张永德/主编

物理学大题典

力学

1

下册

A Grand Dictionary of Physics Problems And Solutions

强元棨 程稼夫/编著

科学出版社
www.sciencep.com
中国科学技术大学出版社

物理学大题典①/张永德主编

力　　学

（下　册）

强元棨　程稼夫　编著

科 学 出 版 社

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

《物理学大题典》是一套大型工具性、综合性物理题解丛书。丛书内容涵盖综合性大学全部本科物理学内容：从普通物理的力学、热学、光学、电学、近代物理到“四大力学”，以及原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学、量子信息等。内容新颖、注重物理、注重学科交叉、注重与科研结合。

《力学》卷共计12章，分上、下册，上册包括质点运动学、质点与质点系动力学、振动和波、有心运动、刚体运动学和动力学、流体力学；下册包括力学的拉格朗日表述、有限多自由度系统的小振动、力学的哈密顿表述、狭义相对论力学等。

本丛书可作为物理类本科生的学习辅导用书、研究生的入学考试参考书和各类高校物理教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

力学(上、下册)/强元棨、程稼夫编著.—北京：科学出版社；合肥：中国科学技术大学出版社，2005

(物理学大题典①/张永德主编)

ISBN 7-03-015494-0

Ⅰ.力… Ⅱ.①强…②程… Ⅲ.力学-解题 Ⅳ.O3-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第044933号

策划编辑：胡升华 / 文案编辑：王昌泰 / 责任校对：钟 洋

责任印制：钱玉芬 / 封面设计：孙希前

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学技术大学出版社

安徽省合肥市金寨路96号

邮政编码：230026

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年9月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2005年9月第一次印刷 印张：68 1/4

印数：1—5 000 字数：1 600 000

定价：98.00元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉)

《物理学大题典》编委会

前　言

物理学，由于它在自然科学中所具有的主导作用，在人类文明史中，特别是在人类物质文明史中，占据着极其重要的地位．经典物理学的诞生和发展曾经直接推动了欧洲物质文明的长期飞跃．20 世纪初诞生并蓬勃发展起来的近代物理学，又造就了上个世纪物质文明的辉煌．自 20 世纪末到 21 世纪初的当前时代，物理学正在以空前的活力，广阔深入地开创着向化学、生物学、生命科学、材料科学、信息科学和能源科学渗透和应用的新局面．在本世纪里，物理学再一次直接推动新一轮物质文明飞跃的伟大进程已经开始．

但是，发展到目前的物理学宽广深厚，累积的知识浩瀚无垠．教授和学习物理学都是一个相当艰苦而漫长的过程．在这个漫长过程的许多环节中，做习题是其中必要而又重要的环节．做习题是巩固所学知识的必要手段、是深化拓展所学知识的重要练习，是锻炼科学思维的体操．习题对于教师和学生双方都是重要的．

然而，和习题有关的事都是很不起眼的事．在有些人眼光中，求解和编纂练习题是全部教学活动中相当次要的环节．习题集也确实是所有著作中“最低层”的，大约只有“傻子”们才肯做的事．“聪明人”常会找诸如习题集不应当出之类的理由，光明正大地规避掉．

但是，在教授和学习过程中，只要是需要的，都是合理的，也总得有人去做才行．于是我们编委会的这些人，本着甘为孺子牛的精神，平时在科研和教学中一道题一道题地积累，现在又一道题一道题地编审，花费了大量时间做着这种不起眼的事．大家觉得，这件事终究是教与学双方共同需要的，也就是有益的．正如一个城市基础建设中，不能都去做地面上的摩天大楼和纪念碑等“抢眼球”的事，也还需要做诸如修建马路、下水道等基础设施的事．

这套《物理学大题典》的前身是中国科学技术大学出版社出版的《美国物理试题与解答》丛书(7 卷)．那套丛书于 20 世纪 80 年代后期由张永德发起并组织完成，内容包括普通物理的力、热、光、电、近代物理到四大力学的全部基础物理学．出版时他选择了“中国科学技术大学物理辅导班主编”的署名方式．自那套丛书出版之后，虽历经 10 余年，仍然有不断的需求，于是就有了现在的这套丛书——《物理学大题典》．

现在这套《物理学大题典》丛书的内容，除继续涵盖力、热、光、电、近代物理到四大力学全部基础物理学内容之外，还包括了原子核物理、粒子物理、凝聚态物理、等离子体物理、天体物理、激光物理、量子光学和量子信息物理等内容．就是说，追踪不断发展的科学轨迹，现在这套丛书仍旧大体涵盖了综合性大学全部本科物理课程的内容．

