说谎者悖论和汉诺塔游戏

史上智者公推的10大智力谜题

[加拿大] 马赛尔·丹尼斯 著 程云琦

聪明人集合了!!

最让人疯魔的思维游戏!
全世界聪明人公认的顶尖智力谜题
直到今天，人们还在妄图解开

辽宁教育出版社

说谎者悖论和汉诺塔游戏

——史上智者公推的十大智力谜题

[加拿大]马塞尔·丹纳斯　著
程云琦　译

辽宁教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

说谎者悖论和汉诺塔游戏:史上智者公推的十大智力谜题/(加)丹纳斯著,程云琦译. —沈阳: 辽宁教育出版社, 2006.2
(原点系列.数学)
ISBN 7-5382-7697-1

Ⅰ.说... Ⅱ.①丹...②程... Ⅲ.数学—普及读物
Ⅳ.01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 010056 号

辽宁教育出版社出版
(沈阳市和平区十一纬路 25 号 邮政编码 110003)
上海长鹰印刷厂印刷 辽宁贝塔斯曼图书发行有限公司发行

开本: 890 毫米×1240 毫米 1/32 字数: 200 千字 印张: 8.5
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑: 柳青松 张国际 封面设计: 王 翔

定价: 20.00 元

前　言

谜题和人类的历史一样久远。在历史长河中,在各种文化中,都能找到谜题的身影。为什么会这样呢？谜题又是什么呢？它们展示了人类心智的哪些方面？对数学研究又有哪些影响？

本书试图对这些问题做出回答。重点是阐明一些数学思想最初是如何以谜题方式体现的。这里,对“谜题”这个词我取其本义,指那些不是轻易能找到答案的有挑战性的难题,而不是取其比喻义,即所谓“未解之谜”,尽管这两种语义有不少交叉。

在人文和艺术领域,对杰作——名著,名曲,名画——的鉴赏有着悠久的传统,这些作品是最有启发性的学习材料。对此,人们著书立说。同样地,数学也有自己的杰作——“大”问题。其中大多数问题最初以机智谜题的形式问世。因此,本书依照文学、音乐、艺术的教学实践,通过十个著名的谜题向读者介绍基本的数学思想。毋庸讳言,历史上人们发明的天才谜题实在是数不胜数,评选经典谜题也只能是见仁见智。实际上,我所挖掘的这些谜题对数学史的形成有着至关重要的影响,我相信,大多数数学家会认同我的观点。

读完本书,相信读者将会对谜题有所了解,并认识到它们对数学的重要影响。对于想获得解谜的基本能力,以及想获得学习基础数学的技巧的读者来说,可以把它当作自学指南。当然,这并非意味着本书就得是一本谜题大全。这类书籍在市场上比比皆是。实际上,这是一本介绍谜题与数学之间关系的手册。简言之,它是“新手”读的,而不是专门为解谜癖写的。

教师也可以把本书用作教材，它覆盖了传统数学入门书的主要论题，但它是从一种不同的、更有创意的角度去阐述这些主题的。学生可以针对每一个谜题，及其对数学研究的影响展开讨论，还可以据此开发自己的谜题，或者进一步研究本书列举的谜题，并在课堂上进行交流。

本书的素材源于十多年来我在多伦多大学开设的一门课程。这门课程专门针对患有所谓数学恐惧症的学生。我发现，结合谜题来讲课，可以给这些学生以信心，减轻甚至消除他们迈进数学王国时的恐惧。能收到学生的祝贺邮件，让我感到自豪。看到学生取得进步，这最让老师感到高兴啦！我真心希望本书的读者也能获得同样的成果。

读者可以通过下面的电子邮件地址和我联系：

marcel. danesi@utoronto. ca

马塞尔·丹纳斯

目　　录

1

斯芬克司之谜

到埃及古城吉萨游览的人们，在看到那座举世闻名的巨雕——大斯芬克司的时候，无不深深为之震撼。这是一头怪物：头和胸像女人，躯干像狮子，尾巴像毒蛇，还有一对鸟一样的翅膀。这座宏伟的雕像早在公元前 2500 年之前就诞生了，长 73 米，高 20 米，它的脸竟也有 4.17 米宽。

