

S&TR

CAEP Report—
EMS—0012(1994)

Science and Technology Report

非线性有限元法在工程结构设计中的应用

Application of Nonlinear FEM in the Design of
Engineering Structures

科技報告



China Academy of Engineering Physics

中国工程物理研究院

中国工程物理研究院科技系列报告

科技系列报告编辑部编辑

强激光与粒子束杂志社出版发行

(成都市 511 信箱 5 分箱, 610003)

中物院曙光印刷厂印刷



开本 787×1092 1/16 · 印张 1/2

1994 年 12 月 第一版 · 1994 年 12 月 第一次印刷

(绵) 新登字 2272 每册定价: 1.50 元



张家鹏:男,中国工程物理研究院副研究员,1938年生,1963年毕业于哈尔滨工业大学飞行器结构力学与强度计算专业。现为总体工程研究所工程力学应用研究室主任,多项成果获国家发明奖、部委级科技进步奖。

Zhang Jipeng; Associate Research Fellow. Male, Born in 1938, graduated from Harbin Institute of Technology in 1963, majored in structure mechanics and strength analysis of aircraft. As a director of mechanics group of system institute, CAEP at the present and has been given National Invention Reward and Science Improvement Reward in ministry and commission for several times.

非线性有限元法在工程结构设计中的应用

张家鹏 周正朝 张德美

(中国工程物理研究院总体工程研究所, 成都 521 信箱, 610003)

摘要 根据虚功原理, 本文采用普朗特尔-劳埃斯(Prandtl-Reuss)流动理论及完全拉格朗日法(Total-Lagrangian Formulation), 分别导出了材料非线性、几何非线性及其耦合非线性有限元表达式。着重分析了几何大变形弹塑性有限元在球形压力容器中的应用的基础上, 根据结构在弹塑性状态下应力分布规律和特点, 提出以塑性失效准则作为工程结构设计的依据。分析计算结果与试验结果比较吻合, 为压力容器设计、选材和试验提供了较为可靠的依据。

关键词 非线性有限元 弹塑性 大变形弹塑性 压力容器设计

1 引言

工程结构中的力学问题, 从本质上讲是非线性的, 线性假设只是为了研究问题的方便对工程实际问题进行的一种简化处理。对有些受力构件不仅要进行线性弹性分析, 而且还需要进行非线性分析。由于结构设计上不断采用新的结构形式, 应用新的材料和工艺, 这就需要在力学分析中有更加合理和可靠的计算模型和分析方法。在对结构进行分析计算时, 首先根据结构的几何特性、材料特性、载荷状态及边界条件等因素建立力学计算模型, 根据求解方程的不同分为线性问题和非线性问题。

有限元线性静力方程可写成

$$\begin{aligned} [K]\{u\} &= \{R\} \\ [K] &= \int_V [B]^T [D]_e [B] dV \end{aligned} \quad (1)$$

$[K]$ 为刚度矩阵, 位移矢量 $\{u\}$ 是载荷矢量 $\{R\}$ 的线性函数, 应变矩阵 $[B]$ 与位移矢量 $\{u\}$ 无关, 仅是坐标的函数, 弹性矩阵 $[D]_e$ 为常数。

非线性问题一般分为两大类, 材料非线性和几何非线性。材料非线性指应力—应变关系为非线性; 几何非线性指应变—位移关系为非线性, 应力—应变关系可以是线性也可以是非线性。对于非线性问题, 由于结构的几何或材料性质与载荷路径或时间相关, 无法建立全量关系, 我们采用的是增量逐步求解法。

由于遇到数学上的困难, 对于工程中的复杂结构采用解析方法求解, 往往难以实现, 对于非线性问题有限元法仍然是最有效的分析方法。我们先后推导了属于材料非线性的小变形弹塑性有限元法, 属于几何非线性的薄壳弹性稳定性有限元法, 属于材料和几何耦合非线性的大变形弹塑性有限元法。编制了相应的程序, 在

西南计算中心 SIEMENS 7780 机上调试通过形成文件，并在工程结构受力分析计算上得到广泛的应用，计算结果与试验结果比较吻合，为结构设计和试验提供了比较可靠的依据。

2 非线性有限元分析

2.1 材料非线性有限元分析

材料非线性亦称物理非线性，在工程中应用较多的是小变形弹塑性问题。对这类问题弹性力学中的几何方程和平衡方程依然成立，只是联系应力—应变关系的本构方程不同。

对于弹性问题，本构方程为线性

$$\{\sigma\} = [D]_e \{\varepsilon\} \quad (2)$$

对于弹塑性问题，由于应力不仅依赖于当时的应变状态，而且还与变形历史有关，因此本构方程为非线性。我们在米赛斯 (Mises) 屈服准则基础上，根据普朗特—劳埃斯 (Prandtl-Reuss) 流动理论，应用增量变刚度法推导了小变形弹塑性有限元法。