这次重新编审中，大部分教师仍为原来的，但也增加了一些新的成员．这次出版经大家着力重订和大量扩充，又耗时近两年而成．总计起来，这套丛书前后历时近 20 年，耗费了 30 余位富有科研和教学经验的教授、近 150 位 20 世纪 80 年代和现在的研究生及高年级本科生的巨大辛劳．丛书确实是大家长期共同劳动的结晶．

《物理学大题典》中包括了大量的美国物理试题.一般说来,美国物理试题涉及的数学并不繁难,但却或多或少具有以下特色:内容新颖,富于“当代感”;思路灵活,涉及面宽广;方法和结论简单而实用,试题往往涉及新兴和边沿交叉学科;不少试题本身似乎显得粗糙但却抓住了物理本质,显得“物理味”很足.纵观这些,我们深切感到,这些题目的集合在一定程度上体现了美国科学文化的个性及思维方式的特色.惟鉴于此,我们不惮繁重,集众多人力而不怯,耗漫长岁月而不辍,还是值得的.

至于这次扩充修订所增添的大量题目,也是本着这种精神,摘自大家各自的科研工作成果,或是来自各人的教学心得,实是点滴聚成.

这里要强调指出,对于学生,确实有一个如何正确使用习题集的问题.有的同学,有习题集也不参考,咬牙硬顶,一个晚上自习时间只做了两道题.这种精神诚应嘉勉,但效率不高,也容易挫伤学习积极性,不利于培养学习兴趣;也有的同学,逮到合适解答提笔就抄,这样做是浮躁的、不踏实的.这两种学习方法都不可取.我们认为,正确使用习题集是一个“三步曲”过程:遇到一道题,先自己想一想,想出来了自己做最好;如果认真想了一些时间还想不出来,就不要老想了,不妨翻开习题集找答案,看懂之后,合上书自己把题目做出来;最后一步,要是参考习题集做出来的,就用一两分钟时间分析解剖一下,找找自己存在的不足,今后注意.如此“三步曲”下来,就既有效率又踏实了.本来,效率和踏实是一对矛盾,在这类“治学小道”之下,它俩就统一起来了.总之,正确使用之下的习题集肯定能够成为学生们有用的“爬山”工具.

丛书这次重订扩充工作是在科学出版社胡升华博士的倡议和支持下进行的.没有他的推动,这套丛书面世是不可能的.同时,在这次重订扩充工作里,我们得到了中国科学技术大学的部分教学资助,以及编委会中郭光灿和周又元两位院士和刘万东教授的支持.对于这些宝贵的支持,谨表示深切感谢.

丛书的力学卷共计12章,题目总数由原来413道增扩为1070道.原《美国物理试题与解答·力学》由强元棨、顾恩普、程稼夫、李泽华、杨德田编,参加解题的人有马千乘、邓悠平、杨仲侠、季澍、杜英磊、杨德田、王平、李晓平、王琛、强元棨、陈伟、斯其苗、陈兵、李泽华、肖旭东、任勇、董志华、伍昌鸿、杨永安、何小东、黄剑辉、程稼夫、郭志椿.原力学卷题目来自美国几所著名大学(包括普林斯顿大学、麻省理工学院、哥伦比亚大学、加州大学伯克利分校、威斯康星大学、芝加哥大学、纽约州立大学布法罗分校)的试题和CUSPEA试题.本卷对原力学卷作了大幅度的改写.增加的题目来自强元棨《经典力学》(科学出版社,2003)上、下册全部习题(其中不少选自E. A. Desloge《Classical Mechanics》、周衍柏《理论力学教程》等,部分是自拟的).此外,还选自D. A. Wells《Theory and Problems of Lagrangian Dynamics》、B. B. 巴蒂金、И. И. 托普蒂金《电动力学习题集》、E. Г. 维克斯坦《电动力学习题汇编》和R. 高特里奥、W. 萨文《近代物理学理论和习题》等.

编审者谨识

2005年5月

目　录

下　册

第九章　力学的拉格朗日表述

9.1　广义力、虚功原理

9.1.1　一半径为 R 的圆盘在水平的 xy 平面上做纯滚动，盘面保持垂直，可绕垂直轴自由转动. 试写出质心的 x、y、z 坐标 x_c、y_c、z_c，绕盘面的对称轴的转角 θ 以及绕铅直直径的转角 φ 之间满足的约束关系、虚位移满足的关系，并说明此系统具有多少个独立的广义坐标和多少个独立的虚位移？

解　xyz 是静坐标系，z 轴竖直向上，原点取在水平面上.

