线性代数

（增订本）

$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1m} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}
\end{matrix}
$$

黄庆祥
米天林
郭　忠
黄汉侠
符荣节

湖南科学技术出版社

线性代数

（增订本）

黄庆祥　米天林
黄汉侠　郭　忠
符荣节

湖南科学技术出版社

前 言

以电子计算机为工具的计算技术的发展引起了科学技术的深刻变革。迅速地普及和推广使用计算机是当前技术更新热潮中的一项重要任务。线性代数是现代计算技术所必需的一门数学基础课程，是工程技术人员所必须掌握的数学工具之一。

本书是参照米天林编写的线性代数和湖南大学编写的线性代数（详见后记）根据1986年国家教委制定的“线性代数教学基本要求”，由黄庆祥、米天林、郭忠、黄汉侠、符荣节等五人重新编写的。书稿完成后，前五章由黄庆祥定稿，后两章由米天林定稿。

在本书中，我们主要介绍矩阵理论、线性空间及线性变换和二次型的基本概念，特别是矩阵理论，它不仅是全书的核心，而且在其他实际问题中都有广泛的应用。

在编写时充分兼顾了高等工业院校和高等财经院校对本课程的共同要求。这既是本书的特点，也是我们的一种新的尝试。为了便于教和学，特别为了自学考试者学好这门课，特地编写了“线性代数教学指导”这一章，在其中明确指出前六章中各章的基本要求、重点和难点以及应注意的问题，并再列举一些典型例题以加深和巩固对基本概念的理解和掌握。

本书适合作工科各专业及经济管理、财经院校的本科生、函授生的教材，也可作为上述各专业的技术、管理人员的参考书。对准备参加高教自学考试的人员，本书可作为主要读物。

本教材各章均附有习题，书末附有习题答案。投入产出数学模型这一章仅供需要这方面知识的部份专业选用。全书中带*号的部份，可酌情考虑选用与否。

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，希望读者提出宝贵意见，以便进一步修改完善。

编　者

1987年5月于长沙

目 录

第一章 行列式……………………………………………………（1）
§1 n阶行列式的定义……………………………………（1）
（一）二阶行列式与三阶行列式……………………………（1）
（二）排列与逆序数…………………………………………（2）
（三）n阶行列式的定义………………………………………（5）
§2 n阶行列式的性质……………………………………（7）
（一）n阶行列式的性质 …………………………………（7）
（二）行列式的展开…………………………………………（12）
§3 克莱姆法则 ……………………………………………（19）
（一）克莱姆法则……………………………………………（19）
（二）行列式的乘法…………………………………………（22）
习题一 ………………………………………………………（23）
第二章 矩阵 ………………………………………………（27）
§1 矩阵概念与运算………………………………………（27）
（一）矩阵的概念……………………………………………（27）
（二）矩阵的运算……………………………………………（29）
（三）转置矩阵………………………………………………（37）
§2 方阵……………………………………………………（39）
（一）方阵概念及其性质……………………………………（39）
（二）一些重要的特殊方阵…………………………………（40）
§3 矩阵的秩与矩阵的初等变换…………………………（45）

