JS

全面剖析命题规律　准确预测命题方向

冲刺

全国高中数学联赛

《数学竞赛之窗》编辑部 组编

王卫华 吴伟朝 主编

浙江大学出版社

《冲刺全国高中数学联赛》编委名单

《数学竞赛之窗》编辑部　组编

主　编　王卫华　吴伟朝

副主编　虞金龙　黄志军

编　委　李庆胜　薛党鹏　许康华　王慧兴

江厚利　唐作明　田彦武　黎金传

《数学竞赛之窗》专家指导委员会

苏　淳(中国科技大学教授、博导)

许以超(中科院数学研究所研究员)

夏兴国(河南师范大学教授)

陶平生(江西科技师范学院教授)

林　常(福建教育学院教授)

吴伟朝(广州大学教授)

李健贤(香港科技大学教授)

萧振纲(湖南理工学院教授)

王卫华(《数学竞赛之窗》执行主编)

编写说明

全国高中数学联赛于每年10月的第二个星期天举行，其目的是提高学生学习数学的兴趣，发现和培养人才，并为国际数学奥林匹克竞赛选拔选手.

许多读者在参加全国高中数学联赛前夕，都会碰到这样的问题：如何进行联赛复习，选择什么书来看，找一些什么样的题目来做，哪些知识是联赛中重点考查的，哪些数学思想方法是联赛命题者比较青睐的，等等.

为了更有效地提高读者的联赛复习效果，解决读者的这些疑惑，《数学竞赛之窗》编辑部特别邀请了全国各地在数学竞赛辅导一线的教练员和多次参加各级各类竞争命题的专家编写了本书.

全书的编写按照全国联赛的考查情况分类讲解.每章分三个部分，一是近几年联赛考查情况的分析和预测，二是针对训练，三是针对训练题的详细答案.

最后本书还配备了六份模拟试题，这些模拟试题中有的选自各种竞赛，更多的来源于几位编写者自己编制的新题.

本书的编写过程中，得到《数学竞赛之窗》杂志编委老师的大力支持，他们提出了很多富有建设性、针对性的建议.更需要感谢的是《数学竞赛之窗》杂志的专家指导委员会决定开设一个热线，解答广大读者有关全国高中数学联赛的问题.热线电话是：0512－66297080，也可通过电子邮件联系我们，信箱是：sxjszcbjb@163.com，同时也欢迎大家登陆数学竞赛之窗网站(http://www.sxjszc.com)给我们提出宝贵意见.我们将综合大家的建议，再版时作出修订，力求使本书更适合联赛实际，更具有冲刺辅导的针对性.

编者

2005年10月于杭州

目　　录

第一部分　全国高中数学联赛(一试)

第二部分　全国高中数学联赛(加试)

第三部分　全国高中数学联赛(模拟试题)

第一部分　全国高中数学联赛(一试)

第一章　集合和函数

【考情报告】

题号	考查情况
1997.二、1.	函数与方程问题,考查三次函数的单调性的应用.
1997.二、6.	涉及对数函数的复合最值问题,考查常用对数的运算法则,均值不等式的应用以及代数变形的技巧.
1998.一、1.	对数运算与求值问题,考查常用对数的运算法则及整体求值的思想.
1998.一、2.	集合的概念及运算问题,考查交集、子集的概念及数形结合的思想.
1998.一、4.	充要条件的判定问题,考查一元二次不等式的解集.
1998.二、1.	函数值的比较大小问题,考查函数的奇偶性和幂函数的单调性.
1998.四	函数与方程、不等式的综合问题,考查二次函数的最值,一元二次方程的根及数形结合、分类讨论的思想.
1999.一、3.	函数与不等式问题,考查对数的概念,涉及指数函数的函数单调性及应用.
1999.一、4.	命题真假的判定问题,考查异面直线的有关概念.
2000.一、1.	集合与方程、不等式问题,考查方程与不等式的解法、集合的概念及运算.
2000.四	二次函数综合问题,考查分类讨论的思想及综合运用二次函数的单调性、最值等知识解决问题的能力.
2001.一、1.	集合与方程问题,考查根的判别式及子集个数的求法.
2001.一、2.	命题真假的判定问题,考查立体几何中的距离概念.
2001.二、11.	无理函数值域问题,考查用反函数法求值域及等价转化的思想.
2002.一、1.	复合函数单调性问题,考查由二次函数,对数函数复合而成的函数单调区间的求法.
2002.一、3.	函数奇偶性问题,考查函数奇偶性的判定方法及恒等变形的能力.
2002.二、10.	抽象函数的求值问题,考查抽象函数的周期性和赋值法.
2002.二、11.	二元函数最值问题,考查对数函数的定义域、运算法则、换元法及用判别式法求最值.

续表

题号	考查情况
2002.三,15.	函数与不等式综合问题,考查二次函数的对称性、不等式的解法和性质及综合运用知识解决问题的能力.
2003.一,5.	二元分式函数最值问题,考查均值不等式的应用和等价转化的能力.
2003.二,9.	集合与不等式问题,考查集合子集的概念、解不等式及数形结合的思想.
2003.二,10.	对数与整数问题,考查指数与对数的互化,整数的性质及方程的思想.
2004.一,2.	集合与解析几何综合问题,考查集合交集的意义及数形结合的思想.
2004.二,8.	函数方程问题,考查换元法与赋值法.
2004.三,15.	函数与方程、不等式综合问题,考查利用函数单调性确定最值、不等式的证明及综合运用知识解决问题的能力.
2005.一,1.	函数的最值,应用基本不等式求函数的最值.
2005.二,8.	函数的性质,考查函数的单调性.
2005.三,6.	以集合为背景,考查数的进位制等知识.