盘面保持垂直，有约束关系.

$$z_c = R$$

$$\boldsymbol{v}_c = \dot{x}_c\boldsymbol{i} + \dot{y}_c\boldsymbol{j} \tag{1}$$

纯滚动，圆盘与水平面的接触点速度为零，

$$\boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times (-R\boldsymbol{k}) = 0 \tag{2}$$

用关于定点转动的角速度在静坐标系中分量表达式(欧拉运动学方程)

$$\omega_\xi = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\omega_\eta = \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\psi$$

$$\omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

用于本题，上述欧拉运动学方程中的 ξ、η、ζ 分别改为 x、y、z，ψ 改为 θ，φ 不变，公式中的 $\theta = \frac{\pi}{2}$，$\dot{\theta} = 0$，

$$\omega_x = \dot{\theta}\sin\varphi$$

$$\omega_y = -\dot{\theta}\cos\varphi$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}$$

φ 角如图 9.1 所示，O 为圆盘中心，ζ 轴固连于圆盘，取圆盘的对称轴，x、y 分别与前述的静坐标 x、y 平行，ζ、x、y 三轴均在同一水平面上，ON 为固连于圆盘的 $\xi\eta\zeta$ 坐标与部分固连于圆盘(O 点固连)的平动坐标系的 xy 平面的交线，自然，ON 也在 ζ、x、y 所在的水平面上；φ 是 ON 与 x 轴的夹角，ON 与 ζ 轴垂直.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\theta}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\boldsymbol{i} + \cos(\pi - \varphi)\boldsymbol{j}\right] \tag{3}$$

$$= \dot{\varphi}\boldsymbol{k} + \dot{\theta}(\sin\varphi\,\boldsymbol{i} - \cos\varphi\boldsymbol{j})$$

与用欧拉运动学方程得到的 $\boldsymbol{\omega}$ 完全相同.

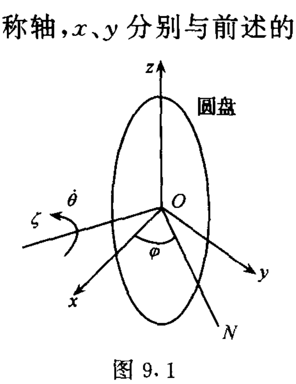

图 9.1

将式(1)、(3)代入式(2),

$$\dot{x}_c\boldsymbol{i} + \dot{y}_c\boldsymbol{j} + R\dot{\theta}\sin\varphi\boldsymbol{j} + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\boldsymbol{i} = 0$$

$$\dot{x}_c + R\dot{\theta}\cos\varphi = 0$$

$$\dot{y}_c + R\dot{\theta}\sin\varphi = 0$$

三个约束关系中只有一个是完整约束,后两个是微分约束(非完整约束),五个坐标 x_c、y_c、z_c、θ、φ 中独立的广义坐标有 4 个,它们是 x_c、y_c、θ 和 φ.

虚位移满足的关系为

$$\delta z_c = 0$$

$$\delta x_c + R\cos\varphi\delta\theta = 0$$

$$\delta y_c + R\sin\varphi\delta\theta = 0$$

五个虚位移满足三个约束关系,独立的虚位移有两个,它们是 $\delta\varphi$ 和 δx_c、δy_c、$\delta\theta$ 三个虚位移中的任一个.

9.1.2　如图 9.2 所示,一个均质的、半径为 R 的圆盘沿水平的 x 轴做纯滚动,一根长 $2l$ 的均质细棒与圆盘保持无滑动接触,一端沿 x 轴滑动.运动时,圆盘与棒保持在同一竖直平面内,选取适当的坐标,写出约束关系,并说明描述系统需用多少个独立坐标.

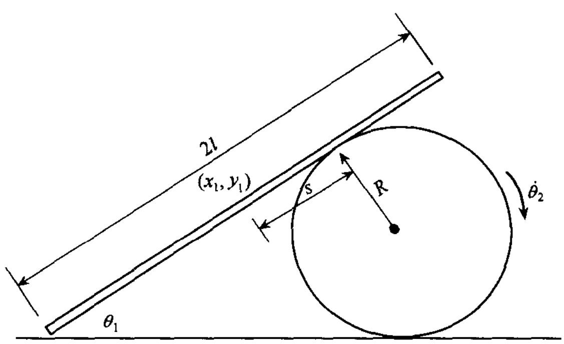

图 9.2

解　方法一:选 x_1、y_1 表示细棒的质心的位置,细棒与 x 轴的夹角 θ_1 表示细棒绕质心的转角,选 x_2 表示圆盘的质心位置,θ_2 表示圆盘绕其质心的转角,用棒与圆盘的切点至棒的质心的距离 s,共六个原用坐标.