(一) 矩阵的秩……………………………………………………………………(45)
(二) 矩阵的初等变换……………………………………………………………(47)
(三) 初等矩阵……………………………………………………………………(53)
§4 逆矩阵及其求法……………………………………………………………(56)
(一) 逆矩阵概念及其求法之一………………………………………………(56)
(二) 逆矩阵的基本性质………………………………………………………(60)
(三) 逆矩阵求法之二…………………………………………………………(62)
§5 正交矩阵与分块矩阵………………………………………………………(66)
(一) 正交矩阵……………………………………………………………………(66)
(二) 分块矩阵的概念……………………………………………………………(68)
(三) 分块矩阵的运算……………………………………………………………(69)
(四) 分块矩阵的转置矩阵………………………………………………………(73)
(五) 准对角形矩阵………………………………………………………………(74)
习题二 ……………………………………………………………………………(76)
第三章 线性空间和线性变换………………………………………………(86)
§1 n 维向量空间………………………………………………………………(86)
§2 向量的线性相关与线性无关…………………………………………………(89)
(一) 线性相关与线性无关概念…………………………………………………(89)
(二) 向量组线性相（无）关的矩阵判定法……………………………………(92)
(三) 向量组的最大线性无关组…………………………………………………(96)
§3 线性空间 ………………………………………………………………………(99)
(一) 线性空间的定义……………………………………………………………(99)
(二) 线性空间的维数、基底和坐标……………………………………………(101)
(三) 同一向量对不同基的坐标…………………………………………………(103)
(四) 子空间………………………………………………………………………(106)
§4 线性变换 ………………………………………………………………………(108)
(一) 线性变换概念………………………………………………………………(108)
(二) 线性变换关于给定基的矩阵………………………………………………(109)
(三) 线性变换的逆变换…………………………………………………………(114)

(四) 线性变换在新基下的矩阵……………………………………(117)
(五) 线性变换的特征值与特征向量……………………………………(119)
习题三 ……………………………………………………………………(122)
第四章 线性方程组……………………………………………………(129)
§1 线性方程组的相容性和解法 …………………………………(129)
(一) 相容性……………………………………………………………(129)
(二) 消元法……………………………………………………………(135)
§2 齐次线性方程组，基础解系 …………………………………(147)
(一) 齐次线性方程组的解……………………………………………(147)
(二) 基础解系…………………………………………………………(150)
(三) 线性方程组解的结构……………………………………………(157)
习题四 ……………………………………………………………………(160)
第五章 二次型 ………………………………………………………(166)
§1 二次型及其矩阵表示 …………………………………………(166)
§2 化二次型为标准形 ……………………………………………(170)
§3 用正交变换化二次型为标准形 ………………………………(180)
(一) 向量的内积与长度………………………………………………(181)
(二) 线性无关向量组的正交化和单位化……………………………(182)
(三) 正交变换及其在化二次型为标准形上的应用…………………(187)
§4 用初等变换化二次型为标准形…………………………………(199)
(一) 矩阵合同的问题…………………………………………………(199)
(二) 对称矩阵与对角形矩阵的合同…………………………………(202)
(三) 用初等变换化二次型为标准形…………………………………(204)
§5 正定二次型 ……………………………………………………(209)
习题五 ……………………………………………………………………(212)
第六章 投入产出数学模型 …………………………………………(214)
§1 投入产出法的概况………………………………………………(214)
(一) 什么是投入产出法………………………………………………(214)

(二) 投入产出法的产生……………………………………………………(215)
(三) 投入产出法的推广情况…………………………………………(216)
(四) 投入产出模型的种类……………………………………………(217)
§2 直接消耗和间接消耗的概念 ………………………………(218)
§3 投入产出平衡表 …………………………………………………(221)
(一) 部门分类的准则……………………………………………………(221)
(二) 投入产出平衡表及其结构……………………………………(222)
(三) 投入产出表的重要作用………………………………………(225)
§4 投入产出数学模型…………………………………………………(226)
§5 直接消耗系数及其性质 ………………………………………(228)
(一) 直接消耗系数的概念……………………………………………(228)
(二) 平衡方程组的矩阵表示…………………………………………(229)
(三) 直接消耗系数矩阵A的性质…………………………………(231)
§6 完全消耗系数及其计算方法 …………………………………(235)
§7 实物形态的投入产出模型实例 ………………………………(242)
§8 投入产出综合平衡模型的主要应用…………………………(246)
(一) 在经济分析方面的应用…………………………………………(246)
(二) 在编制国民经济计划中的应用………………………………(250)
习题六 ………………………………………………………………………(253)
第七章 线性代数教学指导 ………………………………………(257)
§1 行列式 ……………………………………………………………(257)
§2 矩阵…………………………………………………………………(267)
§3 线性空间和线性变换 …………………………………………(279)
§4 线性方程组 ………………………………………………………(297)
§5 二次型………………………………………………………………(309)
§6 投入产出数学模型 ………………………………………………(319)
习题答案……………………………………………………………………(321)