在塑性状态下，应变增量 $d\varepsilon$ 可以写成弹性应变增量 $d\varepsilon_e$ 和塑性应变增量 $d\varepsilon_p$ 之和

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon\}_e + d\{\varepsilon\}_p \quad (3)$$

弹性应变增量与应力增量 $d\sigma$ 成线性关系

$$d\{\sigma\} = [D]_e d\{\varepsilon\}_e \quad (4)$$

塑性应变增量服从流动法则

$$d\{\varepsilon\}_p = d\lambda \frac{\partial \sigma_i}{\partial \{\sigma\}} \quad (5)$$

这样便可导出

$$d\varepsilon_{ip} = \frac{\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \{\sigma\}}\right)^T [D]_e}{H' + \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \{\sigma\}}\right)^T [D]_e \frac{\partial \sigma_i}{\partial \{\sigma\}}} d\{\varepsilon\} \quad (6)$$

式中 H' 为材料应变硬化率， σ_i 为等效应力

整理后可得到

$$d\{\sigma\} = [D]_{ep} d\{\varepsilon\} \quad (7)$$

式中 $[D]_{ep}$ 为弹塑性矩阵。这样小变形弹塑性有限元方程式可写成

$$[K] \Delta\{u\} = \Delta\{R\} \quad (8)$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D]_{ep} [B] dV$$

2.2 几何非线性有限元分析

几何大变形情况下，应力应变如何定义，以哪个状态来描述各力学量，采用不同的坐标系就有不同的描述形式。本文采用完全拉格朗日法 (Total Lagrangian

Formulation), 简称 T.L 法。变形前后的各力学量均以没有变形 $t=0$ 时的初始位形为基准。

假定 t 时刻以前的解已求出, 根据虚功原理用 T.L 法描述 $t+\Delta t$ 时刻的虚功方程

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (9)$$

式中 ${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij}$, ${}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{ij}$ 为 $t+\Delta t$ 时刻的柯西应力, 格林应变。由于 ${}^{t+\Delta t}_0 S_{ij}$ 和 ${}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{ij}$ 为未知, 需进行如下分解

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}_0 S_{ij} &= {}^t_0 S_{ij} + {}_0 S_{ij} \\ {}^{t+\Delta t}_0 \epsilon_{ij} &= {}^t_0 \epsilon_{ij} + {}_0 \epsilon_{ij} \end{aligned} \quad (10)$$

式中 ${}^t_0 S_{ij}$, ${}^t_0 \epsilon_{ij}$ 为 t 时刻的应力、应变; ${}_0 S_{ij}$, ${}_0 \epsilon_{ij}$ 为 Δt 时间段的应力、应变增量。

应变增量可写成线性部分 ${}_0 e_{ij}$ 和非线性部分 ${}_0 \eta_{ij}$ 之和的形式

$${}_0 \epsilon_{ij} = {}_0 e_{ij} + {}_0 \eta_{ij} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} {}_0 e_{ij} &= \frac{1}{2} ({}_0 u_{i,j} + {}_0 u_{j,i} + {}^t_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j} + {}_0 u_{k,i} {}^t_0 u_{k,j}) \\ {}_0 \eta_{ij} &= \frac{1}{2} {}_0 u_{k,i} {}_0 u_{k,j} \end{aligned} \quad (12)$$

当 Δt 取值较小时, 可近似用线性应变增量 ${}_0 e_{ij}$ 代替应变增量 ${}_0 \epsilon_{ij}$, 这样可得到经过线性处理的 T.L 描述的增量形式虚功方程表达式

$$\int_{0V} C_{ijrs} {}_0 e_{rs} \delta {}_0 e_{ij} dV + \int_{0V} S_{ij} \delta {}_0 \eta_{ij} dV = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0V} {}^t_0 S_{ij} \delta {}_0 e_{ij} dV \quad (13)$$

因此 T.L 描述的几何非线性有限元方程式可写成

$$([{}^t_0 K_L] + [{}^t_0 K_{NL}]) \{ {}_0 u \} = \{ {}^{t+\Delta t} R \} - \{ {}^t_0 F \} \quad (14)$$

$$[{}^t_0 K_L] = \int_{0V} [{}^t_0 B_L]^T [D] [{}^t_0 B_L] dV \quad (15)$$

$$[{}^t_0 K_{NL}] = \int_{0V} [{}^t_0 B_{NL}]^T [{}^t_0 S] [{}^t_0 B_{NL}] dV \quad (16)$$

$$\{ {}^t_0 F \} = \int_{0V} [{}^t_0 B_L]^T \{ D \} \{ {}^t_0 S \} dV \quad (17)$$