显然 y_1 与 θ_1 之间有约束关系

$$y_1 = l\sin\theta_1 \tag{1}$$

圆盘做纯滚动,圆盘与 x 轴的接触点速度为零.

$$\dot{x}_2 - R\dot{\theta}_2 = 0$$

选择 x_2 和 θ_2 的零点,可积出

$$x_2 - R\theta_2 = 0 \tag{2}$$

考虑棒与圆盘间做纯滚动,两接触点有相同的速度,

$$\dot{x}_1\boldsymbol{i} + \dot{y}_1\boldsymbol{j} + \dot{\theta}_1\boldsymbol{k} \times s(\cos\theta_1\boldsymbol{i} + \sin\theta_1\boldsymbol{j})$$

$$= \dot{x}_2\boldsymbol{i} - \dot{\theta}_2\boldsymbol{k} \times R(-\sin\theta_1\boldsymbol{i} + \cos\theta_1\boldsymbol{j})$$

可得

$$\dot{x}_1 - s\dot{\theta}_1\sin\theta_1 = \dot{x}_2 + R\dot{\theta}_2\cos\theta_1 \tag{3}$$

$$\dot{y}_1 + s\dot{\theta}_1\cos\theta_1 = R\dot{\theta}_2\sin\theta_1 \tag{4}$$

式(3)、(4)两个约束关系均为微分约束.

六个原用坐标,已写出两个几何约束,两个微分约束,是否有四个独立的广义坐标?回答是否定的,还有一个几何约束,它是

$$x_2 - x_1 + l\cos\theta_1 = l + s$$

因此独立的广义坐标是三个.

方法二:由式(3)、(4)可消去 s,式(3)乘 $\cos\theta_1$ 加式(4)乘 $\sin\theta_1$,则式(3)、(4)的约束关系变为

$$\dot{x}_1\cos\theta_1 + \dot{y}_1\sin\theta_1 = \dot{x}_2\cos\theta_1 + R\dot{\theta}_2 \tag{5}$$

仍是微分约束,但现在原用坐标只有五个(不再取 s).两个几何约束、一个微分约束,独立的广义坐标为三个.

方法三:前两种方法都先引入广义坐标 s,这里一开始就不引入 s,用圆盘质心平动参考系来获得式(5)的约束关系.

在圆盘质心平动参考系中,棒的质心的速度为 $(\dot{x}_1-\dot{x}_2)\boldsymbol{i}+\dot{y}_1\boldsymbol{j}$,两接触点的速度均沿圆盘的切线方向,也是沿棒的方向,考虑到刚体上任何两点在其连线方向的速度分量相等,由此可写棒上接触点的速度大小为

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\cos\theta_1 + \dot{y}_1\sin\theta_1$$

圆盘上接触点的速度大小为 $R\dot{\theta}_2$,

所以

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\cos\theta_1 + \dot{y}_1\sin\theta_1 = R\dot{\theta}_2$$

这就得到了式(5)的约束关系.

9.1.3　一根长为 $2a$、质量为 m 的杆 BC 用一根未伸长时长为 b、劲度系数为 k 的系在杆的 B 端的弹簧悬于固定点 A,如图 9.3 所示.系统的运动限于包含杆与弹簧的铅直平面内,选择适当的广义坐标,求作用于杆上的广义力分量.

解　取图 9.4 中 r、θ、φ 为广义坐标,弹簧的作用力必沿弹簧的方向,取杆的质心为 D,

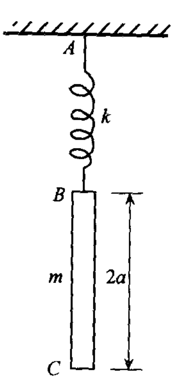

图 9.3

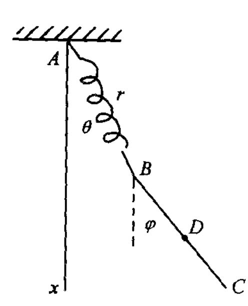

图 9.4

$$x_D = r\cos\theta + a\cos\varphi$$

$$\delta x_D = \cos\theta\delta r - r\sin\theta\delta\theta - a\sin\varphi\delta\varphi$$

作用于杆的弹簧力和重力做的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W &= -k(r-b)\delta r + mg\delta x_D \\ &= [-k(r-b) + mg\cos\theta]\delta r - mgr\sin\theta\delta\theta - mga\sin\varphi\delta\varphi\end{aligned}$$

所以作用于杆的广义力分量为

$$Q_r = -k(r-b) + mg\cos\theta$$

$$Q_\theta = -mgr\sin\theta$$

$$Q_\varphi = -mga\sin\varphi$$

9.1.4　一个在均匀重力场中运动的质点，如用球坐标来描述质点的运动，取竖直向上方向为极轴，求重力的三个广义力分量.

