厦门大学数学科学学院

林建华 庄平辉 林应标 编著

高等数学精品课堂

GAODENG SHUXUE JINGPIN KETANG

上册

- 知识能力并举
- 激发学习兴趣
- 优化学习过程
- 培养数学美感

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

高等数学精品课堂

（上　册）

林建华　庄平辉　林应标　编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学精品课堂(上)/林建华,庄平辉,林应标编著.厦门:厦门大学出版社,2005.1
ISBN 7-5615-2309-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.①林…②庄…③林…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 140491 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门大学　邮编:361005)
http://www.xmupress.com
xmup@public.xm.fj.cn
三明地质印刷厂印刷
(地址:三明市富兴路 15 号　邮编:365001)
2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:22
字数:671 千字　印数:1—5 500 册
定价:25.00 元

内容简介

本书是根据全国工科院校高等数学教学大纲的要求编写的，也是编者多年在厦门大学从事高等数学教学和辅导工作的积累和结晶.

全书分上下两册，上册包含函数、极限和连续、导数和微分、一元函数的积分学、向量代数与空间解析几何共四章.每章分四部分：一、精典范例；二、夯实基础；三、拓展能力；四、疑难解析.每一部分都配有知识点链接，精要明晰地对高等数学的重要知识点进行归纳总结，并结合介绍一些数学家的生平.

本书是理工科非数学专业学生学习高等数学的配套教材.书中运用开放互动式的写作方式，注重数学思想方法的介绍，数学思维的训练，数学文化氛围的营造.本书对从事高等数学教学的教师、考研复习的读者都极具参考价值.

前 言

高等数学是理工科本科生必修的重要的基础课，也是教学覆盖面最广的一门课程之一. 在教学改革不断深入的形势下，为适应因材施教、分流培养，促使优秀人才脱颖而出的需要，为加快《高等数学》精品课程的建设步伐，完善该课程的教材体系建设，更好地服务于教学，根据长期的教学实践，我们编写了《高等数学精品课堂》一书. 该书面向理工科学生，旨在全面提高学生的数学修养和素质，力求为学生今后在其各个专业方向的深入发展打下牢固的数学基础. 本书运用开放互动式的写作方式，注重数学思想方法的介绍，数学思维的训练，数学文化氛围的营造，它具有以下一些特点：

1. 强调发散思维，揭示数学的发现. 作为微积分的概念和结论，大都有着广泛具体的实际背景，人的思维活动一般都经历了由具体到抽象，从不严格的发散思维到严格的收敛思维的过程，本书力图遵循认识论的基本规律，尽可能地从几何、物理或它们的直观背景来阐述它们的基本概念、定理、公式，提出问题一分析讨论一猜想结论一一般推广，注意分析、代数、几何的相互渗透，这种安排旨在引导学生对具体事物善于从量的方面进行洞察和研究，启迪他们的思维，有利于培养他们获取知识的能力.

2. 加强综合运用数学知识能力的训练. 本书在选题上，比一些传统教材较深较广，注意增加知识点，综合性较强，有许多训练逻辑推理能力的题目，所选的例题大都是以概念和定义为基础，而不是以计算技巧为基础，并且解法灵活多变，富有启发性. 通过例题的思路点拨、答案的提示，以使学生加深对主要概念的正确理解，总结解题方法，达到复习巩固的目的，并从思维方法和学习能力上得到提高.

3. 本书在充分利用和整合学习资源的前提下着重培养学生的学科实践能力，让学生在角度丰富的练习实践中，在自主合作探究的学习方式中学习运用知识的规律，体现了学科知识工具性与人文性的统一，体现了知识与能力的统一.

4. 本书不仅注重培养与训练学生多方面的基本能力，注重学生学科知识的积累，而且关注学生获取信息与整合信息能力的培养，关注学生思维品质的训练. 在编写中力求做到以少胜多，以精驭繁；知识点的叙述精炼准确，材料的选择精粹简洁，层次的安排精致周全，练习的设计精巧灵活，题型的归纳运用精美生动，思路的点拨精要明晰，体现了活学巧练的编写特色.