传说有一头差不多大小的斯芬克司怪物曾经守卫在古城底比斯的城门口。而历史上记载的最早的一个谜题正是出自这个传说。这个被称为“斯芬克司之谜”的谜语，不仅是本书论述的起点，而且也是所有关于谜题与数学思想之间关系研究的出发点。作为人类历史上最早的谜题，斯芬克司之谜无愧于“有史以来十大谜题”的称号。日常生活中，谜语太普遍了，所以我们从来不会停下来想一想它到底是什么。谜语的魅力是永恒的。如果让孩子们猜猜像“小鸡为什么要过马路？”这样简单的谜语，他们会马上开动脑筋寻找答案，像是被某种神秘的猜谜本能驱使着。

读者可能会感到奇怪，神话传说里的一条谜语又怎么会和数学挂上钩的呢？读完本章，你自然就很清楚了。就其基本结构而言，斯芬克司之谜是阐释所谓顿悟思维(insight thinking)的一个简单模型。这种类型的思维乃是所有数学发现的基础。

斯芬克司之谜

传说俄狄浦斯来到底比斯城门口时，遇到了守卫城门的大斯芬克司。这头凶残的怪物拦住了我们的神话英雄，给他出了一道谜语，并威胁说如果回答不上来，就马上杀了他：

什么东西在早上有 4 条腿，中午 2 条腿，而晚上 3 条腿呢？

俄狄浦斯传说

根据希腊神话，特尔斐神谕曾警告底比斯国王拉伊俄斯，他将死于他自己与王后伊俄卡斯达所生的儿子之手。于是，当伊俄卡斯达生下儿子后，拉伊俄斯就下令把他丢弃到山里。命运弄人，一个牧羊人救了这个婴儿，并把他带给科林斯城国王普利巴。国王收养了弃婴，赐名俄狄浦斯。

俄狄浦斯长大后，神也给了他一条不祥的预言：他将弑父娶母，并生下罪恶的子孙。但俄狄浦斯认为普利巴就是自己的亲生父亲，于是他逃往底比斯以避免凶兆的应验。在逃亡的路上，他和一个陌生人发生了争执，并杀死了他。来到底比斯城门口，俄狄浦斯被一头巨大的斯芬克司怪物拦住了，怪物威胁说如果猜不出谜语就要杀了他。结果俄狄浦斯猜出了谜语，这头斯芬克司也羞愧自杀了。俄狄浦斯为底比斯人除掉了怪物，人们拥戴他做了国王。俄狄浦斯并娶守寡的王后伊俄卡斯达为妻。

过了几年，底比斯爆发了一场瘟疫。神谕说只有找到杀害拉伊俄斯国王的凶手，并把他驱逐出底比斯，才能

停息瘟疫。于是俄狄浦斯下令调查，结果发现他在逃往底比斯的路上杀死的人正是拉伊俄斯。更让他感到恐怖的是，俄狄浦斯发现拉伊俄斯才是自己的亲生父亲，伊俄卡斯达则是自己的亲生母亲。绝望中俄狄浦斯刺瞎了自己的双目，伊俄卡斯达也悬梁自尽。后来俄狄浦斯被逐出底比斯城。特尔斐神谕最终应验了。

勇敢的俄狄浦斯答道："是人。婴儿时用四肢爬，长大后用两条腿走，老了则需要拄一根拐杖。"听到俄狄浦斯说出正确答案，惊骇的斯芬克司转身就自杀了。因为解救了怪物为患已久的底比斯城，俄狄浦斯成了英雄，被簇拥进底比斯城。

斯芬克司之谜有多种版本。上述版本出自古希腊剧作家索福克里斯(公元前 496－406)的戏剧《俄狄浦斯王》。下面则是另一种同样流传久远的说法：

它只有一种嗓声，但是先是 4 条腿，接着变成 2 条腿，最后变成 3 条腿。这是什么呢？

无论如何表述，斯芬克司之谜都是所有谜语(从某种意义上说，也是所有谜题)的原始模型。编谜者有意把隐晦的谜底隐藏起来——把人生的三个阶段幼年、成年和老年，分别比作一天的三个时段早上、中午和晚上。此外，俄狄浦斯传说还使人联想到，谜题最初可能来源于智力测试及心智的综合测试。圣经人物参孙的故事是又一个证据。在他的婚宴上，参孙有意给妻子的娘家人留下深刻印象，于是给腓力斯客人出了一道谜语(《士师记》14:14)：

