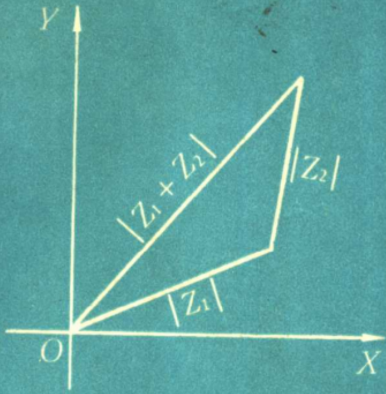
数学进修用书



张明梁 冯慈璜

复数

USHU

浙江人民出版社

数学进修用书

复数

张明梁　冯慈璜

浙江人民出版社

数学进修用书

复　数

张明梁　冯慈璜

*

浙江人民出版社出版
（杭州武林路196号）
浙江新华印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥境）
浙江省新华书店发行

开本 787×1092　1/32　印张4.625　字数100,000
1980年8月第一版
1980年8月第一次印刷
印数：1—2,400

统一书号：7103·1114
定　价：0.39 元

内　容　提　要

本书比较系统地叙述了复数的定义、概念、性质、应用及解题等基础知识，内容比新编中学数学教材稍有扩大，并配置有一定数量的例题和思考练习题，适合中学师生和工农青年自学。

编 辑 说 明

这套丛书主要是为中学数学教师编写的. 随着教育事业的发展，教师队伍迅速壮大，新教师大量增加. 在新的长征中，他们担负着为祖国培养千千万万建设人才的极其光荣的任务. 当前他们需要尽快地熟悉和掌握教育部新编教材，努力提高教育质量，因而进修的要求十分迫切. 本丛书出版目的，就是为他们进修提供一点比较系统的材料. 编写时照顾教师队伍的实际状况，内容比教育部新编中学数学教材要扩大、加深和提高一些，使学完以后继续自学大学有关数学课程，基础打得更加扎实. 同时也注意适当联系中学教学实际，有助于教师进行教学. 丛书也适合具有高中程度的学生和工农青年自学.

前　言

数是数学中最基本的概念之一．随着人类社会的发展，人们对于数的认识，经历了自然数、整数、有理数、实数、复数等阶段．早在十六世纪后期，数学中已出现了复数，并且运用它来求三次方程的根．但在当时人们对它抱有极大的怀疑，甚至许多数学家也表示强烈的反对．尽管有各种怀疑和反对，但复数的出现使复杂的问题得到了简化，使原来无法求解的困难问题给予合理的解决，显示出它的生命力，得到广泛的应用．因此，复数的概念很早就是中学数学中的一部分内容．

本书试图在实数的基础上，对学习复数的必要性，复数的定义，复数的性质，以及应用复数解题等方面，作一番系统的介绍．希望有助于读者弄清复数的概念，掌握复数的性质，对复数的应用能有初步的了解．书中叙述内容限于中学数学教学大纲的范围．考虑到读者的需要，也涉及一些超过大纲的题材，这部分内容可供指导课外学习和进修提高参考．

目　　录

第一章　复数的概念

§1　从实数说起

实数是大家所十分熟悉的，它是各种具体量的抽象，应用非常广泛. 实数包含的对象，可以列表如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

任何有理数总可以写作两个整数之比的形式：$\frac{n}{m}$，其中 m，n 为整数且 $m\neq 0$，m 与 n 无公因数. 而无理数不能写成上述整数之比的形式.

实数有许多重要的性质，列举如下：

（一）对于任何两实数，加减乘除(除数不为零)四则运算恒可施行. 换句话说，若 a，b 为两实数，则 $a\pm b$，$a\cdot b$，$a\div b$ $(b\neq 0)$ 也都是实数. 实数的这个性质称为关于四则运算的封闭性，数学上特别称之为实数体或实数域.

