怎样学好极限

内蒙古人民出版社

怎样学好极限

陈广荣

内蒙古人民出版社

1985年·呼和浩特

怎样学好极限

陈 广 荣

*

内蒙古人民出版社出版

（呼和浩特市新城西街82号）

内蒙古新华书店发行　　通辽教育印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：12.5字数：264千

1985年12月第一版　1986年2月第1次印刷

印数：1—3,400册

统一书号：　7089·371　　每册：1.55元

前　言

极限不仅是中学数学课程中的难点之一，也是高等数学课程中的重点和难点。而极限又是学习微积分的基础。由于极限本身既包含极限的过程，又包含极限的结果。同时，极限也是人们从有限认识无限、从近似认识精确的一种新的数学方法。因此，在学习这部分内容的时候，有许多人感到困难，迫切希望有一种比较深入地阐述极限的概念和基本理论以及求极限的方法的一本书。《怎样学好极限》这本小册子，就是为了帮助解决上述要求而编写的。具体内容有数列的极限、函数的极限、函数的连续性以及极限的应用。本书可供大、中学师生，在教与学极限教材时作为参考读物，也可作为青年自学的辅助性自学读物。

作　者

于内蒙古师范大学数学系

1984年3月

目　录

第一章　数列极限

第一章　数列极限

§1.怎样认识和学习极限

1. 怎样认识极限

极限是变量数学中基本概念之一。它是人们在研究自然现象和生产过程中，所遇到的各种变量中有一些变量在它的无限变化的过程中，能够趋向于某个确定的常量。也可以说，极限是描述变量在无限变化过程中变化趋势的一种新方法。极限也是人们从有限去认识无限，从近似去认识精确，从量变认识质变的一种数学方法。因此，我们说极限的出现是科学技术和数学向前发展的重要标志。每个读者必须充分认识到极限在现代数学中的重要地位。

（1）**从微积分的历史发展来认识极限**。我们知道微积分是近代自然科学和工程技术中应用最广泛的一种数学工具。而极限又是微积分的理论基础。因此，要想掌握好现代的科学技术，首先要学习好极限理论。

当我们回忆微积分发展的历史，不能不提到十七世纪随着生产力和科学技术的发展，牛顿和莱布尼兹两人在总结前人经验的基础上，创立了微积分。在这门新的科学刚被发现的时期，它以解决大量的实际问题而被大家所重视。但是，正当人们欢呼它的成功的时候　也发现微积分还存在着许多

严重的问题。对这些问题牛顿和莱布尼兹两人以及其它数学家当时都不能得到正确的解决。尤其是它的理论基础更显得那样的不完善。这主要表现在一方面推导一些定理和公式的时候，出现了在逻辑上前后矛盾。使人们发生很多可疑的问题。另一方面，由于微积分这样推导出来的结论却都是正确无误的。这样使人们不好理解。即微积分从诞生后发展到“神密”时期，而这种神密性集中表现在对待无穷小量上。微积分的创始人之一的牛顿，他是怎样对待无穷小量的呢？他第一步把无穷小量看成是非零的，从而可以当作分母进行分式运算。第二步，他又把这个无穷小量看成是零，在式子中凡包含无穷小量的项全部丢去。把上面的事情，用马克思的话说，第二步是牛顿对无穷小量进行了“镇压”。而只有通过这样的两步得到的结论才是正确的。为什么这样呢？当时的牛顿本人也是说不清楚的。

又经过一百多年，人们在积累起来的大量成果的基础上，进行一系列的分析加工，从而产生了极限理论。如哥西在《分析教程》中，就开始有了极限概念的明确定义。并且哥西以极限理论为基础对微积分进行了系统的推导工作。这样微积分有了严格的理论基础。从而消除了在逻辑上前后矛盾，脱去了微积分长期带来的神秘外衣。实际上，无穷小量在极限理论中不过是以零为极限的变量外，没有其它的特殊性质。这样，有了极限理论之后，把历史上怎样对待无穷小量的问题也得到正确的解决。

（2）**从初等数学的发展来认识极限**。在中学里学习的几何、代数和三角等，它们通常称为初等数学，当我们对初等数学中有些问题进行比较深入一点的研究时，就不可避免地

要涉及到极限理论。而且只有利用极限方法才能得到圆满的结果。为此，我们举几个例子来说明这个问题。

例1 无穷递减等比级数求和时，必须用到极限理论。

设已给数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…，则我们把

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \qquad (A_1)$$

称为无穷级数。而把(A_1)的前n项和记作：

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

当n无限增大时，若数列$\{S_n\}$有极限存在，则称无穷级数(A_1)有和，并且称此极限（记此极限为S）是无穷级数(A_1)的和，记作

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

而无穷级数中简单而最使用的一类是无穷递减等比级数：

$$a+aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^{n-1}+\cdots \qquad (|q|<1)$$