第一章
行列式

行列式最初是作为求解线性方程组而引入的．现在它已成为研究线性代数的一个重要工具，对行列式的概念，我们并不陌生，中学数学中就曾提到过二阶和三阶行列式以及行列式的性质．我们在这一章将建立 n 阶行列式的概念，讨论它的性质、计算方法以及用行列式求解线性方程组的克莱姆(Cramer) 法则．

§1 n阶行列式的定义

(一) 二阶行列式与三阶行列式

定义1 设有数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1—1—1}$$

则称数"$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$"为对应于数表(1—1—1) 的二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

习惯上用字母D表示行列式：即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中横排称为行，纵排称为列。而 a_{ij} 表示第i行，第 j 列的元素。

定义2 设有数表

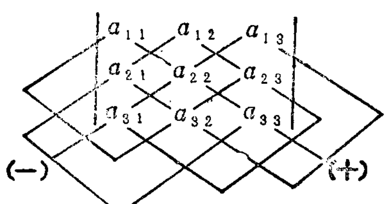
$$
\begin{matrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{matrix}
\qquad (1—1—2)
$$

则称数"$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$"为对应于数表（1—1—2)的三阶行列式，记为

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{vmatrix}
=\begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \end{matrix}
$$

其中横排称为行，纵排称为列，而a_{ij}表示第i行，第 j 列 的 元素。

三阶行列式计算可如下图



（二）排列与逆序数

三阶行列式按对角线展开的计算方法已不适用三阶以上的行列式。为了讲述 n 阶行列式的定义和证明 n 阶行列式的性质，引入排列和逆序数的概念。

将前 n 个自然数1，2，3，…，n 按照某一顺序排成一行，就称为一个 n 级排列。

例如，由1，2，3三个数，可以排成“1 2 3”，“1 3 2”，“2 1 3”，“2 3 1”，“3 1 2”，“3 2 1”等6个3级排列.

由 n 个数构成的全部 n 级排列共有 $n!$ 个。其中：1 2…n 称为标准顺序排列。

在排列中，我们关心的是各元素在排列中的前后次序，为此，引入

定义3 设 i、j 是一个排列中的两个数，且 $i>j$。若在排列中 i 在前，j 在后则称 i、j 在此排列中形成一个逆序。一个排列中所有逆序数目的总和称为该排列的逆序数，常记为 τ。

例1 求5级排列“53412”的逆序数。

解 考虑第一个数5：5，3；5，4；5，1；5,2；都形成逆序，再考虑第二个数3：3，1；3，2；形成逆序。第三个数4：4，1；4，2形成逆序。第四个数1：1与2不形成逆序。于是“53412”共有：$4+2+2+0=8$ 个逆序。所以此排列的逆序数 $\tau=8$。

定义4 一个排列当它的逆序数为偶数时，称此排列为偶排列，当它的逆序数是奇数时，称为奇排列。

例2 讨论下面排列的奇偶性。

(1) 352164。　　　　(2) 24153。

解 (1) 的逆序数是：“$2+3+1+0+1=7$”，所以(1)为奇排列，(2) 的逆序数是：$1+2+0+1=4$，所以(2)为偶排列。

定义5 将一个排列中两个位置上的数互换，而其余不动，则称对该排列作了一次对换。

例如 6 $\dot{3}$ 2 1 $\dot{5}$ 4 是 6 $\dot{5}$ 2 1 $\dot{3}$ 4 作了一次对换而得来

的

定理1 每一个对换变更排列的奇偶性。

证 分两种情况讨论。

(1) 相邻两数的对换：不妨设所给的 n 级排列为：

$$a_1 \cdots a_{i-1} \dot{a}_i \dot{a}_{i+1} a_{i+2} \cdots a_n. \qquad (1\text{—}1\text{—}3)$$