（二）有序性，对任一实数 a，关系式 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 中有一个且仅一个成立. 若 $a>0$，称 a 为正数；若 $a<0$，称 a 为

负数．对于实数 a,b，如果 $a-b>0$ 则说 a 大于 b；如果 $a-b<0$ 则说 a 小于 b．所以全体实数按“大小”有一定顺序．此外，我们还知道，对任何实数 x，总存在这样的整数 n，使得 $n\leqslant x<n+1$．

根据实数的运算性质及“大小”顺序，我们知道：

若 $a,b>0$，则 $a+b>0$，$a\cdot b>0$．

若 $a>d$，且 $c>b$，则 $a+c>b+d$．

若 $a>b$，且 $c>0$，则 $a\cdot c>b\cdot c$．

若 $a>b$，且 $c<0$，则 $a\cdot c<b\cdot c$．

特别，对任何异于零的实数 a，它的平方总大于零：$a^2>0$．

由于实数的有序性与四则运算的封闭性，所以实数是一个有序体．

（三）现在我们建立实数与形的对应性质．

任取一直线，规定它的正向和单位长，再在直线上取定一点O为原点，那末称这样的直线为数轴．数轴上任一点 P，如果有向线段 OP 的值为 x，就规定点 P 与实数 x 相对应，并且称数 x 为 P 的坐标，称点 P 是实数 x 的几何表示．依照这样规定，直线上任意一点 P 必定有确定的实数 x 作为它的坐标；反过来，给定实数 x，必可在直线上确定一点 P 作为它的几何表示．因之，我们说全体实数与直线（即数轴）上的点存在一一对应关系．实数全体的这个重要性质，称为实数的连续性．由于实轴上没有空隙存在，换言之，实轴上任何以 A_n，B_n 为两端的闭区间序列 I_n（$n=1, 2, 3\cdots$），若其中每一个都包含着后一个，并且其长度趋向于零，则存在一点 P 包含于所有区间 I_n 之中．通过一一对应，这个性质刻划出实数可进行一切极限运

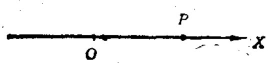


图1·1

算的特征．所以实数的连续性又称为实数的完备性，作为高等数学基础的极限理论，就是以实数的这个性质为主要依据的．

注 全体有理数，作为实数的一部分，关于四则运算也是封闭的，因此有理数构成一个数体．有理数是有大小顺序的，所以有理数全体也是一个有序体．然而它不具有实数那样的连续性．

实数还有许多重要性质，这里不再一一列举．总之，实数的这些性质被十分和谐地应用于理论研究和广泛地解决实际问题．但是，实数仍然有一定的局限．比如－1的平方根是什么？方程 $x^2+1=0$ 的解是什么？怎样把10拆成两个数之和，使它们的乘积等于40？……这类问题在实数范围内都是无解的（读者试申述理由）．在这里实数系暴露出范围狭隘的缺陷，它向人们提出了扩张实数系的新课题．

怎样进行实数系的扩充呢？我们回顾一下数系发展的过程．大家知道，整数系是由于减法运算的封闭性要求，在自然数之外引入负数得到的；有理数系是由于除法运算的封闭性要求（除数不为0），在整数之外引入分数得到的．

再看方程求解的情形，考察下述六个方程：

$2x=6$，	①	$x^2=9$，	④
$2x=5$，	②	$x^2=2$，	⑤
$2x+3=0$，	③	$x^2+1=0$．	⑥

如果我们不知道分数与负数，那末只能断言方程①与④为 $x=3$ 所满足，而其余方程无解(即找不到适合这些方程的自然数)．

如果我们知道了有理数，那末方程①有解 $x=3$，②有解 $x=\frac{5}{2}$，③有解 $x=-\frac{3}{2}$，④有两个解 $x=\pm3$．但是方程⑤与⑥仍无解（即找不到适合这两个方程的有理数）．

为了能够使方程⑤有解（方程⑤的实际意义是清楚的，例

如求面积为 2 的正方形的边长就得到方程⑤），我们必须引入无理数$\sqrt{2}$，在实数范围内，方程⑤的解是 $x=\pm\sqrt{2}$. 然而⑥仍然无解.