【趋势预测】

从近八年的全国联赛一试试题来看,集合和函数是每年必考的一个重点、热点内容,主要涉及:集合的概念和运算问题;命题的四种形式及充要条件的判定问题;与函数的单调性、奇偶性、周期性、对称性、最值等有关的问题;含参数的函数的讨论问题;以基本函数为载体的综合题.

在考查形式上,集合与简易逻辑问题常在难度不大的选择题、填空题中出现,主要考查集合语言和集合思想的运用、命题的真假及充要条件的判定等;函数题在选择题、填空题、解答题中都有,重点考查缜密的逻辑推理能力、基本运算能力和综合运用相关知识解决问题的能力,考查等价转化、函数与方程、分类讨论、数形结合等数学思想方法.

根据历年考查的情况分析,预计今后的联赛中对集合和函数问题的考查将呈现出以下特点:

由于集合与简易逻辑的基础性和工具性作用,联赛更注重考查对基本概念的透彻理解、基本原理的准确把握及与其他知识的密切联系,一般以难度中等的选择题、填空题的形式出现,要注意新增内容简易逻辑可能在解答题中与方程或不等式等知识相综合的问题;鉴于函数是高中数学中极为重要的内容,其观点和方法贯穿高中代数的全过程,同时应用于几何问题的解决,联赛将对函数问题进行重点考查,以考查反函数的概念、函数的最值、

函数的单调性、奇偶性和周期性等性质为主，以能力立意为命题方向，以函数的解析式为基本载体，在选择题、填空题、解答题中全面考查，随着新课程的实施，函数试题更加关注知识的整体性和综合性，关注新增内容与传统内容的整合，将在知识网络的交汇点处命题，函数与方程、不等式、三角、数列、解几、平面向量、导数等知识交汇的综合题，考查力度会有所加大，对思维能力的要求会更高.

【针对模拟】

一、选择题

1. 已知 $x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}^{+}$, $A=\{x^2+x+1,-x,-x-1\}$, $B=\{-y,-\frac{y}{2},y+1\}$，若 $A=B$，则 x^2+y^2 的值是　(　　)

(A)4　　(B)5　　(C)10　　(D)25

2. 设对每个实数 x，$f(x)$ 的值取 $x,6-x,2x+15$ 中的最小值，则 $f(x)$ 的最大值是　(　　)

(A)4　　(B)9　　(C)16　　(D)25

3. 向量集合 $M=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(-1,1)+x(1,2),x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{\boldsymbol{a}\mid\boldsymbol{a}=(1,-2)+x(2,3),x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$　(　　)

(A)$\{(1,-2)\}$　　(B)$\{(-13,-23)\}$　　(C)$\{(-1,1)\}$　　(D)$\{(-23,-13)\}$

4. 与函数 $y=f(x-a)+b$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称的图像所对应的函数是　(　　)

(A)$y=f^{-1}(x-a)+b$　　(B)$y=f^{-1}(x+a)-b$

(C)$y=f^{-1}(x-b)+a$　　(D)$y=f^{-1}(x-b)-a$

5. 已知集合 $M=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant a\}$，$P=\{y\mid y=2x+3,x\in M\}$，$T=\{z\mid z=x^2,x\in M\}$ 且 $T\subseteq P$，则实数 a 的取值范围是　(　　)

(A)$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant3$　　(B)$-2<a\leqslant3$

(C)$2\leqslant a\leqslant3$　　(D)$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant2$

6. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$（其中 a、b、c 为整数），有 4 个学生计算函数值，甲得到：$f(7)=-1$；乙得到：$f(1)=3$；丙得到：$f(4)=-4$；丁得到：$f(2)=4$. 其中有且仅有 1 个学生计算错误，则计算错误的学生是　(　　)

(A)甲　　(B)乙　　(C)丙　　(D)丁

7. 已知 $M=\{(x,y)\mid x^2+2y^2=3\}$，$N=\{(x,y)\mid y=mx+b\}$. 若对于所有 $m\in\mathbf{R}$，均有 $M\cap N\neq\varnothing$，则 b 的取值范围是　(　　)

(A)$\left[-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$　　(B)$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

(C)$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$　　(D)$\left[-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

8. 设 $f(x)$ 是定义在实数集上的函数，且满足 $f(10+x)=f(10-x)$，$f(20-x)=-f(20+x)$，则 $f(x)$ 是　　(　　)

(A) 偶函数，又是周期函数　　(B) 偶函数，但不是周期函数

(C) 奇函数，又是周期函数　　(D) 奇函数，但不是周期函数

9. 函数 $\varphi(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$（其中 $a>b>c>d$，且 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{R}$）的最小值为　　(　　)

(A) $a+b+c+d$　　(B) $a+b+c-d$

(C) $a+b-c-d$　　(D) $a-b-c-d$

10. 已知 $a\in(0,1)$ 的常数，$|x|+|y|\leqslant 1$，函数 $f(x,y)=ax+y$ 的最大值为　　(　　)

(A) a　　(B) 1　　(C) $a+1$　　(D) $\frac{1}{2}(a+1)$

11. 若函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(x+2)=f(x)$，且 $x\in(-1,1]$ 时，$f(x)=|x|$，则函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $y=\log_4|x|$ 的图像的交点个数为　　(　　)

