高等教育自学考试 试用教材

高等数学

吴学澄 黄炳生 等编

东南大学出版社

高　等　教　育

自学考试用教材

高等数学

东　南　大　学

吴学澄　罗庆来　王贯英

黄炳生　许玉筠　宋柏生　编

东南大学出版社

内 容 提 要

本书是在工科院校"高等数学"课程多年教学实践基础上，根据自学考试对"高等数学"课程的要求，并结合江苏省自学考试开考以来的经验和自学"高等数学"的特殊需要，由〈江苏省自学考试指导委员会〉组织专为微机、工民建、机制专业自学考试"高等数学"课程而撰写的专用教材。主要内容有函数、极限与连续、导数与微分、微分学基本定理与微分法应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、无穷级数、空间解析几何、多元函数微分法与多元函数积分学等。各章配有习题，思考题、阶段小结、复习题及自我检查题，便于读者自学、自查。

本书也可作为工科其它专业自学考试、函授、夜大学、职工大学等"高等数学"课程教材和工科大专院校师生参考书。

责任编辑　徐步政

高 等 教 育

自学考试用教材

高 等 数 学

吴学澄　罗庆来　王贵英
黄炳生　许玉筠　宋柏生　编

东南大学出版社出版

（南京四牌楼2号）

江苏省新华书店发行　武进第三印刷厂印刷

开本 850×1168毫米 1/32　印张24 1/16　字数 625千

1991年8月第1版　1991年8月第1次印刷

印数：1—12000册

ISBN 7-81023-500-1

O·47　　定价：9.85元

编者说明

本书根据〈全国高等教育自学考试指导委员会 土 建类专业委员会〉于 1985 年拟订的“高等数学自学考试大纲”以及经国家教委批准由 〈工科数学课程指导委员会〉 印发的“高等数学 课程教学基本要求”的精神，参照〈江苏省自学考试指导委员会〉于1984年公布的微机、工民建专业“高等数学自学考试大纲”的要求而编写的。其内容能满足江苏省自学考试开考专业，即微机、工民建、机制专业以及其它工科专业对“高等数学”课程的要求。并考虑到自学的特点，照顾到自学学员的特殊需要，着重于基本概念、基本理论和基本方法的阐述与讲解。并配有习题、思考题、阶段小结、各章总结、复习题及自我检查题等，便于自学、自查，力求做到无师自通。

本书是〈江苏省自学考试指导委员会〉组织专为微机、工民建、机制专业自学考试“高等数学”课程撰写的专用教材，也可作为工科各专业函授、夜大学、业余教育、职工大学、干部班“高等数学”教材或参考书。

本书在〈江苏省自学考试指导委员会办公室〉的具体领导下，由〈东南大学成人教育学院〉组织有关数学教师编写而成。各章分工为：第一、八章吴学澄， 第二、六章罗庆来， 第三、十章王贵英， 第四、七章黄炳生， 第五章许玉筠， 第九、十一章宋柏生。全书由吴学澄同志负责统稿。

王元明教授认真审阅了书稿，提出了许多宝贵的修改意见，使本书增色不少，在此谨表衷心的感谢。

本书的出版得到《江苏省自学考试指导委员会办公室》、《东南大学成人教育学院》以及任宗礼同志的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者学术水平与经验有限，加之时间仓促，书中疏漏错误之处在所难免，谨请广大读者批评指正。

编　者　1990.8

目　录

第一章 函 数

数学研究的对象是现实世界里的空间形式和数量关系．中学学过的代数、几何、三角等都属于常量的数学．几何里讨论一个三角形时，这个三角形在所论问题中是固定不变的，不能前后不同；代数里解方程求根，虽然求解过程中方程不断等价变形，最后求出它的根来，但在整个求解中方程的根（这是我们解方程求根所最关心的量）前后却是固定不变的．这就是常量的数学，又称为初等数学．社会实践的不断发展，常量数学就不够用了，于是研究变化现象和变化过程的数学工具——变量的数学就应运而生，这就是高等数学．高等数学主要讨论现实世界中变化现象和变化过程在量方面的反映．这就需要有方法把所要讨论的变化现象和过程的量的方面表示出来，表示变化现象和过程的数学工具就是函数．函数是高等数学最重要的基本概念之一．简单地说，函数就是客观事物在量的方面抽象出来的变化规律．研究和了解函数各方面的属性，也就从量的方面掌握了事物变化的客观规律．