本书编写思路与众不同，它博采众长，匠心独运，遵循教、学、练、考的整体原则，注重实效，它融入了众多教师多年的教学经验，栏目设计精美，版式新颖，内容丰富. 精典范例、夯实基础、拓展能力、知识点链接、疑难解析等每一项都是一项知识的巩固增长点.

本书由林建华、庄平辉、林应标编写，许清泉副教授校阅了书稿. 虽然在成书过程中，本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求为读者奉献一本精品的课外读物，但书中仍难免有疏忽和纰漏之处，敬请同行和读者批评指正.

编者　2004.12 于厦门大学

目　录

解答与提示

第一章　函数、极限和连续

1-1 函数的基本知识

成功的花
人们只惊慕她现在的明艳
然而她当初的芽儿
却洒遍了牺牲的血雨
浸透了奋斗的泪泉
——冰心

精典范例

题型 1　求函数的定义域与值域

【例 1】设 $f(x)=\ln\frac{3+x}{3-x}+1$，求 $f(x)+f\left(\frac{3}{x}\right)$的定义域.

思路点拨　先求出已知函数的定义域，再确定所求函数的定义域.

【例 2】已知 $f(x)=e^{\sin x}$，$f[g(x)]=1-2x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$并写出它的定义域.

思路点拨　此例是求复合函数的中间函数及定义域. 应先求出$g(x)$的表达式，再求出函数的定义域.

【例 3】求函数 $y=\frac{1-\sqrt{1-2x}}{1+\sqrt{1-2x}}$的值域.

思路点拨　函数的值域是其反函数的定义域，但本函数含有两个根式，欲求其反函数较复杂，所以应先改写函数，再由函数的单调性求值域.

题型 2　利用函数的概念求解函数的表达式

【例 4】设 $2f(x)-f\left(\frac{x-1}{3x-1}\right)=x$，求 $f(x)$.

思路点拨　作变量代换 $t=\frac{x-1}{3x-1}$，求解联立方程.

【例 5】设 $f(x)$是以正数 a 为周期的周期函数，且已知当 $0<x\leqslant a$

知识点链接

函数的定义域通常指的是使函数有意义的自变量的取值范围.

函数的两要素：
1. 定义域
2. 对应法则

判定两个函数是否相同，只需比较它们的定义域和对应法则，与用什么字母表示函数无关.

函数值的全体所组成的集合称为值域，即$\{y|y=f(x),x\in D\}$其中：D为定义域.

函数的周期 T 是一个非零常数，通常是指最小正周期，但有些函数不一定存在最小正周期.

时，$f(x)=x^3$，试求周期函数 $f(x)$.

思路点拨 利用周期函数的性质 $f(x)=f(x\pm na)$.

题型 3 求复合函数

求复合函数常用的方法：

1. 代入法
2. 分析法

【例 6】已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，计算 $f(g(x))$ 和 $g(f(x))$.

思路点拨 本例是内层、外层函数只有一个为分段函数的复合函数问题，其解法仍用“代入”法，只不过应分段代入！

求复合函数的图示法：

求复合函数也可采用图示法，即先画出中间变量 $u=g(x)$ 的图形，再写出 u 在不同区间段上所对应的变化区间，最后将 u 代入 $y=f(u)$ 中，即得 $y=f[g(x)]$ 的表达式.

【例 7】设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ \lg x, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-\cos x, & x\leqslant 0\\ 1-\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

思路点拨 这是求内层、外层函数均为分段函数的复合函数，它的求解方法仍为“分段代入”.

【例 8】已知函数 $f_1(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$，对于 $n=1,2,3,\cdots$，定义 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$，若 $f_{35}(x)=f_5(x)$，求 $f_{28}(x)$.

思路点拨 利用式子 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$ 和 $f_{35}(x)=f_5(x)$，并注意到 $f^{-1}(f(x))=x$，便可推出 $f_{28}(x)$.

题型 4 求已知函数的反函数的表达式

反函数的求法：

1. 由函数式 $y=f(x)$ 解出 x，$x=\varphi(y)$.
2. 互换 x 与 y 的位置，$y=\varphi(x)=f^{-1}(x)$ 就是所求的反函数. 原函数的值域是反函数的定义域.

含有绝对值的函数本质上是一个分段函数.

【例 9】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1\\ 2e^{x-1}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求反函数 $f^{-1}(x)$.

思路点拨 分段求相应的反函数.