(A) 3　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

12. 集合 $A=\{x\mid x^{2a}+a^{2x}+\log_a^2x+3\leqslant 2(x^a+a^x+\log_a x),a>0,a\neq 1\}$ 中元素的个数为　　(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 无穷多个

13. 函数 $f(x)=\sqrt{\frac{1}{2}-x}+\sqrt{x-\frac{1}{3}}$ 的最大值为 a，最小值为 b，则 $a+b$ 的值是　　(　　)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{6}(3+\sqrt{3})$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{2})$　　(C) $\frac{\sqrt{3}}{6}(3+\sqrt{2})$　　(D) $\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{3})$

14. 设集合 $M=\{(x,y,z)\mid x^3+y^4=z^5,x,y,z\in\mathbf{N}^*\}$，则 M 是　　(　　)

(A) 有限集　　(B) 无限集

(C) 空集　　(D) M 的元素不超过 60 个

15. 已知 x,y 都在区间 $(-2,2)$ 内，且 $xy=-1$，则函数 $u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9}{9-y^2}$ 的最小值是　　(　　)

(A) $\frac{8}{5}$　　(B) $\frac{24}{11}$　　(C) $\frac{12}{7}$　　(D) $\frac{12}{5}$

16. 函数 f 定义在正整数有序对的集合上，并满足 $f(x,x)=x$，$f(x,y)=f(y,x)$，$(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$，则 $f(14,52)$ 的值为　　(　　)

(A) 91　　(B) 182　　(C) 364　　(D) 无法计算

17. 方程 $x^2+x-1=x\cdot\pi^{x^2-1}+(x^2-1)\cdot\pi^x$ 的解集为 A（其中 $\pi=3.141\cdots$，x 为实数），则 A 中所有元素的平方和等于　　(　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

18. 已知函数① $y=x+\frac{4}{x}(x\neq 0)$；② $y=\frac{1}{3}(x^2+8x+\frac{8}{x^3})$；③ $y=\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+5}}(x\in\mathbf{R})$；$y=(1+\cot x)(\frac{1}{2}+2\tan x)(0<x<\frac{\pi}{2})$，其中以 4 为最小值的函数的个数是　(　　)

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

19. 已知 $f(x)=\frac{1+x}{1-3x}$，$f_1(x)=f[f(x)]$，$f_2(x)=f[f_1(x)]$，$\cdots$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)]$，则 $f_{2004}(-2)=$　(　　)

(A) $-\frac{1}{7}$　　(B) $\frac{1}{7}$　　(C) $-\frac{3}{5}$　　(D)3

20. 已知集合 M 是满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体：

(1)当 $x\in[0,+\infty)$ 时，函数值为非负实数；

(2)对任意 $s,t\in[0,+\infty)$，都有 $f(s)+f(t)\leqslant f(s+t)$.

在函数 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=2^x-1$，$f_3(x)=\ln(x+1)$ 中，属 M 的有　(　　)

(A) $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$　　(B) $f_1(x)$ 和 $f_3(x)$

(C) $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$　　(D) $f_1(x)$，$f_2(x)$ 和 $f_3(x)$

21. 令 $f(x)=4x-x^2$，给定 x_0，考察由 $x_n=f(x_{n-1})$ 定义的数列，其中使数列 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 只取有限个不同数值的实数 x_0 的值有　(　　)

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)无限多个

22. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，α,β 是方程 $f(x)=x$ 的两根．且 $0<\alpha<\beta<\frac{1}{a}$，$0<x<\alpha$．给出下列不等式：① $x<f(x)$；② $\alpha<f(x)$；③ $x>f(x)$；④ $\alpha>f(x)$，其中成立的是　(　　)

(A)①④　　(B)②③　　(C)①②　　(D)③④

23. 已知集合 $A=\{a\mid a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+2^n}{2^n+t^n}$，$t$ 为实常数，且 $t\neq-2\}$，则集合 A 的真子集的个数为　(　　)

(A)1　　(B)3　　(C)7　　(D)8

24. 已知对每一对实数 x、y，函数 f 满足 $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$．若 $f(1)=1$，则满足 $f(n)=n(n\in\mathbf{Z})$ 的个数是　(　　)

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)无数多个

25. 已知方程组 $\begin{cases}x-2y=z-2u,\\2yz=ux.\end{cases}$ 对此方程组的每一组正实数解 (x,y,z,u)，其中 $z\geqslant y$，都存在正实数 M，满足 $M\leqslant\frac{z}{y}$，则 M 的最大值是　(　　)

(A)1　　(B) $3+2\sqrt{2}$　　(C) $6+4\sqrt{2}$　　(D) $3-2\sqrt{2}$

二、填空题

1. 函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+6)$ 的单调递增区间为________.

2. 集合 $A=\{x \mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $\frac{600}{5-x}\in\mathbf{Z}\}$ 的元素个数为________，所有元素的和为________.

3. 若函数 $f(x)=\log_a(2-ax^2)$ 在 $[-1,0]$ 上是增函数，则 a 的取值范围是________.

4. 若集合 $A=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x \mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且 $A\cap B=B$，则实数 m 的取值范围是________.

5. 已知 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(3^x+1)+\frac{1}{2}abx$ 为偶函数，$g(x)=2^x+\frac{a+b}{2^x}$ 为奇函数，其中 $a,b\in\mathbf{C}$，则 $a+a^2+a^3+\cdots+a^{2006}+b+b^2+b^3+\cdots+b^{2006}=$________.

6. 若 $2f(1-x)+1=xf(x)$，则 $f(x)=$________.