本章主要讨论函数概念、函数的某些属性、复合函数、基本初等函数和初等函数概念．

§1-1 函数概念

1．常量与变量

我们在生产活动和科学研究中，总要遇到各种各样的量，例如时间、质量、面积、温度、速度、电阻等．用数学处理问题时，总

是撇开这些量所具有的具体实际意义而用数来表达它们．在所讨论的某一变化过程中，参与该过程的各种量有些是变化的，可以取各种不同的数值；而有些是不变化的，保持同一个固定的数值．例如密封容器中气体在受热的过程中，它的体积、气体的分子数是不变的，但气体的温度、压强却是变化的．在一个问题里，能取不同数值的量，即可以变化的量，称为变量，常以x，y，z，…来表示；而始终保持同一数值的量，即不变化的量，称为常量，常以a，b，c，…来表示．一个量所取的每一个数值都是一个实数，因而可以用数轴上的一个点来表示它．如果这个量是常量a，则用数轴上一个定点来表示；如果这个量是变量x，则用数轴上一个动点来表示．今后讲到数就提到它相应的点，讲到数轴上的点就想到相应的数．通常，点、数常混起来说，不明显地区分它们．

应当注意，常量与变量的区分依赖于所讨论的问题．同一个量在某种问题中是常量，在另一种问题中却可以是变量．例如，秤量一个物体的重量时要分清在地球表面同一地方秤量，还是在不同地方秤量．在同一地方秤量时，确定物体重量的重力加速度是常量；在不同地方秤量时，重力加速度就不能认为是常量而是变量．

2．区间、邻域

客观现象中出现的变量，它所能取的值常常有一个范围．例如，观察运动员100米跑成绩是10秒整。那末在发令枪响到运动员到达终点为止这一过程中，运动员跑步所花的时间t以及该时运动员离起跑线的距离S都是变量．变量t允许取值的范围是从0到10之间的一切实数，而变量S允许取值的范围是从0到100之间的一切实数。为此我们常常用区间来表示这种范围．

设a，b为两实数且$a<b$，满足$a<x<b$的实数x的全体叫做开区间，记作(a, b)；满足$a\leqslant x\leqslant b$的实数x的全体叫做闭区间，记作$[a, b]$；满足$a\leqslant x<b$的实数x的全体叫做半开区间，记作$[a, b)$；

满足$a<x\leqslant b$的实数x的全体叫做半开区间，记作$(a, b]$．开区间、闭区间、半开区间统称区间。a与b称为区间的端点，“开”与“闭”的差别就在于是否包括端点．包括端点的用方括号表示，不包括的用圆括号表示；只包括一个端点的就是半开区间．区间在数轴上的直观表示见图1-1-1。

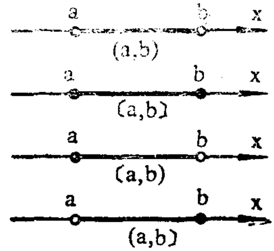

图 1-1-1

以上所说的区间也称为有限区间．有时变量的取值并不局限在一段有限的范围内，所以还有所谓无限区间．我们把实数x的全体记成$(-\infty、+\infty)$或写成$-\infty<x<+\infty$，这里$-\infty$、$+\infty$分别读作负无穷大、正无穷大，这是一个无限区间．把满足不等式$x<b$、$x\leqslant b$、$x>a$、$x\geqslant a$的实数x的全体分别记作$(-\infty, b)$、$(-\infty, b]$、$(a, +\infty)$、$[a, +\infty)$，它们也都是无限区间．也可以把它们分别写成$-\infty<x<b$、$-\infty<x\leqslant b$、$a<x<+\infty$、$a\leqslant x<+\infty$。