【例 10】求函数 $y=\sin x|\sin x|$（其中 $|x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$）的反函数.

思路点拨 为了便于研究，需去掉绝对值. 于是，必须分为 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$ 与 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 两种情况进行反解，再交换 x 与 y，就可得之.

题型 5 函数特性的判别

【例 11】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对于 $(-\infty,+\infty)$ 中的任意 x、y，有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，证明：$F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

思路点拨 利用单调性定义证明.

【例 12】证明 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

思路点拨 用反证法. 如果 $T\neq 0$ 是 $f(x)$ 的周期，于是可以在式子 $f(T+x)=f(x)$ 中代入特殊的 x 值，找出矛盾.

【例 13】设函数 $y=x-a\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$，其中 a 为满足不等式 $0\leqslant a<1$ 的实数，证明这个函数具有反函数.

思路点拨 只需证明函数 $y=x-a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增.

严格单调函数必具有反函数.

【例 14】函数 $f(x)=xe^{-x^2}(2-\cos x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是否是有界的奇函数或偶函数?

思路点拨 若 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，为判定 $f(x)$ 是否有界，只需检查两个极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 是否都存在.

类似可判定在 $(-\infty,a)$，$(a,+\infty)$ 及 (a,b) 上的连续函数是否有界.

【例 15】证明：$f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

思路点拨 用定义证明. 所谓 $f(x)$ 在区间 I 上无界，就是若对任意给定的 $M>0$，无论它怎么大，都存在 $x_0\in I$，使得 $|f(x_0)|>M$，则说 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

证明函数无界的通常方法：

寻找自变量的点列 $\{x_n\}$，$n=1,2,\cdots$ 使得点列所对应的函数值 $|f(x_n)|\to+\infty$.

【例 16】设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq 0$，使得 $f(x+c)=-f(x)$，证明：$f(x)$ 是周期函数.

思路点拨 证明 $f(x)$ 是周期函数的关键为能否找到常数 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$.

题型 6　初等函数的判别

初等函数的定义：

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和函数复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数统称为初等函数.

【例 17】设 $f(x)=\begin{cases}x\sin x-x^3, & x<0\\ 5x^3, & x\geqslant 0\end{cases}$，问 $f(x)$ 是否为初等函数? 为什么?

思路点拨 将函数 $f(x)$ 表示成 $f(x)=\varphi(x)+\Psi(x)$，其中：

$$\varphi(x)=\begin{cases}x\sin x, & x<0\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases},\ \Psi(x)=\begin{cases}-x^3, & x<0\\ 5x^3, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

利用初等函数的定义，并注意到 $\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，分别将上述两个函数用有限个基本初等函数的四则运算及复合的式子来表达.

夯实基础

1. 试求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}}$；

(2) $f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数；

(3) $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$.

2. 设 $f(x)=|x|$，$g(x)=x^2-x$，则 $f[g(x)]=g[f(x)]$ 成立的范围

是(　　).

(A)$(-\infty,-1]\cup\{0\}$;　　(B)$(-\infty,0]$;

(C)$[0,+\infty)$;　　(D)$[1,+\infty)\cup\{0\}$.

3. 证明定义在$(-\infty,+\infty)$内的任一函数都可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

4. 设函数 $H(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$,试写出函数

$y=2x\left[H(x)-H\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]+2(1-x)\cdot\left[H\left(x-\frac{1}{2}\right)-H(x-1)\right]$的分段函数.

5. 设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$是(　　).

(A)偶函数;　　(B)无界函数;

(C)周期函数;　　(D)单调函数.

6. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是奇函数,且存在反函数 f^{-1},则 f^{-1}为(　　).

(A)奇函数;　　(B)既非奇函数又非偶函数;

(C)偶函数;　　(D)可能是奇函数,也可能是偶函数.

7. 设 $f(x)$与 $g(x)$互为反函数,则 $f\left(\frac{x}{2}\right)$的反函数为(　　).

(A)$g\left(\frac{x}{2}\right)$;　(B)$\frac{1}{2}g(x)$;　(C)$2g(x)$;　(D)$g(2x)$.

8. 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$内的任意函数,则下列函数中,必为偶函数的是(　　).