7. 已知 $A=\{x \mid x^2-4x+3<0, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x \mid 2^{1-x}+a\leqslant 0, x^2-2(a+7)x+5\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

8. 若实数 x 满足 $x^4+36\leqslant 13x^2$，则 $f(x)=x^3-3x$ 的最大值为________.

9. 已知 a,b,x 是实数，函数 $f(x)=x^2-2ax+1$ 与函数 $g(x)=2b(a-x)$ 的图像不相交. 记参数 a,b 所组成的点 (a,b) 的集合为 A，则集合 A 所表示的平面图形的面积为________.

10. 已知实数 x,y 满足 $x^2-y^2=1$，则 $|2x-y+1|$ 的最小值等于________.

11. 已知 $f(x)=x^2-6x+5$，则同时满足 $f(x)+f(y)\leqslant 0$ 和 $f(x)-f(y)\geqslant 0$ 的点 (x,y) 所在平面区域的面积是________.

12. 已知 $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$. 若 $y=g(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，则 $g(3)$ 的值等于________.

13. 设集合 $A=\{(x,y) \mid y=x^2\}$，$B=\{(x,y) \mid x^2+(y-m)^2=1\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则 m 的取值范围是________.

14. 已知 $f(x)\in\left[\frac{3}{8},\frac{4}{9}\right]$，则 $y=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的取值范围为________.

15. 当 $x,y\in\mathbf{R}$ 时，函数 $f(x,y)=(x+y)^2+\left(\frac{1}{x}-y\right)^2$ 的最小值是________.

16. 已知 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OM}=(-1,1)$，$\overrightarrow{NM}=(-5,-5)$，集合 $A=\{\overrightarrow{OR} \mid |RN|=2\}$，$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}\in A$，$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{MQ}(\lambda\in\mathbf{R},\lambda\neq 0)$，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=$________.

17. 函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对任意实数 x,y，只要 $x+y\neq 0$，就有 $f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{x+y}$ 成立，则函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的奇偶性为________.

18. 已知 a,b,c,d 均为正整数，且 $\log_a b=\frac{3}{2}$，$\log_c d=\frac{5}{4}$，若 $a-c=9$，则 $b-d=$________.

19. 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足 $f(0)=1$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则 $f(x)=$________.

20. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$f(n)\in\mathbf{N}^*$，$f[f(n)]=$

$3n$. 则 $f(1)+f(2)=$________.

21. 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且满足(1) $f(x)$ 是偶函数，且 $f(0)=2005$，(2) $g(x)=f(x-1)$ 是奇函数，则 $f(2005)$ 的值为________.

22. 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s+2^t+2^r \mid 0\leqslant s<t<r$，且 $r,s,t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排成的数列，则 $a_5=$________，$a_{50}=$________.

23. 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{1-3x+3x^2}$，记 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，则 $f_{10}(x)=$________.

24. 令 $f(n)=\log_{n+1}(n+2)(n\in\mathbf{N}^*)$. 如果对 $k(k\in\mathbf{N}^*)$，满足 $f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(k)$ 为整数，则称 k 为"好数"，那么区间 $[1,2005]$ 内所有的"好数"的和 $M=$________.

25. 已知命题 P：函数 $f(x)=x^2-4mx+4m^2+2$ 在区间 $[-1,3]$ 上的最小值等于 2；命题 Q：不等式 $x+|x-m|>1$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，如果上述两个命题中有且仅有一个真命题，则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题

1. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R})$ 满足条件：对任意实数 x 都有 $f(x)\geqslant 2x$，且当 $0<x<2$ 时，总有 $f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}(x+1)^2$ 成立.

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 求 $f(-1)$ 的取值范围.

2. 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的"不动点"，若 $f(f(x))=x$，则称 x 为 $f(x)$ 的"稳定点"，函数 $f(x)$ 的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x \mid f(x)=x\}$，$B=\{x \mid f[f(x)]=x\}$.

(1) 求证：$A\subseteq B$；

(2) 若 $f(x)=ax^2-1(a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R})$，且 $A=B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

3. 对于函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $|x|\leqslant 1$ 时，有 $|f(x)|\leqslant 1$，试求 $g(x)=|cx^2-bx+a|(|x|\leqslant 1)$ 的最大值.

4. 已知函数 $f(x)=a^x+3a(a>0,a\neq 1)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，而且函数 $y=g(x)$ 的图像与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称.

(1) 求 $y=g(x)$ 的解析式；

(2) 若函数 $F(x)=f^{-1}(x)-g(-x)$ 在 $x\in[a+2,a+3]$ 上有意义，求 a 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x)=x^2+x-2$.

(1) 试求函数 $g(x)=\dfrac{|f(x)|-f(x)}{2}$ 的解析式；

(2) 若 $a>0$ 时，直线 $y=ax+b$ 与曲线 $y=g(x)$ 交于三个不同的点，试确定 a 与 b 的关系式，并画图表示以 a、b 为坐标的点 (a,b) 所在的区域.

6. 设 $a>0,a\neq 1$，函数 $f(x)$ 满足条件：$f(\log_a x)=\dfrac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}$.

求证：对于任意大于 1 的自然数 n，都有 $f(n)>n$.

7. 已知 $f(x)=\dfrac{x^4+kx^2+1}{x^4+x^2+1}$，$k$、$x\in\mathbf{R}$.

(1)求 $f(x)$ 的最大值与最小值；

(2)求所有实数 k，使得对任意三个实数 a、b、c，存在一个三角形具有边长 $f(a)$、$f(b)$、$f(c)$.