解

$$\delta W = -mg\delta z$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\delta z = \cos\theta\delta r - r\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta W = -mg\cos\theta\delta r + mgr\sin\theta\delta\theta$$

所以

$$Q_r = -mg\cos\theta$$

$$Q_\theta = mgr\sin\theta$$

$$Q_\varphi = 0$$

9.1.5　一个质量为 m、半径为 a 的均质薄圆筒，在另一个质量为 M、半径为 $2a$ 的均质薄圆筒内部做无滑滚动，后者又在水平面上做无滑滚动. 选大圆筒的角位移 θ 以及两圆筒的轴构成的平面与铅直面的夹角 φ 为广义坐标，求作用于系统的所有力的广义力分量 Q_θ 和 Q_φ.

解　作用于系统的主动力只有作用于小圆筒的重力，水平面对大圆筒的支持力和静摩擦力均不做功，作用于大圆筒的重力也不做功，大圆筒对小圆筒的支持力及其反作用力（小圆筒对大圆筒的压力），由于在它们的作用线方向两接触点无相对速度，做功之和为零，两圆筒之间的一对静摩擦力也因在作用线方向两接触点无相对速度，做功之和为零. 由于与这些力有关的约束都是稳定的双面几何约束，可能位移与虚位移完全一致，约束力在一切可能位移时不做实功，也对一切虚位移不做虚功.

取 z 轴竖直向上，原点取在水平面上，小圆筒质心的坐标为

$$z = 2a - a\cos\varphi$$

$$\delta W = -mg\delta z = -mga\sin\varphi\delta\varphi$$

作用于系统的所有力的广义力分量.

$$Q_\theta = 0, \qquad Q_\varphi = -mga\sin\varphi$$

9.1.6　如图 9.5 所示，一个质量为 m、半径为 a 的均质圆柱体，在一个质量为 M 的木块中割出一个半径为 b 的半圆柱形空心槽内做纯滚动，木块又由一个劲度系数为 k 的弹簧支承着，可沿竖直导轨做无摩擦运动. 取木块的竖直向上的位移 x 和圆柱中心的角

位移 θ 为广义坐标，x 和 θ 的零点选在系统的平衡位置. 求作用于系统的所有力的广义力分量.

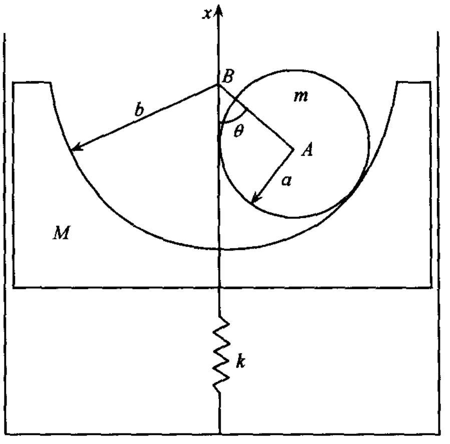

图 9.5

解　方法一：作用于系统的主动力，有作用于圆柱的重力 mg，作用于木块的重力 Mg 和弹簧力.

用木块中割出的半圆柱形空槽的圆心 B 表示木块的位置，A 为圆柱的对称轴.

设弹簧原长为 l_0，平衡时的弹簧长度为 l，

则　$(M+m)g=k(l_0-l)$

$$\delta W=-Mg\delta x_B-mg\delta x_A-k(l+x-l_0)\delta(l+x-l_0)$$

处于平衡时，B 点的 x 为零，

$$x_B=x,\qquad \delta x_B=\delta x$$

$$x_A=x_B-(b-a)\cos\theta=x-(b-a)\cos\theta$$

$$\delta x_A=\delta x+(b-a)\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta W=-Mg\delta x-mg[\delta x+(b-a)\sin\theta\delta\theta]-k(l-l_0+x)\delta x$$
$$=-mg(b-a)\sin\theta\delta\theta-kx\delta x$$

所以　$$Q_x=-kx\qquad Q_\theta=-mg(b-a)\sin\theta$$

方法二：求 Q_x 时，令 $\delta\theta=0$，

$$\delta W=Q_x\delta x=-(Mg+mg)\delta x-k(l+x-l_0)\delta(l+x-l_0)$$

用平衡时，

$$(M+m)g=k(l_0-l)$$

$$Q_x\delta x=-kx\delta x$$

所以

$$Q_x=-kx$$

求 Q_θ 时，令 $\delta x=0$，

$$\delta W=Q_\theta\delta\theta=-mg\delta x_A$$

$$x_A = -(b-a)\cos\theta$$

$$Q_\theta \delta\theta = -mg(b-a)\sin\theta\delta\theta$$

所以
$$Q_\theta = -mg(b-a)\sin\theta$$

9.1.7　xy 平面内的任何点可改用 c、y 为坐标或 c、x 为坐标，其中 c 满足 $xy=c$. 如重力沿 y 轴负向，求质量为 m 的质点所受重力的广义力.