不难看出，关于方程①—⑥是否有解，决定于我们所指的"数"是什么，换句话说，所给的方程是否可解，决定于数的概念推广到何种程度. 整系数的一次方程，在有理数范围内都有解. 但二次方程则不然，甚至在实数范围内，二次方程也未必有解.

现在我们面临的问题是如何使得实数的开方运算永远可施行？如何使二次方程（更一般地 n 次方程）恒有解？根据过去的经验，我们感到需要在实数之外引进一种新数——虚数，它与实数一起合成一个新数系，在新数系中的任一个数都可以开方根，任何一个代数方程都有解，这就是我们要讨论的复数系.

数系每一次扩张的起因都是为了满足某种运算的封闭性要求或求解方程的需要，然而由实数到复数的扩张与以前几次相比有新的特点. 无论是分数、负数或无理数，它们的实际背景是非常清楚的，如果不考虑正负号而只考虑其绝对值的话，那么它们都是测量具体量的结果，是量的直接抽象. 现在对于复数就不那么直观了. 比如为了满足-1开平方与求解方程$x^2+1=0$的需要，在新数中应包含平方等于-1这样一个"数". 初次接触这个"数"常会问：这个数表示一段多长的线段或者一块面积多大的矩形呢？提出这种疑问是十分自然的，因为我们对实数太熟识了，以至于对这种新数也往往象实数那样去衡量它. 如果我们多思索一下就会明白：既然是实数之外的新数，当然已不是测量线段或面积的结果，也不是刻划相反方向（或相反意义）的正负数这样的数量关系. 在学习复数时一定要掌握这一特点，力求避免把复数与实数等同地看待，否则往往会觉得复

数不象是个数，以致感到格格不入．事实上，为了补充实数的不足，在实数之外引入的复数，当然有着与实数迥异的性质，这是毫不足奇的．世界上的事物是复杂的，事物的反映也是曲折的．如果说实数是量的直接反映的话，那末复数是量的一种间接反映．对于在各种应用领域中导出的实系数代数方程，求出它们的解是解决实际问题的第一步．如果消极地停留在满足于“无解”的阶段，研究就不能深入，也就无法科学地认识自然规律．实践已经证明，这种新数是数学正确运算的必然结果，如同实数一样，离开它在数学上也将是寸步难行的．

有趣的是，在二十世纪著名的相对论时空结合中，也遇到负数开平方这样古老的问题．那时实数系早已得到扩张，只要运用现成的结果就行了．这是否可以认为是理论走在实践前面的一个生动例证呢?!

思考题

1．试证$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\log_{10}3$ 均为无理数．

2．设 a 为有理数，b 为无理数，试证 $a+b$ 与 $a\cdot b$ 均为无理数．

3．设 a,b,c 为奇整数，证明二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无有理数解．

4．全体有理数关于四则运算是不是具有封闭性？它是否能构成一个数体？全体无理数呢？

5．你能“造”出两个无理数来吗？试试看．

§2 虚数单位 i

前面说过为了保证负数可以开平方，在实数之外引进的新数中自然应包含平方等于－1的这样一个数．我们记它为 i．关于它的运算，我们规定如下：

(1) $i\times i=-1$，$i^0=1$；

(2) 对实数 b，$b\times i=i\times b=bi$；

(3) 对于数零：$0\times i=i\times 0=0$；

(4) 对于实数 a、b，a 与 bi 之和为 $a+bi$.

适合上述规定(1)—(4)的数 i 称为虚数单位.