(A)$|f(x)|$;　　(B)$f^2(x)$;

(C)$f(x)-f(-x)$;　　(D)$f(x)+f(-x)$.

9. 设 $f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,则(　　)为奇函数.

(A)$g(g(x))$;　　(B)$f(f(x))$;

(C)$f(g(x))$;　　(D)$g(f(x))$.

10. 求 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ 的反函数,并指出其定义域.

11. 求函数 $y=\begin{cases}x^2-2x, & -1<x\leqslant 0\\ \ln(1-x), & 0<x<1\end{cases}$ 的反函数.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$,$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$,则 $f[\varphi(x)]$ =________.

13. 已知 $f(e^x)=1+x+\sin x$,则 $f(x)=$________.

14. 设 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$,则 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=$________.

15. 已知函数 $y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,试求复合函数 $y=f(\sin x)$的定义域.

寻找解题的途径是一个创造性的积极思维过程,有效的解题方式有何规律可循呢?

1. **回想**:在审题的基础上,根据问题的条件或结论,回想与问题相关的概念、公式、定理、法则,能否直接应用,问题的常用解法是什么等等.

2. **联想**:从一个数学问题联想到另一个数学问题,寻找一个熟悉的、相似的问题,或找出与题目接近的原理方法,变通使用这些知识,寻找突破口.

3. **猜想**:对所解问题的变化方向进行试探性的判断.

16. 已知 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 和它的定义域.

17. 设 $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=2f(x)+x$，求 $f(x)$.

18. 设 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$，求 $f(f(x))$ 及 $f\left(\dfrac{1}{f(x)+1}\right)$ 的表达式和定义域.

19. 设 $f(x)$ 满足条件 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$（$a$ 为常数），且 $f(0)=0$，证明：$f(x)$ 是奇函数.

20. 求周期函数 $f(x)=[x]-3\left[\dfrac{x}{3}\right]$ 的周期.

21. 作出以下函数的图形：

(1) $|x-1|+|y-1|=1$；

(2) $y=\sin x^2$.

拓展能力

1. 设 $y=f(x)$ 的定义区间为 $(0,1)$，求下列函数的定义域：

(1) $f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$；　　(2) $f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f(\log_2 x)$.

2. 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1-x^2, & x<0\end{cases}$ 的反函数.

3. 已知 $f^{-1}(\log_a x)=x^2+1$，求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)+f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=2x$，其中 $x\neq 0, x\neq 1$，求 $f(x)$.

5. 设 $f(x)$ 满足关系式 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$（$a$、$b$、$c$ 为常数），且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$.

6. 设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+x^2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x+1}$，则 $f(x)=$ ________.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于（　　）.

(A) 0　　(B) 1

(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

8. 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且当 $y=1$ 时，$z=x$，试求 $f(x)$ 及 z 的表达式.

9. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x^2}, & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\ln x$，求复合函数 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 的解析式.

10. 求 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$，若：

高等数学中经常遇到取整运算. 我们用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，它有以下基本性质：

1. $x=[x]+r$，其中 $0\leqslant r<1$；
2. $[x]\leqslant x<[x]+1$；
3. $x-1<[x]\leqslant x$；
4. $[x+y]\geqslant[x]+[y]$；
5. $[n+x]=n+[x]$.

其中 n 为整数，以上 2、3、4 式中等号当且仅当 x 为整数时成立.

(1) $f(x)=ax+b, x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1)$.

11. 若对任意的实数 x、y，有 $|f(x)-f(y)|=|x-y|$，且 $f(0)=0$. 证明：

(1) $f(x)f(y)=xy$;　　(2) $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

12. 设 φ、ϕ 及 f 对一切实数有定义，且都是单调增加函数. 证明：如果 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \phi(x)$，则有 $\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant \phi[\phi(x)]$.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x<0\\ 0, & x=0\\ x-\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，求 $\varphi(x)$，使 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

14. 设函数 $f(x)$ 为奇函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2^x+x-1$，求当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的表达式.

15. 设函数 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数，且在 $(0,1]$ 上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left(0,\dfrac{2}{3}\right]\\ -x, & x\in\left(\dfrac{2}{3},1\right]\end{cases}$，试求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的表达式.