式中 $[{}^t_0 K_L]$, $[{}^t_0 K_{NL}]$ 为线性、非线性应变刚度矩阵; $[{}^t_0 B_L]$, $[{}^t_0 B_{NL}]$ 为线性、非线性应变位移矩阵; $[D]$ 为材料特性矩阵; $[{}^t_0 S]$ 为应力矩阵; $\{ {}^t_0 F \}$ 为应力等效节点力矢量; $\{ {}^{t+\Delta t} R \}$ 为 $t+\Delta t$ 时刻作用于节点上的外力矢量。

2.3 耦合非线性有限元分析

在实际工程中经常遇到材料非线性和几何非线性耦合分析计算问题。压力容器由于材料屈服引起的应变强化呈现的材料非线性, 及容器整体屈服产生的塑性大变

形而呈现的几何非线性便是一个典型的例子。在进行分析计算时,要考虑材料非线性和几何非线性二者之间的相互影响。

对于几何大变形弹塑性分析, T.L 描述的有限元平衡方程 (14) 式仍然成立。由工程应力与工程应变建立起来的小变形弹塑性本构关系, 可直接用于我们所研究的大位移、大转动、小应变几何非线性情况。但应力要用柯西应力, 应变要用格林应变代替。

对于 t 时刻已进入塑性状态的单元, (15) 式中的矩阵 $[D]$ 取弹塑性矩阵 $[D]_{ep}$, 对弹性区单元仍取弹性矩阵 $[D]_e$, 对 t 时刻为弹性区, 而在 $t + \Delta t$ 时刻为塑性区的过渡单元取加权平均弹塑性矩阵 $[\bar{D}]_{ep}$ 。

$$[\bar{D}]_{ep} = m[D]_e + (1-m)[D]_{ep} \quad (18)$$

式中 m 为加权系数。

2.4 结构稳定性特征方程

结构稳定性分析已在工程中广泛应用, 我们采用能量准则法分析了薄壳分支点弹性屈曲失稳。结构在外力作用下总势能为

$$\Pi = U + T + f - A \quad (19)$$

式中 U 为结构应变能, T 为结构动能, f 为结构能量损耗, A 为外力作的功。

由势能原理可知, 总势能 Π 的二次变分 $\delta^2 \Pi > 0$ 表示结构平衡是稳定的, $\delta^2 \Pi < 0$ 结构平衡是不稳定的, $\delta^2 \Pi = 0$ 是临界平衡。

根据这个临界状态概念, 可由 T.L 描述的有限元平衡方程式 (14) 式导出分支点失稳的特征值。

$$([{}^t_0 K_L] + [{}^t_0 K_{NL}]) \{ {}^t_0 \mu \} = \{ {}^{t+\Delta t} R \} - \{ {}^t_0 F \} \quad (20)$$

t 时刻的位形与载荷达到临界值之前的初始位形相对应; $t + \Delta t$ 时刻的位形与临界载荷作用下的“微扰动”平衡位形相对应。 $\{ {}^t_0 \mu \}$ 表示“微扰动”位形各节点位移增量列阵。

对于弹性失稳, 几何刚度矩阵正比于外载荷。引入载荷比例因子 λ , 则在临界载荷作用下初始位形的平衡方程可写成

$$([K_L] + \lambda[K_{NL}]) \{ 0 \} = \{ \Delta^t R \} - \{ F \} \quad (21)$$

从而可得

$$([K_L] + \lambda[K_{NL}]) \{ U \} = \{ 0 \} \quad (22)$$

这样结构分支点失稳问题就归结为求广义特征值问题。

临界失稳载荷可由下列行列式求得

$$\det([K_L] + \lambda[K_{NL}]) = \{ 0 \} \quad (23)$$

求解上述行列式可得到一系列的 λ 值, 其中 $\lambda_{n, \min}$ 即为失稳波形数为 n 时的临界失稳载荷因子。

3 工程应用实例

3.1 球型压力容器有限元弹塑性分析

在进行球形压力容器有限元弹塑性分析计算时, 采用的是轴对称三角形环单元, 在应力集中部位适当加密有限元网格的划分如图 1 所示。

压力容器所用材料为 HR-1、HR-2、HR-3 不锈钢，主要机械性能见表 1。

表 1

材料	$\sigma_{0.2}/\text{MPa}$	σ_b/MPa	E/GPa	ν
HR-1	294.2	608.0	186.3	0.3
HR-2	390.3	728.6	205.0	0.3
HR-3	484.5	874.8	202.0	0.3