8. 已知 $f(u)=u^2+au+(b-2)$，其中 $u=x+\dfrac{1}{x}$（$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$），若 a，b 是可使方程 $f(u)=0$ 至少有一个实数根的实数，求 a^2+b^2 的最小值.

9. 设 $a\in\mathbf{N}^+$，$a\geqslant2$，集合 $A=\{y\mid y=a^x,x\in\mathbf{N}^+\}$，$B=\{y\mid y=(a+1)x+b,x\in\mathbf{N}^+\}$. 在闭区间 $[1,a]$ 上是否存在 b，使 $A\cap B\neq\varnothing$？如果存在，求出 b 的一切可能值及相应的 $A\cap B$；如果不存在，试说明理由.

10. 已知函数 $f(x)=-x^3+ax^2+b$（$a,b\in\mathbf{R}$）.

(1)若函数 $y=f(x)$ 图像上任意不同的两点连线斜率小于 1，求证：$-\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$.

(2)若 $x\in[0,1]$，函数 $y=f(x)$ 上任一点切线的斜率为 k，讨论 $|k|\leqslant1$ 的充要条件.

11. 已知二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$（$a,b\in\mathbf{R}$），若方程 $f(x)=0$ 有两个非整数实根，且两根不在相邻两整数之间. 试求 a，b 满足的条件，使得一定存在整数 k，有 $|f(k)|\leqslant\dfrac{1}{4}$ 成立.

12. 设 $f(x)=4x^3-dx$，$g(x)=4x^3+ax^2+bx+c$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$.

(1)求所有的 d，使得当 $x\in[-1,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant1$.

(2)求所有的 a,b,c，使得当 $x\in[-1,1]$ 时，$|g(x)|\leqslant1$.

13. 设 x,y,z 均取正实数且 $x+y+z=1$，求三元函数 $f(x,y,z)=\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}+\dfrac{3y^2-y}{1+y^2}+\dfrac{3z^2-z}{1+z^2}$ 的最小值，并给出证明.

14. 已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，其图像交 x 轴于 A,B,C 三点. 若点 B 坐标为 $(2,0)$，且 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 和 $[4,5]$ 上有相同的单调性，在 $[0,2]$ 和 $[4,5]$ 上有相反的单调性.

(1)求 c 的值；

(2)在函数 $f(x)$ 的图像上是否存在一点 $M(x_0,y_0)$，使得 $f(x)$ 在点 M 的切线斜率为 $3b$？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由；

(3)求 $|AC|$ 的取值范围.

15. 定义在 $x\in\mathbf{R}^+$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

对任意 $y>x>0$，总有 $f(y)<\dfrac{f^2(x)}{y-x}$；且 $f(1)=1$. 求证：$f(6)\leqslant0$.

16. 已知 α,β 是方程 $4x^2-4tx-1=0$（$t\in\mathbf{R}$）的两个不等实根，函数 $f(x)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$ 的定

义域为$[\alpha,\beta]$.

(1)求 $g(t)=\max f(x)-\min f(x)$;

(2)证明:对于 $u_i\in(0,\frac{\pi}{2})(i=1,2,3)$,若 $\sin u_1+\sin u_2+\sin u_3=1$,则 $\frac{1}{g(\tan u_1)}+\frac{1}{g(\tan u_2)}+\frac{1}{g(\tan u_3)}<\frac{3}{4}\sqrt{6}$.

17.设函数 $\varphi(x)=\frac{x^2+2ax+b}{x^2+1}(a\neq0,a,b\in\mathbf{R})$,证明:(1)存在两个实数 $m_1,m_2(m_1<m_2)$,满足 $\varphi(x)-m_i=\frac{[(1-m_i)x+a]^2}{(1-m_i)(x^2+1)}(i=1,2)$;

(2)$(1-m_1)(1-m_2)=-a^2$;

(3)$m_1\leqslant\varphi(x)\leqslant m_2$.

18.设函数 $y=f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,当 $x<0$ 时,$f(x)>1$,且对任意的实数 $x,y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$成立,数列$\{a_n\}$满足 $a_1=f(0)$,且 $f(a_{n+1})=\frac{1}{f(-2-a_n)}(n\in\mathbf{N})$.

(1)求 a_{2005}的值;

(2)若不等式$(1+\frac{1}{a_1})(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})\geqslant k\cdot\sqrt{2n+1}$对一切 $n\in\mathbf{N}$ 均成立,求 k 的最大值.

19.定义在区间$(0,+\infty)$上的函数 $f(x)$满足:1)$f(x)$不恒为零;2)对任意正实数 x,y,都有 $f(x^y)=yf(x)$.

(1)求证方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实数根;

(2)若 $a>b>c>1$,且 a,b,c 成等差数列,求证:$f(a)f(c)<f^2(b)$;

(3)若 $f(\frac{1}{3})<0$,试证 $f(x)$是$(0,+\infty)$上的增函数.

20.已知函数 $f(x)=2x^3+(m-x)^3(m\in\mathbf{N}^*)$.

(1)若 $x_1,x_2\in(0,m)$,则 $f(x_1)+f(x_2)\geqslant2f(\frac{x_1+x_2}{2})$;

(2)若 $a_n=f(n),n=1,2,\cdots,m-1$,则 $a_1+a_{m-1}\geqslant a_2+a_{m-2}$;

(3)对于任意的 $a,b,c\in\left[\frac{m}{2},\frac{2}{3}m\right]$,问以 $f(a),f(b),f(c)$的值为长的三条线段是否可构成三角形?请说明理由.