16. 若存在两个实数 a、b $(a<b)$，对任意 x，函数 $f(x)$ 满足 $f(a-x)=f(a+x)$ 及 $f(b-x)=f(b+x)$，试证：$f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

17. 已知周期函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上满足：$f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，求函数 $f(x)$ 的周期.

18. 设 $f(x)$ 为奇函数，$f(1)=a$，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+2)=f(x)+f(2)$，

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

(2) 若 $f(x)$ 以 $T=2$ 为周期，求常数 a.

19. 证明 $f(x)=x+\sin x$ 不是周期函数.

20. 试说明 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 是一个初等函数.

21. 作出以下函数的图形：

(1) $y=|x-2|+|x^2-1|$;

(2) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

1-2 函数的极限

> 数学也是一种语言，从它的结构和内容上看，这是一种比任何国家的语言都要完善的语言．实际上，数学是语言的语言，通过数学，自然界在论述；通过数学，世界的创造者在表达．
>
> ——第尔曼

精典范例

题型 1 利用初等变形和法则求极限

【例 1】求数列 $a_n=\frac{1}{p}+\frac{2}{p^2}+\cdots+\frac{n}{p^n}$ 的极限.

思路点拨 由 a_n-pa_n 的表达式求出 a_n 的表达式，进而再求 $\{a_n\}$ 的极限.

【例 2】极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi\sqrt{n^2+n}=$________.

思路点拨 利用 $\pi\sqrt{n^2+n}=n\pi+(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)$ 和三角函数的诱导公式以及有理化手段.

【例 3】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2})$.

思路点拨 先作倒代换 $x=t^{-1}$，再进行有理化，最后求其极限.

【例 4】计算 $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$.

思路点拨 可分别作 $t=\arccos x$ 和 $u=t-\pi$ 两次变换.

【例 5】求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

思路点拨 对于无穷多个因子之积，应先求积，再求极限.

【例 6】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\sqrt{1-\cos^2x}}{x}+\frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right]$.

思路点拨 用单侧极限判别法讨论.

【例 7】$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x-1}=$________.

思路点拨 利用函数极限存在的充要条件：“$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$”求之.

【例 8】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x^{2n-1}+ax^2+\beta x}{x^{2n}+1}\right)$，其中 n 为正整数，确定

知识点链接

数列是一类特殊的函数 $a_n=f(n)$，因此数列的极限只是函数极限的特例.

利用因式分解、有理化、三角变形、变量代换等手段，消去极限式中的零因子，将不定型的极限化为确定型的极限来计算是求极限的最基本的方法.

带根式的极限计算，通常采用有理化的方法。当 $x\to x_0$ 时，通常可以作变换 $x-x_0=t$，转化为 $t\to0$；当 $x\to\infty$ 时，可作倒代换 $t=\frac{1}{x}$，化为 $t\to0$，变成我们所熟悉的形式.

函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在的充要条件：

左右极限存在且相等，即 $f(x_0+0)=f(x_0-0)$.

常数 α、β，使 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ 都存在.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 这是一种含参量的极限计算. 通常参数 x 的不同取值对极限是有影响的. 因此首先要根据 x 的不同取值，通过极限求出 $f(x)$ 的表达式.

【例 9】确定常数 λ、μ，使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x+\mu)=0$.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 利用极限运算法则.

【例 10】证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x^2$ 不存在.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 用海涅定理："若 $\exists x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 不存在或 $\exists\{x_n\}$、$\{y_n\}$，$x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0)$，$y_n\to x_0\,(y_n\neq x_0)$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在."

【例 11】设 $x_n=\dfrac{2+(-1)^n}{3+(-1)^{n-1}}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 用"若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}\neq\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在"的结论来证明.

证明数列 $\{x_n\}$ 极限不存在的两种方法：
1. 找出 $\{x_n\}$ 的一个发散的子列；
2. 找出 $\{x_n\}$ 的两个有不同极限的子列.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在的充要条件是：$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}$ 均存在且相等.

题型 2　利用单调有界准则求极限

【例 12】设 a_1、a_2 为已知常数，且 $a_n=\dfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})\,(n>2)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 通过递推求出数列的通项，然后再求极限.

【例 13】设 $x_1=1$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求之.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 利用"单调有界必有极限"的结论证明极限存在.