计算压力容器弹塑性应力和爆破压力，需要给出材料的真应力、应变曲线，见图 2。

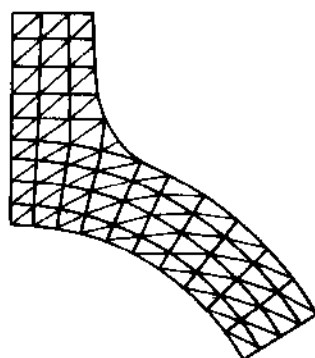


图 1 局部网格图

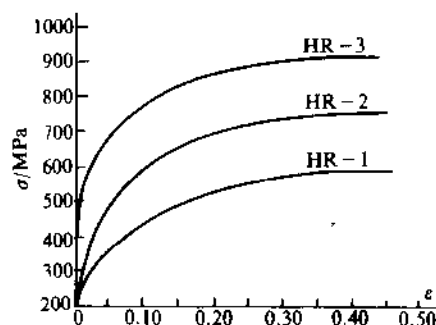


图 2 材料真应力、应变试验曲线

简要计算结果与试验结果比较见表 2。

表 2

项 目	容器 I		容器 II		容器 III	
	HR-1		HR-2		HR-3	
	整体屈服压力	爆破压力	整体屈服压力	爆破压力	整体屈服压力	爆破压力
计算结果, MPa	47.0	98.1	36.3	68.6	160.8	247.5
试验结果, MPa	46.9	97.6	35.0	64.2	156.8	255.1
相对误差, %	0.2	0.5	3.7	6.9	2.6	3.0

在弹塑性状态下，球壳径向位移与外载荷关系曲线如图 3 所示。

图 4 给出了容器壁处于弹性、弹塑性、塑性状态情况下，环向应力变化规律。从中看出器壁处于弹塑性状态时，由于外壁弹性区对内壁已经屈服的塑性区的塑性流动起约束作用，引起应力重新分布，器壁上环向应力的最大值 $\sigma_{\theta \max}$ 随着内压的增加，不断向外壁扩展，在弹性和塑性交界面上出现拐点。

在管嘴与球壳内表面相接部位，由于几何形状突变，变形不协调，产生附加应力，出现应力集中。应力集中系数随着内压的增加，塑性流动的增大而降低。当器壁整体屈服后，由于受弹性约束的减小，应力集中系数下降比较缓慢如图 5 所示。