高等数学讨论问题时，往往要研究在x_0点处的某种性质，但却又不能孤立地静止在x_0点处讨论，而必须在x_0点左右附近处全面地来考察，才能得出在x_0点处的某种性质的结论．这种情形今后会遇到多次．所以我们引入一个名称和记号，来表达x_0点的附近范围．我们称满足$|x-x_0|<\delta$的实数x的全体为x_0点的δ邻域，其中$\delta>0$，并记作$N(x_0, \delta)$。x_0点的δ邻域就是开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$．显然，x_0点的δ邻域，在几何上就是数轴上与x_0点的距离小于δ的点的全体，如图1-1-2所示．有时讨论的问题中需要将x_0点本身排除在外，这种邻域称为x_0点的去心邻域，记作$N(\hat{x_0}, \delta)$，它就是满足$0<|x-x_0|<\delta$的实数x的全体，如图1-1-3所示。

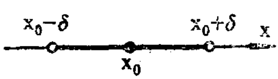

图 1-1-2

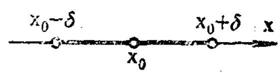

图 1-1-3

3. 函数

在一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量参与这个现象或过程而变化着，但这几个变量并不是毫不相干互相独立地在变化着，而是彼此有联系地、遵循某种规律协同地变化着。我们就两个变量的情形看几个例子(多于两个变量的情形将在第十章多元函数微分法中再讨论)。

例1 自由落体运动。

设物体由不太高的空中自由下落，下落的时间记为 t，落下的距离记为 S，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那末从开始下落到物体落地这一段时间内 t 与 S 都在变化着，它们之间有关系 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 相联系着，其中 g 是重力加速度。如果物体着地时刻为 T，那末当 t 取 $[0, T]$ 中的任何一个值时，按照这个关系就可以唯一地确定 S 的一个相应的值。

例2 圆的面积 A 与圆的半径 R 之间有关系 $A=\pi R^2$ 相联系着。对于 R 取 $(0, +\infty)$ 中的任何一个值时，按照这个关系可以唯一地确定 A 的一个相应的值。

例3 气象台气温记录仪所记下的某一天24小时内的气温曲线，如图1-1-4所示，横坐标 t 表示时刻，纵坐标 T 表示气温。那末这条自动仪器所记录下来的曲线，就表示了时间变量 t 与温度变量 T 之间的联系。对于 t 取 $[0, 24]$ 之间的任何一个值 t_0，先找出曲线上横坐标为 t_0 的点，再找出该点的纵坐标，就可以唯一地确定相应于 t_0 时刻的气温 T_0。

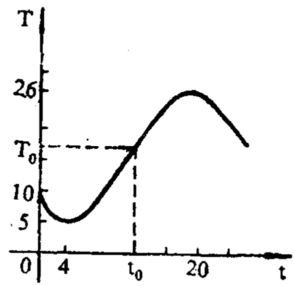

图 1-1-4

撇开上述例子中所考虑的量的实际意义，我们看到它们都是表

达了两个变量在变化过程中协同变化的依赖关系。这种协同变化的依赖关系，简单地说就是一种对应规则，当其中一个变量在某一范围内每取一个数值时，按照这个规则就可以唯一确定另一个变量所应取的相应的值。这两个变量之间的协同变化的对应关系就是函数概念的实质。

定义 设在某个变化过程中有两个变量x和y，当变量x在它的变化范围内每取一个数值时，按照某种给定的对应规则可以唯一确定变量y的相应的值，则称变量y为变量x的函数，记作$y=f(x)$。称变量x为自变量，变量y为因变量，因变量y与自变量x之间的对应规则称为函数关系，自变量x的变化范围称为函数的定义域。