【模拟解答】

一、选择题

1.选 B.由题意得$\begin{cases}-x=-y\\-x-1=-\frac{y}{2}\\x^2+x+1=y+1\end{cases}\Rightarrow$无解,或$\begin{cases}-x=-\frac{y}{2}\\-x-1=-y\\x^2+x+1=y+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$.所以 $x^2+y^2=5$.

2. 选 B. 数形结合，作出图像即可.

3. 选 B. $\begin{cases}-1+x=1+2y\\1+2x=-2+3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-12\\y=-7\end{cases}$

$\therefore M\cap N=\{(-13,-23)\}$.

4. 选 C. $y=f(x-a)+b$, $x-a=f^{-1}(y-b)$, $y=f^{-1}(x-b)+a$.

5. 选 A. 因为 $M=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}\Rightarrow P=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$,

当 $-2\leqslant a\leqslant 0\Rightarrow T=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant 4\}$, 要使 $T\subseteq P$, 则 $2a+3\geqslant 4\Rightarrow a\geqslant\frac{1}{2}$(舍去);

当 $0<a<2\Rightarrow T=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$, 要使 $T\subseteq P$, 则 $2a+3\geqslant 4\Rightarrow a\geqslant\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{2}\leqslant a<2$;

当 $a\geqslant 2\Rightarrow T=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$, 要使 $T\subseteq P$, 则 $2a+3\geqslant a^2\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 3$, 所以 $2\leqslant a\leqslant 3$;

综合得: $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$.

6. 选 B. 因为 $f(m)-f(n)=(m-n)(am+an+b)$, 则 $(m-n)\mid(f(m)-f(n))$.

验证: $(7-1)\nmid(-1-3)$, $(7-4)\mid(-1+4)$, $(7-2)\mid(-1-4)$, $(1-4)\nmid(3+4)$, $(1-2)\mid(3-4)$, $(4-2)\mid(-4-4)$. 于是，乙计算错误.

7. 选 A. $M\cap N\neq\varnothing$ 相当于点 $(0,b)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1$ 上或它的内部

$\therefore \frac{2b^2}{3}\leqslant 1$, $\quad\therefore -\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$.

8. 选 C. 由 $f(10+x)=f(10-x)$(可知 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=10$ 对称)，所以 $f(x)=f(20-x)$, $f(-x)=f(20+x)$, 由条件可知 $f(-x)=-f(x)$, 即 $y=f(x)$ 为奇函数，又 $f(20-x)=f[10+(10-x)]=f[10-(10-x)]=f(x)$. 所以 $f(20+x)=-f(x)$, 从而 $f(x+40)=-f(x+20)=f(x)$. 故 $f(x)$ 为周期函数.

9. 选 C.

$$\varphi(x)=\begin{cases}a+b+c+d-4x & \text{当 } x\leqslant d\\ a+b+c-d-2x & \text{当 } d<x\leqslant c\\ a+b-c-d & \text{当 } c<x\leqslant b\\ a-b-c+2x & \text{当 } b<x\leqslant a\\ 4x-(a+b+c+d) & \text{当 } x>a\end{cases}$$

$\because a>b>c>d$, $\therefore \varphi(x)$ 的最小值为 $a+b-c-d$.

10. 选 B. $f(x,y)=ax+y\leqslant|ax|+|y|\leqslant a|x|+(1-|x|)=(a-1)|x|+1$. 前一个等号成立应有 $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0<a<1$ 时 $g(x)=(a-1)x+1$ 为减函数，$x=0$ 时 $g(x)_{\max}=1$.

11. 选 C. 由条件知，$y=f(x)$ 是周期为 2 的函数，$y=\log_4|x|$ 是偶函数，结合图像知，两者有 6 个交点.

12. 选 A.

由于 $x^{2a}+a^{2x}+\log_a^2x+3-2(x^a+a^x+\log_ax)=(x^a-1)^2+(a^x-1)^2+(\log_ax-1)^2\geqslant 0$

因此 $x^{2a}+a^{2x}+\log_a^2x+3\geqslant 2(x^a+a^x+\log_ax)$　①

于是集合 A 中的元素 x 满足

$x^{2a}+a^{2x}+\log_a^2x+3\geqslant 2(x^a+a^x+\log_ax)$.

又若①中等号成立,则 $x^a = a^x = \log_a x = 1$,这要求 $x=1$ 或 $x=0$ 且 $x=a$,这不可能,所以 $A=\varnothing$.

13. 选 B. 令 $u=\sqrt{\frac{1}{2}-x}$, $v=\sqrt{x-\frac{1}{3}}$,则 $u^2+v^2=\frac{1}{6}$,而 $u^2+v^2\leqslant(u+v)^2\leqslant 2(u^2+v^2)$.

所以 $a=\sqrt{\frac{1}{3}}$, $b=\sqrt{\frac{1}{6}}$, $a+b=\frac{\sqrt{3}}{6}(2+\sqrt{2})$.

14. 选 B. 因为 $x=2^8$, $y=2^6$, $z=2^5$ 是方程的一组解,则 $x=(2^{20})^k 2^8$, $y=(2^{15})^k 2^6$, $z=(2^{12})^k 2^5$ $(k=1,2,\cdots)$ 也是方程的解,所以是无限集.

15. 选 D. 由已知得 $y=-\frac{1}{x}$,故

$$u=\frac{4}{4-x^2}+\frac{9x^2}{9x^2-1}=\frac{-9x^4+72x^2-4}{-9x^4+37x^2-4}=1+\frac{35}{37-\left(9x^2+\frac{4}{x^2}\right)}.$$

而　$x\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right)$,

故当 $9x^2=\frac{4}{x^2}$,即 $x^2=\frac{2}{3}$ 时,$9x^2+\frac{4}{x^2}$ 之值最小,而此时函数 u 有最小值 $\frac{12}{5}$.