容器进入塑性状态后, 即使全部卸去内压, 在容器结构内仍保留残余应力和残余变形, 图 6 给出了残余应力沿器壁的变化规律。

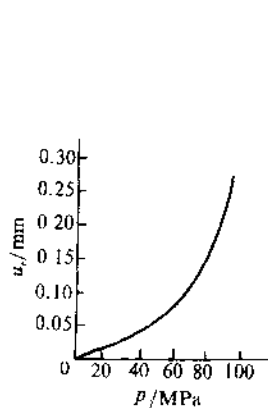


图 3 球壳径向位移 u_r 与外载荷关系曲线

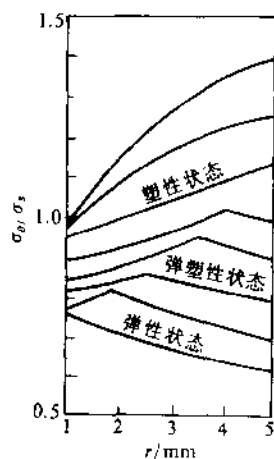


图 4 环向应力分布规律曲线

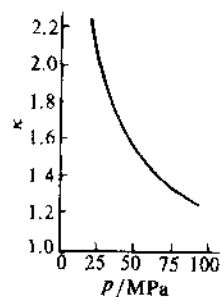


图 5 塑性状态应力集中系数曲线

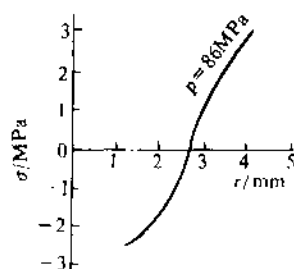


图 6 球壳残余应力沿壁厚分布曲线

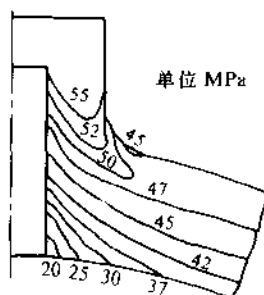


图 7 管嘴部位塑性区域扩展流线图

从图 7 管嘴部位塑性区扩展流线图可以看出当管嘴局部进入塑性状态时, 球壳大部分区域仍处于弹性状态, 而且应力水平较低。因此, 以压力容器任何部位的应力达到屈服, 结构便失去正常工作能力的弹性失效准则作为设计依据, 显然过于保守, 材料的潜力得不到充分的发挥。计算分析结果表明, 容器局部屈服仍然能继续承载, 处于正常工作状态。为此, 我们提出以容器整个器壁截面进入屈服, 才失去正常工作能力的塑性失效准则, 作为设计依据是符合压力容器现代设计方法的。

3.2 薄壳临界失稳载荷的分析

我们采用截锥元对多种轴对称薄壳结构方案的临界失稳载荷进行分析计算, 图 8 是其中的一种结构形式, 临界失稳载荷计算结果见表 3。

在实际工程结构中承受外压的壳体, 有时虽然应力值小于材料屈服强度, 由于结构屈服失稳常使结构丧失承载能力, 在设计中应尽可能加以避免。但有时为了实现某种特定状态, 可以利用屈曲失稳这一特性达到预想的目的。工程中用的翻转薄

壳就是利用在较小外压作用下,使薄壳失稳达到翻转的。

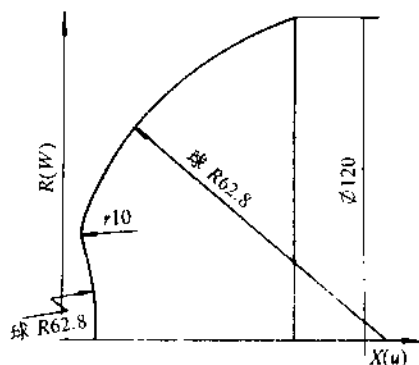


图 8 薄壳结构方案简图

表 3

项 目	临界失稳载荷, MPa	失稳波数
计算结果	0.5611	2
试验结果	0.4511 ~ 0.6374	2

参考文献

- 1 丁仁、熊祝华、黄文彬, 塑性力学基础, 北京: 科学出版社, 1982
- 2 李大潜等, 有限元素法续讲, 北京: 科学出版社, 1979
- 3 张圣坤, 轴对称壳屈曲解析有限单元法, 上海交大学报, 1979, (2)
- 4 张汝清、詹先义, 非线性有限元分析, 重庆大学, 1987
- 5 龚尧南、王寿梅, 结构分析中的非线性有限元素法, 北京: 北京航空学院出版社, 1986
- 6 周正朝、张家鹏, 弹塑性有限元法在压力容器分析中的应用, 科技学报, 1983, (3)
- 7 华伯浩、张家鹏, 混合变量的轴对称体弹塑性有限元分析, 上海力学, 1983, (3)

APPLICATION OF NONLINEAR FEM IN THE DESIGN OF ENGINEERING STRUCTURES

Zhang Jiapeng, Zhou Zhengchao, and Zhang Demei

China Academy of Engineering Physics, Institute of System Engineering,

P.O.Box 521, Chengdu 610003

ABSTRACT In line with the principle of virtual work, this paper adopts Prandtl-Reuss flow theory and Total-Lagrangian method, deduces separately the nonlinear finite element formulations of physical nonlinearity and geometric nonlinearity and their coupling. On the basis of having emphatically analysed the application of geometric large-deformation elastoplastic finite element on spherical pressure container, according to the load distributive regularity and character of the structure at the state of elastoplasticity, this paper put forward that plastic failure criterion should be regarded as the basis of engineering structure design. Analysis shows that the calculating results and the test outcomes are in agreement in the main and that it provide a relatively reliable basis for the design, selecting material, and test of pressure container.

KEY WORDS nonlinear FEM, elastoplasticity, large-deformation elastoplasticity, pressure container design.

This series of science and technology reports is published by China Academy of Engineering Physics (CAEP) and issued worldwide to expand domestic and international exchanges of science and technology. Permission is granted to quote from the reports for nonprofit use. Contributors include those from CAEP and those who do research in CAEP. Reports in this series are divided into 7 catalogues:

MCSP— Mechanics and Condensed State Physics

NPPP— Nuclear Physics and Plasma Physics

EMS— Engineering and Material Science

EPE— Electronics and Photoelectronics

CCE— Chemistry and Chemical Engineering

CCM— Computer and Computational Mathematics

OT— Other

Available to the public from the High Power Laser and Particle Beams Magazine Corporation, P.O.Box 511-5, Chengdu, China, 610003