【例 14】设 $x_1=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 假定数列极限存在并设为 a，由递归关系式求出数列的极限 a，再由 $|x_n-a|=\dfrac{|a-x_{n-1}|}{(1+x_{n-1})(1+a)}\leqslant\dfrac{|x_{n-1}-a|}{1+a}\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{|x_1-a|}{(1+a)^{n-1}}$，利用夹逼定理来证明极限为 a.

递归数列 $\{x_n\}$ 极限问题的常用求法有：
1. 利用数学归纳法证明 $\{x_n\}$ 单调有界；
2. 通过递推归纳出 $\{x_n\}$ 的通项，再求通项的极限.

例 14 的数列不是单调的，通常假定所求极限为 a，进而导出 $|x_n-a|$ 的递推关系式，再由夹逼定理证明极限为 a. 这也是一种十分有效的求极限方法.

题型 3　利用两个重要极限公式求极限

【例 15】求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 作变换 $\tan x=1+t$，再利用重要极限公式.

【例 16】求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+3x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$\boxed{\text{思路点拨}}$ 利用重要极限公式.

重要的极限公式：
(1) $\varphi(x)$ 是 $x\to 0$ 时的无穷小，则
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，
$\lim\limits_{x\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

【例 17】计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

思路点拨 因为 $(\sin x)^{\tan x}=\left\{[1+(\sin x-1)]^{\frac{1}{\sin x-1}}\right\}^{(\sin x-1)\tan x}$，再利用重要极限公式.

【例 18】$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=1$，求 a、b.

思路点拨 利用重要极限公式.

【例 19】设 $u_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2(1+2+\cdots+k)}\right)^n$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

思路点拨 先求出括号内的和，再利用重要极限公式.

题型 4　利用等价无穷小代换求极限

【例 20】计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin2x}-e^{2\sin x}}{\tan^2x\ln(1+x)}$.

思路点拨 当 $x\to0$ 时，利用 $\tan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(e^{\sin2x-2\sin x}-1)\sim\sin2x-2\sin x$ 的无穷小代换.

【例 21】计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{x^3+5x^2+x}$.

思路点拨 有理化原式，然后再利用无穷小代换.

【例 22】计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2x}$.

思路点拨 利用 $\dfrac{(3+2\sin x)^x-3^x}{\tan^2x}\sim3^x\dfrac{e^{x\ln(1+\frac{2}{3}\sin x)}-1}{x^2}$.

【例 23】已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=\dfrac{1}{2}(a>0,a\neq1)$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

思路点拨 利用极限无穷小的关系 $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=\dfrac{1}{2}+\alpha$，当 $x\to0$ 时，$\alpha\to0$，$a^x-1\sim x\ln a$，从而 $\dfrac{f(x)}{\sin x}\sim\dfrac{1}{2}x\ln a$.

【例 24】证明 $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}=\dfrac{x^3}{4}+o(x^3)(x\to0)$.

思路点拨 只需证明 $\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}-\dfrac{x^3}{4}}{x^3}\to0$（当 $x\to0$ 时）.

【例 25】已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{f(x)}{\sin x}}-1}{x(e^x-1)}=A(A\neq0)$，求 c 及 k，使 $f(x)\sim cx^k$ $(k>1)$.

思路点拨 利用等价无穷小代换.

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=B$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)^{g(x)}=A^B$.

(3) 若 $\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=A$，且 $\lim\varphi(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$.

若还有 $A\neq0$，且 $\lim f(x)=0$，则 $\lim\varphi(x)$ 必为 0.

常用的等价无穷小：

当 $x\to0$ 时，

$\sin x\sim x$

$\tan x\sim x$

$\arcsin x\sim x$

$\arctan x\sim x$

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$e^x-1\sim x$

$\ln(1+x)\sim x$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

当 $x\to\Delta$（x_0 或 ∞）时，有 $\varphi(x)\to0$，则将上面的 x 全部换成 $\varphi(x)$，等价式子仍然成立. 如：

$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$

$1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{1}{2}\varphi^2(x)$

$(1+\varphi(x))^\alpha-1\sim\alpha\varphi(x)$

若 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha(x)$ 其中 $\alpha(x)\to0(x\to\Delta)$

本例由条件可导出 $\dfrac{f(x)}{\sin x}\to0$（当 $x\to0$ 时）.