对换相邻的a_i、a_{i+1}得一个新的 n 级排列

$$a_1 \cdots a_{i-1} \dot{a}_{i+1} \dot{a}_i a_{i+2} \cdots a_n. \qquad (1\text{—}1\text{—}4)$$

由于（1—1—3）与（1—1—4）中a_1，$\cdots a_{i-1}$；$a_{i+2} \cdots a_n$ 次序不变，故它们中任何两个数的逆序不变．而a_i，a_{i+1}对换后仍在a_{i-1}之后，a_{i+2}之前，如果a_i，a_{i+1}在（1—1—3）中形成逆序，则在（1—1—4）中不再是逆序，即（1—1—3)比(1—1—4）多一个逆序；如果a_i，a_{i+1}在（1—1—3）中不成逆序，则在（1—1—4）中形成逆序，即（1—1—3）比(1—1—4）少一个逆序。故两排列有相异的奇偶性。

(2) 不相邻两数的对换．不妨设所给的 n 级排列为：

$$a_1 \cdots a_L \dot{a}_{L+1} \cdots \dot{a}_{L+S} a_{L+S+1} \cdots a_n \qquad (1\text{—}1\text{—}5)$$

对换不相邻的两个数 a_{L+1}，a_{L+S}，得新的 n 级排列

$$a_1 \cdots a_L \dot{a}_{L+S} \cdots \dot{a}_{L+1} a_{L+S+1} \cdots a_n. \qquad (1\text{—}1\text{—}6)$$

a_{L+1}，a_{L+S}中间夹了（$s-2$）个数。

由(1—1—5)变到(1—1—6)可以看成是经过 $2s-3$ 次相邻两个数的对换而成的。办法是：将a_{L+S}逐次与其前面的a_{L+S-1}，$\cdots a_{L+1}$作对换，共作了$s-1$次对换，使（1—1—5）变成为：

$$a_1 \cdots a_L a_{L+S} a_{L+1} \cdots a_{L+S-1} a_{L+S+1} \cdots a_n. \qquad (1\text{—}1\text{—}7)$$

再将(1—1—7)中a_{L+1}逐次与它后面的$a_{L+2} \cdots a_{L+S-1}$作对换，共作了$s-2$次对换，即变成了（1—1—6)，这样由（1—1—5）变为(1—1—6)，共作了$2s-3$次相邻两个数的对换．而每作一次相

邻两个数的对换排列的奇偶性改变，所以（1—1—5）与(1—1—6）有相异的奇偶性。

在 n($n\geqslant 2$) 级排列中，由定理可知奇、偶排列各占一半（即各有 $n!/2$ 个）。

（三）n阶行列式的定义

定义6 设 n 为正整数，n^2 个数排成 n 行 n 列（横的称行，纵的称列）的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \qquad (1—1—8)$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数，称为元素。今在每一行中选取一数，并且要求这样选取的 n 个数都在不同的列上，作这 n 个数的乘积

$$a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$$

算为一项，然后按一定的规则乘以 $+1$ 或 -1。将所得到的乘积项求代数和

$$\Sigma(-1)^{S+T}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}.$$

其中 S 是第一下标 α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$ 的逆序数，T 是第二下标 β_1，β_2 $\cdots$，β_n 的逆序数。称此和式为对应于数表(1—1—8)的 n 阶行列式。并记为：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Sigma(-1)^{S+T}a_{\alpha_1}\beta_1\cdots a_{\alpha_n}\beta_n.$$

特别地，当我们按行的标准顺序选取 n 个元素作乘积：$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$。则 n 阶行列式

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$ 〔注〕

其中τ是第二下标p_1，$p_2\cdots$，p_n，的逆序数

例3 计算下列n阶行列式

(1)
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2)
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3)
$$D_3=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ 0 & & a_{2n-1} & \\ & ⋰ & & \\ & & & 0 \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

(4)
$$D_4=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 (1) 按定义每行取一个元素且取的这n个元素属于不同的列，那末D_1中只有一项

$$a_{11}\quad a_{22}\quad\cdots\quad a_{nn}$$

可能不为零，而其他项必为零。

所以 $D_1=(-1)^{S+T}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 而第一下标是标准顺序排列：$s=0$，同样$T=0$。即