吃的从吃者出来，甜的从强者出来。

参孙认定这些腓力斯人猜不出来，于是给了他们七天时间。参孙是根据他亲眼目睹的一件事编的这个谜语——他曾看见一群蜜蜂在一头狮子的尸身里酿蜜。因此，谜语的用词有这样的关系："吃者"＝"那群蜜蜂"；"强者"＝"那头狮子"；"甜的出来"＝"酿蜜"。但狡诈的腓力斯人利用这七天时间，设法从参孙的妻子那里得到了谜底。当他们说出正确答案时，傲慢的圣经英雄参孙愤怒不已，于是向所有腓力斯人宣战。后来的冲突最终导致了参孙自己的毁灭。

古人把谜语看作是智力测试，也把猜谜看作获取知识的一种手段。这就是希腊祭司(号称神使)为什么要用谜语来表述预言的原因。意图很显然，只有那些读得懂这种隐晦"语言"的人，才能参悟到里面隐含的语义。

然而，并非所有的谜语都是设计来测试神话英雄的聪明才智的。例如圣经里的国王所罗门和海勒姆，就曾经组织过猜谜比赛，目的仅仅是为了通过智力竞赛取乐而已。古罗马人在 12 月 17 日至 23 日连续 7 天的农神节上，也把猜谜作为一项娱乐活动。实际上到公元 4 世纪时，谜语就因为其"娱乐价值"而非常流行了，而它们的起源开始渐渐被淡忘。到 10 世纪，阿拉伯学者开始将谜语用于教学——即用来训练法律专业的学生诊断语义的含糊性。凑巧的是，欧洲第一所法律学校也正好同时建立。

15 世纪印刷机发明后不久，最早一批以大众消遣为目的的图书当中就有几本谜语大全。其中有一本 1575 年出版的《梅利谜语大全》，书中有这样一条谜语：

他走进树林抓住了它，
于是坐了下来找它，

因为没法找到它，
只好把它带回了家。
（谜底：刺进脚板的一根荆棘）

到18世纪，许多报纸和杂志定期刊登谜语。作家和学者常常创作谜语。例如美国发明家本杰明·富兰克林（1706—1790），他就以理查德·索德斯的笔名发表过不少谜语。后来他把这些谜语收录进了1732年初版的《理查德年鉴》一书。这本年鉴获得了意想不到的成功，很大一部分的原因在于书中谜语一节很受欢迎。在法国，要说编写搞脑子的谜语，没有谁能比得上大讽刺作家伏尔泰（1694—1778）了，下面就是他编的一个谜语：

世界上哪样东西最长又最短，最快又最慢，最能分割又最能延伸，最不受重视又最珍惜；没有它，什么事都做不成，有了它，许多人却一事无成；它使一切渺小的归于消灭，又使一切伟大的生生不息？
（谜底：时间）

19世纪，谜语的日益大众化导致了谜语形式的多样化。于是一种新的谜语形式诞生了，这就是看手势猜字谜。要猜出谜底，就必须逐一破解单字、单词或句子的意义。在19世纪，哑谜发展成了模仿哑剧，直到现在它仍然是社交集会活动中非常流行的游戏形式。模仿哑剧由各个小组成员表演，分别用手势或动作表达某个单字、单词或短语的意义。例如，如果谜底是“棒球”，那么表演者通常要做的就是表达“棒”和“球”意义的手势。到19世纪末，谜语已经深深根植于欧美的娱乐文化当中，直到今天依然如此。

数 学 评 释

初看起来,传说中斯芬克司刁难俄狄浦斯的问题是没有答案的。到底是什么样的怪物能够先有 4 条腿,接着是 2 条,最后是 3 条呢?而且还是以这样的顺序?解谜需要我们张开想象的翅膀,而不是作线性的思考。正是这种富于想象力的思维构成了所有真正的数学探索的基石。