的求和问题。它的前n项和为

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$
$$=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当n无限增大时，我们知道S_n是趋向于某个确定的常数S。如果用极限符号写出来就有表达式

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}. \qquad (A_2)$$

根据前面的说明，这时记作

$$S=a+aq+aq^2+aq^3+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-q}.$$

从表达式(A_1)求出表达式(A_2)时，必须用到极限理论

例2 在代数中，把有理数的指数推广到无理数时，必须用到极限理论。

在代数中，指数概念的建立是第一步是有理数的指数定义为：设$a>0$，则

正指数幂的定义：$a^n = a\cdot\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{n个}$。　　（$n$为自然数）

零指数幂的定义：$a^0 = 1$。

负指数幂的定义：$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$。　　（$n>0$）

分指数幂的定义：$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$。　　（$m>0$）

这样有理数为指数的$a^{\frac{n}{m}}$都有意义了。第二步要想把指数为$a^{\frac{n}{m}}$的情况推广到无理数α为指数的a^{α}，就必须用到极限理论。因为无理数的计算要用有理数列来逼近。如果要问$a^{\sqrt{2}}$代表什么数？首先就得问$\sqrt{2}$怎样用有理数列来逼近的。即我们知道：

$$1.4，1.41，1.414，1.4142，\cdots$$

逐步逼近$\sqrt{2}$。与此相应的有

$$a^{1.4}，a^{1.14}，a^{1.414}，a^{1.4142}，\cdots$$

这个数列是否逼近$a^{\sqrt{2}}$呢？如果是这样，那么指数函数$y = a^x$的定义域为全体实数，而值域为所有正实数。这一系列问题的解决只有建立起极限理论后才能加以证明。

另外，还有众所周知的求圆周率π和圆面积都需要有极限理论才能得到彻底的解决。以上充分说明初等数学的发展也需要极限理论，没有极限理论，进一步研究初等数学是有困难的。

（3）**从阿希里追不上乌龟来认识极限方法.** 在古希腊的时候，曾有哲学家芝诺提出过著名的阿希里追不上乌龟的学说。据说阿希里是神话中善走如飞的勇士。而乌龟是爬得非常慢的。但是，这个疑难是说跑得怎样快的阿希里也追不上爬得怎样慢的乌龟。其具体理由是先叫乌龟站在阿希里前面一段路程，然后，乌龟和阿希里同时开始赛跑。阿希里先跑完乌龟最初的位置。但是，在这段时间内，乌龟又向前爬了一小段距离，于是阿希里再跑完这一小段距离。而当阿希里跑完这一小段距离的时候，乌龟又向前爬行了一小段距离。于是阿希里再跑完这小段距离，这个时间内乌龟又向前爬了更小的一段距离，于是阿希里又要跑完这更小的一段距离。……。这样推理下去，就得出阿希里只能无限接近乌龟，而决不能追上乌龟。显然，根据我们生活中的常识可以知道，这是一种诡辩。但是，没有极限理论要想得到正确的说明和认识都是很困难的事。这就是古代三大著名的疑难问题之一。下面我们利用极限理论来计算它的时候就是很容易的事情了。

设阿希里赛跑的速度是乌龟赛跑速度的10倍。并且设先让乌龟走出100米时，阿希里开始追乌龟。根据题意当阿希里跑完100米时，乌龟向前爬行10米，当阿希里跑完这10米时，乌龟又向前爬行1米，…。这样继续下去，好象乌龟永远在阿希里前面。实际上乌龟爬行的米数S为：

$$S=100+10+1+0.1+\cdots$$

它的前n项和为$S_n=100\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)$

$$=100\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right).$$

所以求极限为

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(100\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right)\right).$$

$$=111\frac{1}{9}\text{（米）}.$$

这个结果表明，虽然被加项是无限多个，但它的总和还是有限数$111\frac{1}{9}$米。阿希里正是在$111\frac{1}{9}$米处追上乌龟。如果比赛继续下去的话，阿希里就超过乌龟。这个例子也充分说明极限的重要意义。只有充分认识极限的方法才能更好的认识世界。

2。怎样才能学好极限

学习极限理论是科学技术发展的必然结果。而且极限概念以及它的理论都比中学数学中的概念和它们的理论，要深一些，难一点，因此，需要花费一定的功夫才能学好。

除了舍得花时间外，要想达到化难为易，事半功倍，逐步提高学习效率，就必须注意学习方法，提高学习数学的浓厚兴趣。为此，在学习极限理论中应当注意些什么？才能少走弯路，达到予期的目的。我们为读者提供几点作为学习极限的参考。