注：$\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum(-1)^{S+T}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$的证明可参看北京大学编的“高等代数”。

$$D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) D_2中不为零的项只可能在第一行中取a_{11}，当取定a_{11}后，在第二行中只能取a_{22}，当a_{11}，a_{22}取定后在第三行中只能取a_{33}，……。于是D_2中只有一项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$可能不为零。而且$s=0$，$T=0$

所以 $$D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) D_3中不为零的项只可能是$a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$，而$s=0$，

$T=(n-1)+(n-2)\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$所以

$$D_3=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

(4) D_4中也只一项：$a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$可能不为零。所以

$$D_4=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

§2 n阶行列式的性质

按照n阶行列式的定义计算行列式常常是很麻烦的。为给出计算行列式的有效方法，我们先讨论行列式的性质。利用这些性质，可以简化行列式的计算。

(一) n阶行列式的性质

性质1 行列式与它的转置行列式相等(把行列式的行变成相应的列得到的新行列式叫做原行列式的转置行列式)。

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

转置后

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$b_{\lambda\mu}=a_{\mu\lambda}$　$\lambda=1, 2, \cdots n$　$\mu=1, 2, \cdots n$。

D中任取一项设为：$(-1)^{S+T}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，那末$D'$中必有相应的项：$(-1)^{T+S}b_{j_1i_1}b_{j_2i_2}\cdots b_{j_ni_n}$。$s$是$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数，$T$是$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数。又因为$b_{j_1i_1}=a_{i_1j_1}$，$\cdots$，$b_{j_ni_n}=a_{i_nj_n}$。因此对$D$中任一项，$D'$中必有一项与之相等，反之也一样。

故　　$D=D'$

性质1说明在行列式中行与列所处地位相同，因此凡是对行成立的命题对列也成立。

性质2　对换行列式的任意两行（列），行列式仅改变符号。

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对换p，q两列后得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1p} & \cdots & b_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2p} & \cdots & b_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & b_{np} & \cdots & b_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中$b_{iq}=a_{ip}$，$b_{ip}=a_{iq}$（$i=1, 2, \cdots n$）其余与D相同。在D中任取一项（连同符号一起）

$$(-1)^{S+T}a_{\alpha i}\cdots a_{\beta p}\cdots a_{\gamma q}\cdots a_{\lambda L}.$$

s是$\alpha\cdots\beta\cdots\gamma\cdots\lambda$的逆序数，$T$是$i\cdots p\cdots q\cdots l$的逆序数。$D_1$中必

有一相应的项

$$(-1)^{S+T'}a_{\alpha i}\cdots b_{\beta q}\cdots b_{\gamma p}\cdots a_{\lambda L}.$$

S是$\alpha\cdots\beta\cdots\gamma\cdots\lambda$的逆序数，$T'$是$i\cdots q\cdots p\cdots l$的逆序数。由于$S$没有变。$T'$与$T$有相异的奇偶性。所以$D$中任一项，$D_1$中必有一项与它绝对值相等而符号相反，反之也一样。故

$$D=-D_1.$$

推论1 若行列式有两行(列)对应元素相同，则此行列式等于零

性质3 把行列式的任一行(列)的所有元素同乘以数k，等于该行列式乘以数k。

证 设把D的第i行的元素都乘以数k，得

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按行列式的定义

$$\begin{aligned} D_2 &= \sum(-1)^{S+T}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots ka_{i\beta_i}\cdots a_{\alpha_n\beta_n} \\ &= k\sum(-1)^{S+T}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{i\beta_i}\cdots a_{\alpha_n\beta_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

推论2 若行列式的两行（列）其对应元素成比例，则该行列式等于零。

这是性质3和推论1的直接结果。

推论3 若行列式有一行（列）的元素全为零，则此行列式等于零。

这可由推论2得出

性质4. 若行列式中某一行(列)的各元素是两个数的和，