解　取 c、y 为广义坐标时，

$$Q_c = 0, Q_y = -mg$$

取 c、x 为广义坐标时，

$$\delta W = -mg\delta y$$

因为

$$y = \frac{c}{x},\quad \delta y = \frac{1}{x}\delta c - \frac{1}{x^2}c\delta x$$

$$\delta W = -mg\left(\frac{1}{x}\delta c - \frac{1}{x^2}c\delta x\right)$$

∴
$$Q_c = -\frac{mg}{x}$$

$$Q_x = \frac{mgc}{x^2}$$

9.1.8　一个质量为 m 的质点系在不可伸长的绳子上，绳子穿过板 B 的小孔栓于固定点，板以 $s=A\sin\omega t$ 沿竖直轴 y 做上下运动，其中 A、ω 为常量，质点在图 9.6 所示的 xy 平面内运动，求质点受到的广义力(不计小孔处的摩擦力).

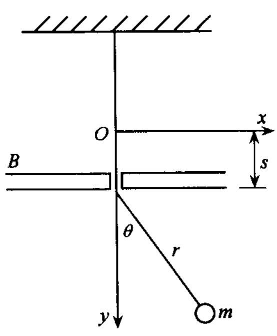

图 9.6

解　可以证明绳子张力 T 仍然是约束力. 设图中从固定的 O 点到质点这一段绳子长度为 l，$l=s+r=$常量，

$$x = r\sin\theta = (l-s)\sin\theta = (l-A\sin\omega t)\sin\theta$$

$$y = s + r\cos\theta = A\sin\omega t + (l-A\sin\omega t)\cos\theta$$

$$\delta x = (l-A\sin\omega t)\cos\theta\delta\theta$$

$$\delta y = -(l-A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta$$

$$\begin{aligned}\delta W &= mg\delta y - T\sin\theta\delta x - T\cos\theta\delta y\\ &= -mg(l-A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta - T\sin\theta(l-A\sin\omega t)\cos\theta\delta\theta\\ &\quad - T\cos\theta[-(l-A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta]\\ &= -mg(l-A\sin\omega t)\sin\theta\delta\theta\end{aligned}$$

所以
$$Q_\theta = -mg(l-A\sin\omega t)\sin\theta$$

注意：该系统只有一个自由度，r 随 t 的变化是给定的，可把 $r=l-A\sin\omega t$ 视为约束. 故 $\delta r=0$，绳子张力的虚功 $-T\delta r=0$.

9.1.9　图 9.7 中木块 A、B 淹没在黏性液体中，黏性力与速度成正比，比例系数分别为 α_1、α_2，用图中 y、y_3 为广义坐标，求广义黏性力.

解　$\delta W = -\alpha_1\dot{y}_1\delta y_1 - \alpha_2\dot{y}_2\delta y_2$

$$y_1 = y + y_3$$

$$\delta y_1 = \delta y + \delta y_3$$

考虑到绳子不可伸长，

$$y_3 + y_2 - y = \text{常量}$$

$$\delta y_3 + \delta y_2 - \delta y = 0$$

$$\delta y_2 = \delta y - \delta y_3$$

$$\delta W = -\alpha_1 \dot{y}_1(\delta y + \delta y_3) - \alpha_2 \dot{y}_2(\delta y - \delta y_3)$$

又　　$\dot{y}_2 = y\dot{y} - y\dot{y}_3$，　　$\dot{y}_1 = \dot{y} + \dot{y}_3$

$$\begin{aligned}\delta W &= -\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3)(\delta y + \delta y_3) - \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_3)(\delta y - \delta y_3) \\ &= [-\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) - \alpha(\dot{y} - \dot{y}_3)]\delta y \\ &\quad + [-\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) + \alpha_2(y - \dot{y}_3)]\delta y_3\end{aligned}$$

所以

$$Q_y = -\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) - \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_3)$$

$$Q_{y_3} = -\alpha_1(\dot{y} + \dot{y}_3) + \alpha_2(\dot{y} - \dot{y}_3)$$

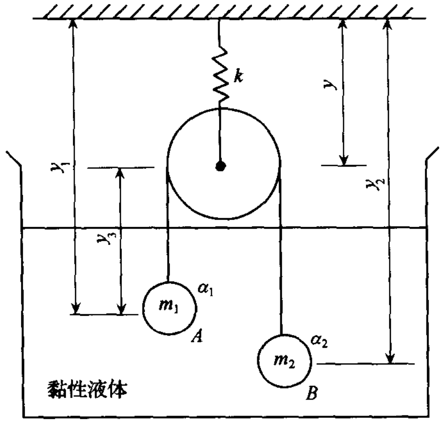

图 9.7

9.1.10　图 9.8 中棒形磁铁和两个单个磁极均受到铁质薄板的黏性阻力，阻力与相对速度成正比，比例系数分别为 α_1、α_2、α_3. 设磁棒、磁极和薄板均只做竖直方向的运动，运动中，磁棒、磁极均与薄板保持接触. 求广义黏性力 Q_{y_1} 和 Q_{y_2}.