16. 选 C. $f(x,x+y)=f(x,y)\cdot\frac{x+y}{y}$. $f(14,52)=f(14,14+38)=f(14,38)\frac{52}{38}=f(14,14+24)\frac{26}{19}=f(14,24)\frac{13}{6}=f(14,14+10)\frac{13}{6}=f(14,10)\frac{26}{5}=f(10,14)\frac{26}{5}=f(10,10+4)\frac{26}{5}=f(10,4)\frac{91}{5}=f(4,10)\frac{91}{5}=f(4,6)\frac{91}{3}=f(4,2)\cdot 91=f(2,4)\cdot 91=f(2,2)\cdot 182=2\times 182=364$.

17. 选 C. 原方程变形为 $(x^2-1)(1-\pi^x)=x(\pi^{x^2-1}-1)$ 考察零点分段得 $x=0,\pm 1$,若 $x>1$,则左边 <0,右边 >0,无解.

同理可知在 $0<x<1$, $-1<x<0$, $x<-1$ 时均无解. 故方程各解平方和为 $1^2+0^2+(-1)^2=2$.

18. 选 A. 对于①,取 $x<0$,则 $y=x+\frac{4}{x}<0<4$,从而①不符合条件.

对于②,$y=\frac{1}{3}(x^2+8x+\frac{8}{x^3})\geqslant\frac{1}{3}\times 3\sqrt[3]{x^2\cdot 8x\cdot\frac{8}{x^3}}=4$,而这要求 $x^2=8x=\frac{8}{x^3}$,该方程无实数解,故不存在 $x\in(0,+\infty)$,使 $y=4$,②也不符合条件.

对于③,$y=\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+5}}=\sqrt{x^2+5}+\frac{4}{\sqrt{x^2+5}}\geqslant 4$,而这要求 $\sqrt{x^2+5}=2$,方程无实数解,故不存在 $x\in\mathbf{R}$,使 $y=4$,故③不符合条件.

对于④,$y=(1+\cot x)(\frac{1}{2}+2\tan x)\geqslant 2\sqrt{\cot x}\cdot 2\sqrt{\tan x}=4$,这要求 $\cot x=1$ 且 $\tan x=\frac{1}{4}$,这不可能,故不存在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,使 $y=4$,故④不符合条件.

19. 选 A. 由 $f(x)=\frac{1+x}{1-3x}$ 知 $f_1(x)=\frac{x-1}{3x+1}$, $f_2(x)=f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)=x$, $f_3(x)=f(x)$. $f(x)$ 为迭代周期函数,故 $f_{3n}(x)=f(x)$, $f_{2004}(x)=f(x)$, $f_{2004}(-2)=f(-2)=-\frac{1}{7}$.

20. 选 A. $(2^s-1)(2^t-1)\geqslant 0\Leftrightarrow 2^s+2^t\leqslant 2^{s+t}+1\Leftrightarrow(2^s-1)+(2^t-1)\leqslant 2^{s+t}-1$;
$(s+1)(t+1)\geqslant s+t+1\Rightarrow\ln(s+1)+\ln(t+1)\geqslant\ln(s+t+1)$.

21. 选 D. 注意到 $f(2)=4, f(4)=0, f(0)=0$, 所以 2 为初始值构成的数列取到 3 个不同值,事实上,我们只需寻找合适的初始值,使得数列中的某项为 2 即可,记 $y=g(x)=2-\sqrt{4-x}$, 易知 $g(x)$ 为 $f(x)=4x-x^2(x\geqslant 0)$ 的反函数. 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 令 $x_n=2, x_{n-1}=g(x_n), x_{n-2}=g(x_{n-1}), \cdots, x_0=g(x_1)$, 由单调性知 $0<x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n$. 所以当 x_0 为初始值时,按 $x_n=f(x_{n-1})$ 构成的数列 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, 2, 4, 0, 0\cdots$, 取 $n+3$ 不同的值. 由 n 的任意性,知有无限多个适合条件的 x_0.

22. 选 A.

令函数 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ 由 $0<x<\alpha<\beta$ 且 $a>0$, 知 $F(x)>0$, 即 $f(x)>x$. ①正确. 又 $\alpha-f(x)=\alpha-(x+F(x))=(\alpha-x)-a(x-\alpha)(x-\beta)=(\alpha-x)(1+ax-a\beta)$, 由 $\beta<\frac{1}{a}$. 知 $a\beta<1$, 于是 $\alpha-f(x)>0$, 从而 $\alpha>f(x)$. ④正确.

23. 选 C.

对 $a\in A$, 有 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+2^n}{2^n+t^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}$.

当 $|t|>2$ 时, $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(\frac{2}{t})^n-(\frac{1}{t})^n}{(\frac{2}{t})^n+1}=0$.

当 $t=2$ 时, $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}=1$.

当 $|t|<2$ 时, $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^n+t^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{2^n}}{1+(\frac{t}{2})^n}=2$

所以 A 中元素的个数 $|A|=3$, 其真子集的个数为 $2^3-1=7$.

24. 选 B.

令 $y=1$ 得 $f(x)+f(1)=f(x+1)-x-1$, 即 $f(x+1)=f(x)+x+2$.

令 $x=0$ 得 $f(1)=f(0)+2$. 由 $f(1)=1$ 知 $f(0)=-1$.