求 解 问 题

求解问题的方法和策略

演绎:将以前掌握的知识应用到新问题上去。

归纳:根据具体问题中的特定事实推理得到一般结论。

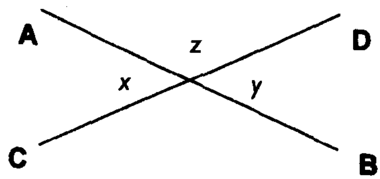
顿悟思维:做出猜测,或顺着试错法得到的预感,逐步解决问题。

通过谜语,我们清楚地看出谜题有别于一般意义上的数学问题,比方说教科书上的数学问题。后者设计来帮助学生按部就班地做某件事(例如,作复杂的加法,解方程,证明定理,等等)。为说明两者之间的差别,我们来看看两个典型的教科书上的问题。先看第一个:

证明两条直线相交所形成的对顶角相等。

求解这类问题的方法称为**演绎**,就是将以前掌握的知识应用到手头的问题上去。

首先我们画一张示意图，标出问题的所有要素。AB 和 CD 表示两条直线，x 和 y 表示它们相交所形成的 4 个夹角中的任意一对对顶角，z 表示这对对顶角之间的一个夹角，如下图所示：



这个问题实际上就是要求我们证明 x 和 y(对顶角)相等。当然，两条直线相交还形成另外一对对顶角，但这里暂时不用考虑，因为我们可以用同样的证明方法证明它们也是相等的。证明需要用到以前学过的知识——即一条直线就是一个 180°的角。首先来看 CD。因为它是一条直线，所以它是一个 180°的角。而从图中可见，CD 由两个小角即 x 和 z 组成，很自然它们之和应等于 180 度——即 $x+z=180°$。等式读作：角 x 和角 z 之和等于 180°。

现在再看 AB。同样它也是由两个小角即 y 和 z 组成。这两个角之和也等于 180 度——类似地，也可以表示成等式：$y+z=180°$。于是得到方程组：

1. $x+z=180°$

2. $y+z=180°$

也可改写成：

3. $x=180°-z$

4. $y=180°-z$

你要是忘记了中学代数，那不要紧，能这么改写的理由是：在等式两边做同样的运算，等式仍然成立。我们可以把等式看作一架保持平衡的天平，两边托盘中的砝码重量相等。砝码的重量就好比等式两边的表达式。为保持天平平衡，从某个托盘(比方说左边)取走

的砝码重量必定得等于从另一个托盘(比方说右边)取走的砝码重量。同样地,如果将等式 1 的左边减去 z,那么必定要在右边也减去 z,等式才能成立。其结果就是等式 3,表示等式两边已经同时减去了 z。请注意,等式 3 左边已经减去了 z,因为(z－z)等于 0——似乎有点不太明显。将等式 2 的两边同时减去 z,得到等式 4。

等于同一物的两物必定相等(例如,如果亚历克斯身高 6 英尺,莎拉也身高 6 英尺,那么两人的身高相等),由此可以推导出 x＝y,因为等式 3 表明 x 等于(180°－z),等式 4 表明 y 也等于(180°－z)。我们没有必要知道这个表达式的具体的值,因为无论它等于多少,x 和 y 总是都与之相等。于是我们就得出了结论:“两条直线相交所形成的对顶角相等”。一般地,可用这种方法证明的结论,我们称之为**定理**。

多 角 形

多角形是一种封闭的平面(两维)图形。例如三角形,长方形和正方形之类的四角形,五角形(有 5 条边),六角形(有 6 条边)等。

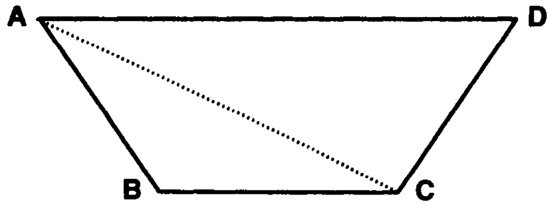
任何三角形,无论其形状如何,它的三个内角之和都等于 180 度(见第五章)。

下面是第二个教科书问题:

写出任意多角形内角之和的公式。

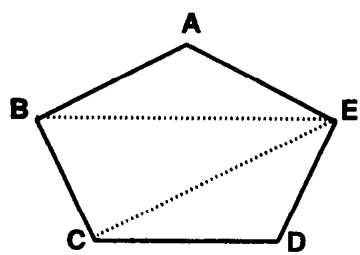
这就要用到另外一种解题策略,即**归纳**,就是基于观察到的事实提炼出一般性的结论。首先来看边数最少的**多角形**即三角形的情况。三角形内角之和等于 180 度。

接下来看看四角形的情况。如下图 ABCD:



请注意,该四角形可分解为两个三角形(三角形 ABC 和三角形 ADC)。于是四角形内角之和就等于这两个三角形的内角之和,即 $180°+180°=360°$。

再来看五角形(有 5 条边)的情况。如下图所示,ABCDE 是一个五角形:



五角形可分解成三个三角形,即三角形 ABE,三角形 BEC 和三角形 ECD,我们再次发现一个简单的事实——即五角形内角之和等于这三个三角形的内角之和:$180°+180°+180°=540°$。

依此类推,我们很容易证明六角形(有 6 条边)的内角之和等于四个三角形的内角之和,七角形的内角之和等于五个三角形的内角之和,等等。现在我们试着将这些发现一般化。我们用 n 表示多角形的边数,n 不固定。根据前面的发现,任一多角形可以分解成边数减 2 个三角形。例如,四角形可分解成两个三角形,三角形的个数比边数(4)少 2,即(4−2);五角形可分解成三个三角形,个数也比边数(5)少 2,即(5−2);依此类推。对于三角形,这个规

则同样适用。因为一个三角形有且仅有一种分解,即其本身,三角形的个数同样比边数(3)少 2,即(3－2)。因此,我们可以将任意一个 n 角形分解成(n－2)个三角形。总结如下:

表 1-1　多角形分解成三角形的个数

多角形的边数	多角形可分解成三角形的个数
3(＝三角形)	(3－2)＝1 个三角形
4(＝四角形)	(4－2)＝2 个三角形
5(＝五角形)	(5－2)＝3 个三角形
6(＝六角形)	(6－2)＝4 个三角形
7(＝七角形)	(7－2)＝5 个三角形
……	……
n(＝n 角形)	(n－2)个 三角形

因为一个三角形的内角和等于 180°,所以四角形的内角和就等于(4－2)180°,五角形就等于(5－2)180°,等等。所以,n 角形的内角和就等于(n－2)180°:

表 1-2　确定多角形的内角和

多角形的边数	多角形可分解成三角形的个数	多角形的内角和
3	(3－2)＝1	180°×1＝180°
4	(4－2)＝2	180°×2＝360°
5	(5－2)＝3	180°×3＝540°
6	(6－2)＝4	180°×4＝720°
7	(7－2)＝5	180°×5＝900°
…	…	…
n	(n－2)	180°×(n－2)＝180°(n－2)

多角形内角和公式可以写成

$(n-2)180°$

或

$180°(n-2)$

利用这个公式,我们就可以直接计算任一多角形的内角和了。例如八角形,n=8,将 n 的值代入内角和公式,就可以计算出它的内角和为:

$(n-2)180°=(8-2)180°=6\times180°=1,080°$

交 换 律

乘法运算时,变动因式(或乘项)的顺序不改变运算结果(乘积)。乘法的这一性质称为交换律。例如:

$2\times3=3\times2=6$

$4\times9=9\times4=36$

一般地,数 n 和数 m 的乘法交换律可表示为:

$n\times m=m\times n$

也可表示为:

$nm=mn$

对求解多角形内角和的问题,应用交换律就有

$180°(n-2)=(n-2)180°$

此外,加法运算也具有同样的性质。例如:

$2+3=3+2=5$

$4+9=9+4=13$

一般形式为:

$n+m=m+n$

但减法和除法没有交换律。符号≠表示“不等于”。例如:

$7-4\neq4-7$

$9\div3\neq3\div9$