解　薄板的速度为 $\dot{y}_1$ 时，磁棒的速度为 $-\dot{y}_1$，磁极 A 的速度为 $\dot{y}_2 - \dot{y}_1$，磁极 B 的速度为 $-\dot{y}_2 - \dot{y}_1$.

磁棒受到的黏性力为 $-\alpha_1(-\dot{y}_1 - \dot{y}_1) = 2\alpha_1\dot{y}_1$，薄板受到磁棒给予的力是上述力的反作用力，为 $-2\alpha_1\dot{y}_1$. 磁极 A 受到薄板的黏性力为 $-\alpha_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - \dot{y}_1) = -\alpha_2(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_1)$，薄板受到磁极 A 的反作用力为 $\alpha_2(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_1)$；磁极 B 受到薄板的黏性力为 $-\alpha_3(-\dot{y}_2 - \dot{y}_1 - \dot{y}_1) = \alpha_3(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$，薄板受到磁极 B 的反作用力为 $-\alpha_3(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2)$.

薄板的虚位移为 δy_1，磁棒的虚位移为 $-\delta y_1$，磁极 A 的虚位移为 $\delta y_2 - \delta y_1$，磁极 B 的虚位移为 $-\delta y_1 - \delta y_2$.

$$\delta W = 2\alpha_1\dot{y}_1(-\delta y_1) - \alpha_2(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_1)(\delta y_2 - \delta y_1) + \alpha_3(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(-\delta y_1 - \delta y_2)$$

$$+\left[-2\alpha_1\dot{y}_1+\alpha_2(\dot{y}_2-2\dot{y}_1)-\alpha_3(2\dot{y}_1+\dot{y}_2)\right]\delta y_1$$
$$=\left[-4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_1+2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_2\right]\delta y_1$$
$$+\left[2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_1-(\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_2\right]\delta y_2$$

所以
$$Q_{y_1}=-4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_1+2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_1$$
$$Q_{y_2}=2(\alpha_2-\alpha_3)\dot{y}_1-(\alpha_2+\alpha_3)\dot{y}_2$$

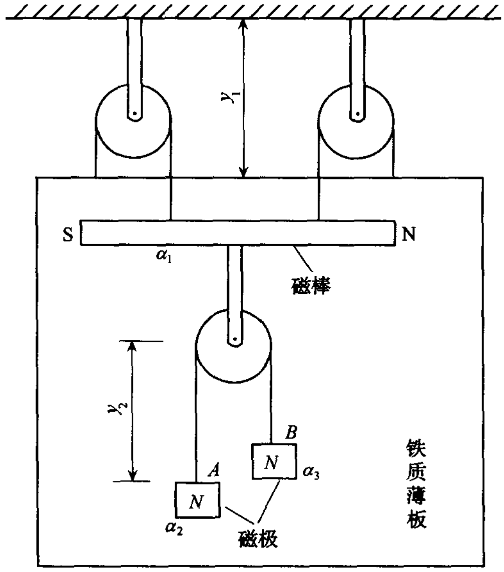

图 9.8

9.1.11 图 9.9 中 m_1、m_2 限于在光滑的水平线上运动，m_1、m_2 均固连着一个减震器，活塞 P_1、P_2 和 m_3 固连于水平棒上，活塞的作用力大小与相对速度的 n 次方成正比，方向与相对速度方向相反. 求广义力 Q_{x_1}、Q_{q_1}、Q_{q_2}(弹簧力用势能处理).

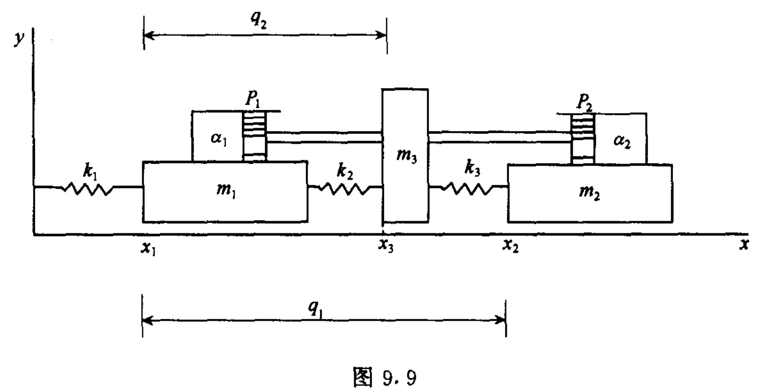

图 9.9

解 $\delta W=\alpha_1|\dot{x}_3-\dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3-\dot{x}_1)\delta x_1-\alpha_2|\dot{x}_2-\dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2-\dot{x}_3)\delta x_2$

