：$\because\quad 4+\sqrt{15}=\frac{1}{4-\sqrt{15}}$，

$$\therefore\quad 设\ y=(4+\sqrt{15})^x,$$

原方程可化成 $y+\frac{1}{y}=6$，

解此方程得 $y=3\pm2\sqrt{2}$。

由 $(4+\sqrt{15})^x=3+2\sqrt{2}$，得 $x=\log_{4+\sqrt{15}}(3+2\sqrt{2})$.

由 $(4+\sqrt{15})^x=3-2\sqrt{2}$，得 $x=\log_{4+\sqrt{15}}(3-2\sqrt{2})$.

经检验知此两根都是原方程的根。

3° 解：
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1.$$

4° 解： 由 $\{x\}$ 的定义可知，$0\leqslant\{x\}<1$，且对于任何自然数 m 总有 $\{x+m\}=\{x\}$，而对于任何非整数 x 总有 $\{-x\}=1-\{x\}$。

因为 $(2+\sqrt{3})^n$ 总可以表示成 $p+q\sqrt{3}$ 的形式（p、q 为正整数），且 $(2-\sqrt{3})^n$ 总可以表示成 $p-q\sqrt{3}$ 的形式，所以
$$\{(2+\sqrt{3})^n\}=\{p+q\sqrt{3}\}=\{q\sqrt{3}\}=1-\{-q\sqrt{3}\}$$
$$=1-\{p-q\sqrt{3}\}$$
$$=1-\{(2-\sqrt{3})^n\}.$$

$\because\quad 0<2-\sqrt{3}<1$,

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}\{(2-\sqrt{3})^n\}=\lim\limits_{n\to\infty}(2-\sqrt{3})^n=0$,

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}\{(2+\sqrt{3})^n\}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\{(2-\sqrt{3})^n\})=1$.

[4] 拆项法

1° 解方程 $\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{x-7}{x-8}-\dfrac{x-8}{x-9}$。

2° 试证：
$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+m)(n+m+1)}=\frac{m+1}{n(n+m+1)}.$$

3° 已知 a_1、a_2、a_3……都是正数，且构成等比数列，

求证：$\dfrac{1}{\lg a_1\cdot\lg a_2}+\dfrac{1}{\lg a_2\cdot\lg a_3}+\cdots+\dfrac{1}{\lg a_{n-1}\cdot\lg a_n}$

$$=\frac{n-1}{\lg a_1\cdot\lg a_n}。$$

4° 已知 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解 1° 解：拆分子：

$$1+\frac{1}{x-5}-1-\frac{1}{x-6}=1+\frac{1}{x-8}-1-\frac{1}{x-9},$$

从而将原方程化成

$$\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-9}。$$

通分，得 $\dfrac{1}{(x-5)(x-6)}=\dfrac{1}{(x-8)(x-9)}$，

解之，得 $x=7$。检验后知 $x=7$ 是原方程的根。

2° 证：左式中每一项可拆成两项：

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

……

$$\frac{1}{(n+m)(n+m+1)}=\frac{1}{n+m}-\frac{1}{n+m+1}$$

两边逐项相加得 左式 $=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+m+1}$

$$=\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

$=$右式，