当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时, $f(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]+f(0)=\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)+f(0)=\frac{n(n+3)}{2}-1$.

同理, $f(-n)=-\frac{n(-n+3)}{2}-1$. 所以, $f(n)=\frac{n(n+3)}{2}-1, n\in\mathbf{Z}$. 令 $f(n)=n$, 解得 $n=-2$ 或 $n=1$.

25. 选 C.

设方程组的所有正实数解 (x,y,z,u) 构成的集合为 S, 则 $M\leqslant\min\limits_{(x,y,z,u)\in S}\frac{z}{y}$, 因此 $M_{\max}=\min\limits_{(x,y,z,u)\in S}\frac{z}{y}$.

由 $x-2y=z-2u$, 得 $x+2u=z+2y$, 易知 $(x+2u)^2-8xu=(x-2u)^2\geqslant 0$,

即 $(z+2y)^2-16yz\geqslant 0$, 亦即 $(\frac{z}{y})^2-12(\frac{z}{y})+4\geqslant 0$, 且 $\frac{z}{y}\geqslant 1$,

所以 $\frac{z}{y}\geqslant 6+4\sqrt{2}$,

取 $x=2, u=1, z=2+\sqrt{2}, y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$，则 $\frac{z}{y}=6+4\sqrt{2}$，故 $M_{\max}=\min\limits_{(x,y,z,u)\in S}\frac{z}{y}=6+4\sqrt{2}$.

二、填空题

1. $(-\infty,2)$. 因为函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+6)$ 的定义域为 $x^2-5x+6>0$，即 $x<2$ 或 $x>3$. 又 $x^2-5x+6=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，其递减区间为 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$，所以，函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+6)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,2)$.

2. 48, 240. 因为 $600=2^3\times3\times5^2$，所以，600 的正约数有 $(3+1)(1+1)(2+1)=24$ 个. 从而，集合 A 中共有 $2\times24=48$ 个元素. 考虑 600 的两个相反约数所对应的 A 中元素之和为 10，故 A 中元素之和为 $24\times10=240$.

3. $(1,2)$. 由对数函数定义知，$a>0$，且 $a\neq1$. 因此，$g(x)=2-ax^2$ 在 $[-1,0]$ 上为增函数，由复合函数单调性知 $a>1$. 又由 $x\in[-1,0]$ 时，$g(x)=2-ax^2$ 恒正，知 $2-a>0$，因此，$1<a<2$.

4. $m\leqslant3$. 由 $A\cap B=B$，可知 B 是 A 的子集. 当 $B=\varnothing$ 时，$m+1>2m-1$，得 $m<2$；当 $B\neq\varnothing$ 时，有

$$\begin{cases}-2\leqslant m+1,\\2m-1\leqslant5,\\m+1\leqslant2m-1.\end{cases}$$ 解得 $2\leqslant m\leqslant3$. 所以 $m\leqslant3$.

5. -2. 由 $f(x)$ 为偶函数得 $ab=1$；$g(x)$ 为奇函数得 $a+b=-1$，所以 a,b 是方程 $x^2+x+1=0$ 的两个根，$\therefore a^3=1, b^3=1$，$\therefore$ 原式 $=a(1+a)+b(1+b)=-1-1=-2$.

6. $\frac{x-3}{x^2-x+4}$. 在 $2f(1-x)+1=xf(x)$ 中以 $1-x$ 代换 x 得

$2f(x)+1=(1-x)f(1-x)$.

又 $f(1-x)=\frac{1}{2}[xf(x)-1]$，

故 $2f(x)+1=\frac{1}{2}(1-x)[xf(x)-1]$.

解得 $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}$.

7. $-4\leqslant a\leqslant-1$. 易得 $A=(1,3)$，设 $f(x)=2^{1-x}+a$，$g(x)=x^2-2(a+7)x+5$.

要使 $A\subseteq B$，只需 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(1,3)$ 上的图像均在 x 轴下方. 其充要条件是：同时有 $f(1)\leqslant0$，$f(3)\leqslant0$，$g(1)\leqslant0$，$g(3)\leqslant0$. 由此推出 $-4\leqslant a\leqslant-1$.

8. 18. 由 $x^4+36\leqslant13x^2$ 得 $-3\leqslant x\leqslant-2$ 或 $2\leqslant x\leqslant3$，若 $x\geqslant y$，x,y 同位于区间 $[-3,-2]$ 或 $[2,3]$，则 $f(x)-f(y)=(x-y)(x^2+xy+y^2)\geqslant0$，$f_{\max}=\max(f(-2),f(3))=18$.

9. π. 联立方程可得 $x^2-2ax+1=2b(a-x)$，即 $x^2+(2b-2a)x+1-2ab=0$，$\Delta=(2b-2a)^2-4(1-2ab)<0$，故 $a^2+b^2<1$. 所以面积为 $\pi\cdot1^2=\pi$.

10. $\sqrt{3}-1$. 令 $2x-y+1=m$，代入 $x^2-y^2=1$ 消去 x 得到 $3y^2-2(m-1)y+4-(m-1)^2=0$. 该关于 y 的方程一定有解，所以 $[-2(m-1)]^2-4\times3\times[4-(m-1)^2]\geqslant0$. 解得：$m\geqslant1+\sqrt{3}$ 或 $m\leqslant1-\sqrt{3}$，从而 $|m|\geqslant\sqrt{3}-1$.（$x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$，$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取等号）

11. 4π. $f(x)+f(y)\leqslant0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-3)^2\leqslant8$，表示以 $(3,3)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆及其内