$-\alpha_1|\dot{x}_3-\dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3-\dot{x}_1)\delta x_3+\alpha_2|\dot{x}_2-\dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2-\dot{x}_3)\delta x_3$

$$x_2 = x_1 + q_1, \qquad \delta x_2 = \delta x_1 + \delta q_1$$

$$x_3 = x_1 + q_2, \qquad \delta x_3 = \delta x_1 + \delta q_2$$

$$\begin{aligned}\delta W =& [\alpha_1|\dot{x}_3 - \dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) - \alpha_2|\dot{x}_2 - \dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ & - \alpha_1|\dot{x}_3 - \dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + \alpha_2|\dot{x}_2 - \dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)]\delta x_1 \\ & - [\alpha_2|\dot{x}_2 - \dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)]\delta q_1 - [\alpha_1|\dot{x}_3 - \dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) \\ & - \alpha_2|\dot{x}_2 - \dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)]\delta q_2 \\ =& - \alpha_2|\dot{x}_2 - \dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\delta q_1 - [\alpha_1|\dot{x}_3 - \dot{x}_1|^{n-1}(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) \\ & - \alpha_2|\dot{x}_2 - \dot{x}_3|^{n-1}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)]\delta q_2\end{aligned}$$

$$\dot{x}_2 - \dot{x}_3 = \dot{x}_1 + \dot{q}_1 - (\dot{x}_1 + \dot{q}_2) = \dot{q}_1 - \dot{q}_2$$

$$\dot{x}_3 - \dot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dot{q}_2 - \dot{x}_1 = \dot{q}_2$$

$$\begin{aligned}\delta W =& - \alpha_2|\dot{q}_1 - \dot{q}_2|^{n-1}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)\delta q_1 \\ & + [\alpha_2|\dot{q}_1 - \dot{q}_2|^{n-1}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - \alpha_1|\dot{q}_2|^{n-1}\dot{q}_2]\delta q_2\end{aligned}$$

所以　$Q_{q_1} = - \alpha_2|\dot{q}_1 - \dot{q}_2|^{n-1}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$

$$Q_{q_2} = \alpha_2|\dot{q}_1 - \dot{q}_2|^{n-1}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

$$Q_{x_1} = 0$$

9.1.12　图 9.10 中质量为 m_1、m_2、m_3 的三滑块在水平面上沿一条直线滑动，滑块与水平面间的阻力与速度成正比，比例系数分别为 α_1、α_2、α_3，磁铁 A、B 与 m_2 间的黏性阻力与相对速度成正比，比例系数分别为 α_4、α_5. 分别用两组广义坐标 x_1、x_2、x_3 和 x_1、q_1、q_2，求广义力(弹簧力用势能处理).

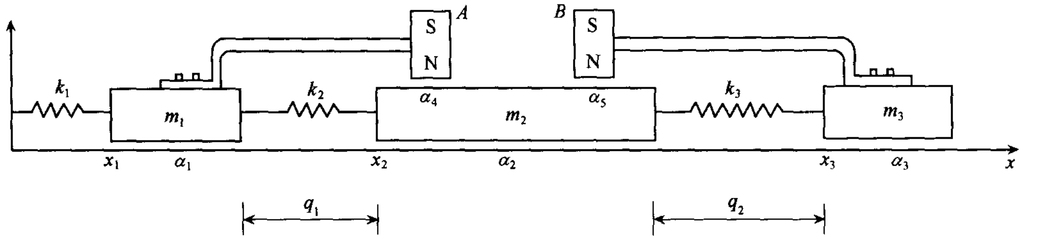

图 9.10

解　
$$\begin{aligned}\delta W =& - \alpha_1\dot{x}_1\delta x_1 - \alpha_2\dot{x}_2\delta x_2 - \alpha_4(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\delta x_1 - \alpha_4(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\delta x_2 \\ & - \alpha_5(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\delta x_2 - \alpha_5(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)\delta x_3 - \alpha_3\dot{x}_3\delta x_3 \\ =& [- \alpha_1\dot{x}_1 - \alpha_4(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)]\delta x_1 + [- \alpha_2\dot{x}_2 - \alpha_4(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ & - \alpha_5(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)]\delta x_2 + [- \alpha_5(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - \alpha_3\dot{x}_3]\delta x_3\end{aligned}$$

用 x_1、x_2、x_3 为广义坐标时，

$$Q_{x_1} = - \alpha_1\dot{x}_1 - \alpha_4(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$