上面例1自由落体运动中变量S是变量t的函数，函数关系是$S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$，即因变量S等于自变量t的平方乘以g再除以2，定义域是$[0, T]$。例2圆面积A是圆半径R的函数，函数关系是$A=f(R)=\pi R^2$，即因变量A等于自变量R的平方乘以π，定义域是$(0, +\infty)$。例3气温曲线表示气温T是时刻t的函数，函数关系$T=f(t)$是从横坐标上找到自变量t所取的值后得到气温曲线上相应的点，从曲线上这一点的纵坐标得出因变量T的值，定义域是$[0, 24]$。虽然例3中函数关系不是用一个算式表达出来，但它确确实实表达了由自变量t所取的值如何唯一地确定因变量T所取的相应的值这一对应规则。函数关系(即对应规则)的表达法常用的有公式法、图形法和表格法。公式法如例1例2所示，是用数学运算的式子表明如何由自变量x得到相应的因变量y，这是一种便于数学研究的表达法，也是高等数学中用得最多的一种表达法。图形法如例3所示气温曲线，它给出了时刻t和气温T之间的对应关系，图形法的优点是比较直观一目了然，变量变化的特点一看就知道，缺点是不便于进行数学的分析研究，相应的因变量的值也不能很精确地得出。表格法如我们过去使用过的对数表、正弦函数表、正切函数表等等，它们分别表达

了对数函数、正弦函数、正切函数等的自变量与因变量间的对应规则。又如实验、观察记录下来的数据也常常是以表格的形式表达变量间的函数关系。表格法的缺点是不便于作理论上的分析研究。

4．函数定义域的求法和函数值的计算

我们在研究函数关系时，要十分注意它的定义域。因为只有自变量在定义域内取值时，因变量才有确定的相应的值，即函数才有意义。在考虑函数的定义域时，对于反映实际问题的函数关系，定义域应该从实际问题的具体意义来确定．如例 1 自由落体运动$S=\frac{1}{2}gt^2$的定义域为$[0,T]$，在这个区间以外来说落体下落距离S与下落时间t之间的这种函数关系是毫无意义的。我们知道自由落体落地之后虽然时间在继续进行下去，但落下的距离却不再增加，物体躺在地上不再下落，这时S与t之间不再有$S=\frac{1}{2}gt^2$这样的关系了。而对于一个单用数学式子表示的函数，通常应注明它的定义域，在没有注明时，就应理解为它的定义域是由使这个数学式子有意义的一切x的值所构成。下面举例说明如何从数学式子本身来确定函数的定义域。

例4　确定下列函数的定义域：

(1) $y=x^3+2x^2-7x+8$；　　(2) $y=\dfrac{x^3+4x-7}{x^3-1}$；

(3) $y=\sqrt{25-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{\sqrt{8-x}}{\lg(2x-1)}$．

解　(1) 函数$y=x^3+2x^2-7x+8$在x取任何实数时都有意义，所以它的定义域是$(-\infty,\ +\infty)$。

(2) 函数 $y=\dfrac{x^3+4x-7}{x^3-1}$在分母为零时是没有意义的，因此在$x=1$时函数没有意义，而$x$为任何其它实数时函数都有意义。所

以它的定义域是$x \neq 1$的所有实数，或用区间表示为$(-\infty,1)$及$(1,+\infty)$。

(3) 函数 $y=\sqrt{25-x^2}$ 只有在 $25-x^2 \geqslant 0$ 时二次根式才有意义，亦即在$x^2 \leqslant 25$或 $|x| \leqslant 5$时，函数才有意义。所以它的定义域是$[-5, 5]$。

(4) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{8-x}}{\lg(2x-1)}$ 的分子在$8-x \geqslant 0$即$x \leqslant 8$时有意义；分母是对数，只有在$2x-1>0$ 即 $x>\dfrac{1}{2}$时才有意义；但分母又不能为零，而$2x-1 \neq 1$即$x \neq 1$时分母才不为零，所以它的定义域是$\dfrac{1}{2}<x \leqslant 8$且$x \neq 1$，用区间表示就是 $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ 及$(1, 8]$。

函数$y=f(x)$的自变量x在函数的定义域里取定一个值x_0 时，因变量y所取的与x_0相对应的值称为函数$y=f(x)$在$x=x_0$ 处的函数值，记作$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$。

对于用数学式子表达的函数，计算函数值时只要对式子中的x用指定的值x_0代入即可。

例5 设$y=f(x)=3x^2+5x+4$，求 $f(0)$、$f(-5)$、$y|_{x=1}$、$y|_{x=-1}$、$f(a+1)$及$f(a+h)-f(a)$。