容易知道：

$$i^1=i,\quad i^2=-1,\quad i^3=i^2\cdot i=-i,\quad i^4=i^2\cdot i^2=1,$$
$$i^5=i^4\cdot i=i,\quad i^6=i^4\cdot i^2=-1,\quad i^7=i^4\cdot i^3=-i,$$
$$i^8=i^4\cdot i^4=1.$$

……

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i^3}{i^4}=-i,\quad i^{-2}=\frac{i^2}{i^4}=-1,$$

$$i^{-3}=\frac{i}{i^4}=i,\quad i^{-4}=\frac{1}{i^4}=1.$$

……

一般地，对任何整数 $n=0$，±1，±2，…总成立着 $i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$，$i^{4n}=1$. 这个重要性质，称为 i 乘幂的周期性.

例 1 $i^{55}=i^{4\times13+3}=i^3=-i$.

例 2 $2i^{97}+3i^{101}-i^{30}=2i^{4\times24+1}+3i^{4\times25+1}-i^{4\times7+2}$

$$=2i+3i-(-1)=1+5i.$$

例 3 若 k 为自然数，求证

$$i^k+i^{k+1}+i^{k+2}+i^{k+3}=0.$$

证 左端 $=i^k(1+i+i^2+i^3)$

$=i^k(1+i-1-i)$

$=0=$ 右端.

对于虚数单位 i 作形式的运算是没有什么困难的. 16世纪

时卡丹首先引进平方等于-1的数，并利用它找出某类三次方程的实数根.

现在我们考虑实数开平方运算及二次方程的求解问题.

由于$i^2=-1$及$(-i)^2=-1$.这表明i的平方与$(-i)$的平方都是-1. 据平方根的意义，知i与$-i$是-1的两个平方根.同样，由$(ai)^2=(-ai)^2=-a^2$，知ai与$-ai$是$-a^2$的两个平方根.

这样，任何负数都有两个平方根. 从而任何实数开平方的问题就完全得到解决.

注 实数中算术方根的概念，不能搬用到负数开平方中来. 因为负数开平方的结果不是实数，是实数之外的新数. 而算术方根是实数范围内定义的. 由于所论的数系是不同的，负数的开方没有算术根的概念. 有的书上用$\sqrt{-1}$表示虚数单位i,此时切记不能把$\sqrt{-1}$理解作“-1的算术平方根”. 否则，毫无根据地套用算术平方根性质，就会写出象$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\cdot(-1)}$之类的“等式”，从而导致诸如$-1=1$那样荒谬的结果（$-1=i\cdot i=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$）.

现在来回顾实系数二次方程

$$ax^2+bx+c=0. \qquad ①$$

已知的求根公式是

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

当$b^2-4ac>0$，方程①有两个相异实根；当$b^2-4ac=0$时，有两相等实根；当$b^2-4ac<0$时，方程无实数解.

显见，造成无实数解的困境是由负数不能开平方引起的. 现在有了虚数单位i，我们知道，当$b^2-4ac<0$时，它的两个平方根是$\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i$（这里$\sqrt{\ }$表示正数的算术平方根）. 故

在 $b^2-4ac<0$ 时，方程①也有两个根：

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\ i}{2a}.$$

这样，在上述意义下，任何实系数二次方程总有两个根.

例 4 求下列方程的解：

1) $x^2+5x-1=0$； 2) $x^2+2x+1=0$；

3) $x^2+x+1=0$； 4) $x^2+7=0$.

解 1) $x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$；

2) $x_{1,2}=-1$；

3) $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$；

4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{7}\,i$.

再看第 3 页提及的一个问题：

例 5 怎样把10分成两数之和，使它们的乘积等于40?

解 设一数为 x，则另一数为 $10-x$. 按题意得

$$x\cdot(10-x)=40,$$

即
$$x^2-10x+40=0.$$

它的两个根为 $x_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-160}}{2}=5\pm\sqrt{15}i$.