（1）**学习极限理论必须注重对基本概念的加深理解**．由于极限研究的对象是变量的无限变化趋势的学说．因此，要想理解好极限的基本概念，就必须从运动、变化的角度来认识和学习．看看这些基本概念是从哪些具体问题中经过数学抽象而抽象出来的．而且只有这样理解才是正确的，那样理解就不正确．最后达到准确的掌握这些基本概念．尤其是极限的定义，它是本书的关键，也是难点和重点．而这个极限定义是经过千锤百炼的，也是最科学的论述方法．要想对基本概念加深理解，当然要认真思索，返复推敲，下一番功夫．

如果学习完这本书以后，对什么是极限这个问题能准确无误的作出回答时，就够得上对极限这个概念已经掌握了．

（2）**要注意极限的基本性质和它的四则运算**．由于极限的基本性质和它的四则运算都是证明极限问题和求极限运算的根本依据．因此，必须要牢记它们，而且在应用中特别注意这些性质和运算在什么条件下成立，而在什么条件下它们是不成立的．若不这样，就会出现这样或那样的错误，那么，怎样才能避免或少出错误呢？这是需要认真研究的问题．

（3）**分析好典型的极限问题，掌握解题思路和技巧，这又是学好极限的另一个关键所在**．在研究比较复杂一点的数列极限问题时，通常要分两步来考虑：

① 所给的数列是否存在极限？即极限问题的存在性，对这类问题往往需要严格的证明．因此，有时也称这类问题为证明题．

② 若所给的数列有极限，那么怎样把这个极限求出来呢？这就是求极限的方法问题．因为在求极限的过程中需要根据性质和运算进行计算，所以这类问题又称为计算题，这

是极限理论中的两个基本问题．我们根据这两个基本问题，在本书中列举了大量的例题，并在每章后面都有一些习题作为读者的练习题．其中有帮助熟悉基本公式和基本概念的，也有一类是综合性较强或有一定灵活性的题．这一类主要训练解题技巧和综合运用能力。

另外，还有一类证明题，它们主要培养读者的逻辑思维能力．由于求极限的方法很多，我们把主要的方法应很好的掌握。只有这样才能有希望学好极限。

（4）**想学好极限还要广泛的应用极限解决实际问题．经过应用加深对极限理论的理解**．我们知道极限理论的应用是多方面的，除了前三章内讲到的应用外，为了对极限理论加深理解，我们特别增加了第四章．这章内容主要讲导数概念、无穷级数和定积分概念都是各种类型的极限，而这些理论的建立都是以极限理论作为基础．因此，也可以说微分和积分以及无穷级数理论都是极限理论的应用．学习完第四章后，使我们的思路宽广了，同时也了解到学习极限理论的真正的意义和目的主要为学习微积分打下良好的基础．为进一步学习科学技术做好准备。

（5）**要注意数学符号，掌握极限理论中的数学语言**．我们知道，学习每一门学科都有自己的独特语言．而它的概念，定理和证明总要使用一定的语言来表达，特别是极限更需要通过一些符号、字母去表达，这样，它的表达才能简明、精确，并且也方便．这是数学语言的特点，也是它的优点．但是，它也是抽象的，不好理解和掌握，这也是困难的另一个方面．特别需要强调的是用《ε—N》的说法定义数列极限和用《ε—δ》说法定义函数的极限都是很抽象，但是，它

却是科学的论述方法，我们的任务，就是自觉地尽快地掌握和运用这些语言和符号.

总而言之，怎样学好极限，这个问题，虽然我们说了以上几点．但是，因人而异的每个人都有自己的学习方法．而且各有自己的特点．不可能有统一的最好的学习方法．因此只能根据自己的实际情况，不断地改进自己的学习方法．

§2.数列极限的定义

在极限理论中，数列极限是比较简单的一类，因此，我们自然先从它开始学习极限．本节的主要概念是数列极限的定义．它是全部极限理论中的关键所在.也是重点和难点.因此，要想学好极限理论就必须首先攻破这一关．为此我们用各种不同的角度进行剖析和总结．尽量减少读者可能发生的困难．虽然我们主观上做了一些努力.但是数列极限的《ε—N》的定义法不仅是本节的难点．也是整个微积分的难点．

1.极限的基本思想方法

（1）**古代的极限思想**．我们从历史上，早在两千多年前，在庄子的《天下篇》里引惠施的话说，有“至大无外，至小无内”，“一尺之棰，日取其半，万世不竭”等语．他后一句话的意思是说有一根一尺长的木棒，每天截取它的一半，这样截下去将永远取不完．我们把这个意思写得具体些就有第一天截取木棒的一半，记做$a_1=\frac{1}{2}$（尺），还余下半尺，记作$r_1=\frac{1}{2}$（尺），第二天从第一天剩下的r_1再截取一半，即截取$\frac{1}{2}r_1$