解 我们可以将函数$y=f(x)=3x^2+5x+4$想像为一组运算的框架：

$$f(\quad)=3\cdot(\quad)^2+5\cdot(\quad)+4.$$

于是：

$$f(0)=3\cdot 0^2+5\cdot 0+4=4,$$
$$f(-5)=3\cdot(-5)^2+5\cdot(-5)+4=54,$$
$$y|_{x=1}=3\cdot 1^2+5\cdot 1+4=12,$$
$$y|_{x=-1}=3\cdot(-1)^2+5\cdot(-1)+4=2,$$
$$f(a+1)=3\cdot(a+1)^2+5\cdot(a+1)+4=3a^2+11a+12,$$

$$f(a+h)-f(a)=3\cdot(a+h)^2+5\cdot(a+h)+4-[3\cdot a^2+5\cdot a+4]=6ah+5h+3h^2.$$

例6 已知$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$求 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$、$f\left(\dfrac{b}{a}\right)+f\left(\dfrac{a}{b}\right)$、$f\left(f\left(\dfrac{b}{a}\right)\right)$，并证明$f(-x)=f(x)$及在$x\neq0$时 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$。

解 $$f\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2},$$

$$f\left(\frac{b}{a}\right)+f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}+\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}$$

$$=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=0,$$

$$f\left(f\left(\frac{b}{a}\right)\right)=f\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)=\frac{\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)^2-1}{\left(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right)^2+1}$$

$$=\frac{(b^2-a^2)^2-(b^2+a^2)^2}{(b^2-a^2)^2+(b^2+a^2)^2}=-\frac{2a^2b^2}{b^4+a^4},$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=f(x).$$

在$x\neq0$时，$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}=\frac{1-x^2}{x^2+1}=-\frac{x^2-1}{x^2+1}=-f(x).$$

一个函数$y=f(x)$的自变量取遍定义域中的一切数值时，所得到的相应的函数值的全体称为函数的值域.不过一般来说，给定了函数关系(即对应规则)和函数的定义域后，函数值及其全体就可以计算出来，所以一般不需再指明函数的值域.对一个函数来说最重要的一是函数关系(即自变量与因变量间的对应规则)，二是定义域(即自变量允许取值的范围)，这两点给定了函数就完全确定了。如果定义域相同，对应规则也相同，即使是使用不同的字母来表示自变量和因变量，也还是说的同一个函数。例如$S=\frac{1}{2}gt^2$定义域[0，5]与$y=\frac{1}{2}gx^2$定义域[0,5]是表示同一个函数。但是定义域不同或者对应规则不同，那末即使使用相同的字母来表示自变量和应变量，它们也仍然是不同的函数。例如在$(-\infty,1]$中$y=\sqrt{1-x}$与$y=\sqrt[4]{1-x}$当然是两个不同的函数，而$S=\frac{1}{2}gt^2$ [0，5]与$S=\frac{1}{2}gt^2$ [10,15]也还是两个不同的函数。所以通常把一个函数的函数关系（对应规则）和定义域称为是函数的两要素.当然我们也应注意，所谓函数关系(对应规则)是指最本质的事，即什么样的x值对应于什么样的y的值，而不是指表达这种对应规则的形式。例如以数学式子$y=f(x)=|\sin x|$所表达的定义域为$(-\infty, +\infty)$的函数和以数学式子$y=f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$所表达的定义域为$(-\infty,+\infty)$的函数，应当如实将它们看作为同一个函数，虽然它们有颇不相同的表达式。

5. 分段表示的函数

我们应该注意，函数用公式法表示时，对于自变量的一切值因变量的对应规则不一定是用一个数学式子表达出来的。可能对于自变量在定义域内的某一部分范围内用某一个数学式子表出，而在定义域的另一部分范围内用另一个数学式子表出。例如变量y是变量x的函数$y=f(x)$，定义域是[0，5]，而当$0\leqslant x\leqslant 1$时对应规则用数