设 $x_1=5+\sqrt{15}\,i$， $x_2=5-\sqrt{15}\,i$，

把它们象多项式那样作运算，容易验证

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=(5+\sqrt{15}\,i)+(5-\sqrt{15}\,i)\\&=10+0i=10.\end{aligned}$$

$$x_1\cdot x_2=(5+\sqrt{15}\,i)(5-\sqrt{15}\,i)$$

$$
\begin{aligned}
&=5\cdot5+\sqrt{15}\,i\cdot5-5\cdot\sqrt{15}\,i\\
&\quad-\sqrt{15}\,i\cdot\sqrt{15}\,i\\
&=25+15=40.
\end{aligned}
$$

因此，把10分成 $5+\sqrt{15}\,i$ 与 $5-\sqrt{15}\,i$ 两个数之和就满足要求. 象 $5+\sqrt{15}\,i$，$5-\sqrt{15}\,i$ 那种，由实数与虚数单位 i 的“代数和”形式表示的数，就是下面要讨论的复数.

思 考 题

1. 虚数单位 i 是怎样定义的，对它的运算有哪些规定？
2. 试求 i^{51}，i^{37} 之值.
3. 试求出二次方程 1）$x^2+27=0$ 与 2）$x^2+3x+4=0$ 的根.
4. 求多项式 1）$x^{21}+3x^6+x^5$ 在 $x=i$ 时的值；2）$2x^{20}+3x^{10}-x^5$ 在 $x=-i$ 时的值. [1）$-3+2i$；2）$-1+i$]
5. 在下列各条论述中有什么错误？

   1）$\dfrac{1}{-1}=\dfrac{-1}{1}$，$\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$，$\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{1}$，$i^2=1$；

   2）$i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$；

   3）$3=\sqrt{9}=\sqrt{(-9)\cdot(-1)}=\sqrt{-9}\cdot\sqrt{-1}=3i\cdot i=-3$.

§3 复数的概念

前面已经看到，虚数单位 i 与实数进行四则运算的结果，一般是形如 $x+iy$ 的数，其中 x，y 是实数. 对于形如 $x+iy$ 的数，怎样判定它们的相等呢？它们又是怎样进行运算的呢？我们给出一系列的定义.

定义1 设 x 与 y 为实数，形如 $x+iy$ 的数称为复数，常

记作 $z=x+iy$.

定义 2 x 称为复数 $z=x+iy$ 的实部，y 称为虚部*，分别记作 $x=R_e(z)$，$y=I_m(z)$. 例如 $R_e(2+3i)=2$. $I_m(2+3i)=3$.

定义 3 虚部为零的复数 $z=x+0i$ 就是实数 x：

$$x+0i=x.$$

所以任何实数是虚部为零的复数. 由此可知，复数的全体包含所有实数为其一部分.

定义 4 称复数 $z=x+iy(y\neq0)$ 为虚数；称复数 $z=0+iy=iy$ $(y\neq0)$ 为纯虚数. 复数 $0+0i$ 就是实数零：$0+0i=0$.

综合上述定义，可列表如下：

$$\begin{array}{c}\text{复 数}\\ z=x+iy\end{array}\begin{cases}\text{实数}\ (x+0i=x)\\ \text{虚数}\ (x+iy,\ y\neq0)\begin{cases}\text{纯 虚 数}\ 0+yi=yi(y\neq0),\\ \text{非纯虚数}\ x+yi(x\neq0,\ y\neq0).\end{cases}\end{cases}$$

定义 5 两复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相等 $z_1=z_2$，是指 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，换句话说，两个复数相等，当且仅当它们的实部与虚部分别相等.

定义 6 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，当 $x_1=x_2$ 及 $y_1=-y_2$ 时，称复数 z_1 与 z_2 互为共轭复数，记作 $z_1=\bar{z}_2$ 或 $\bar{z}_1=z_2$. 例如 $\overline{3+2i}=3-2i$，$\overline{(\sqrt{5}-i)}=\sqrt{5}+i$.

特别，实数的共轭数是它自己.

我们规定复数的四则运算法则如下：

定义 7 （加减法法则）

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)\\&=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);\end{aligned}$$

---

*）有的书上〔如数理化自学丛书＜代数＞（第四册）〕称 yi 为复数的虚部，y 称为虚部的系数.