○高等学校《自学辅导与应试指南》丛书○

离散数学

解题指南

黄天发　罗　岚　厉　军　编

电子科技大学出版社

●高等学校《自学辅导与应试指南》丛书●

《离散数学》解题指南

黄天发　罗　岚　厉　军　编

电子科技大学出版社

内 容 提 要

1. 指出必须理解和掌握的基本要求。
2. 以定义、定理的形式给出《离散数学》各章节的基本内容。
3. 以例题方式列出大量典型题目，来阐述基本概念及定理的理解和应用。
4. 列出一些自测题及答案，供读者检查基本内容的理解及掌握的程度。

声 明

●高等学校《自学辅导与应试指南》丛书●

《离散数学》解题指南

黄天发 罗 岚 历 军 编

出 版：电子科技大学出版社 （成都建设北路二段四号，邮编，610054）
责任编辑：舒 标 李 松 丁 亮
发 行：新华书店
印 刷：四川建筑印刷厂
开 本：787×1092 1/16 印张：18.625 字数：453.3 千字
版 次：1998 年 12 月第一版
印 次：1998 年 12 月第一次
书 号：ISBN 7—81065—067—X/O・2
印 数：1—3000 册
定 价：20.00 元

前　　言

《离散数学》解题指南是根据《离散数学》教学大纲的要求，对各类（本科、大专、自学考试、电大、夜大、职大和函大等）教学和考试中的重点、难点编写的。书中按章列出基本要求、基本内容，例题分析和自测题及答案，以便读者阅读、参考和查阅。其中：

1. 基本要求　指出读者必须理解和掌握的基本概念和基本内容。

2. 基本内容　列出各章节的基本内容，它们构成该章的一个完整有机的主体，是考前复习、记忆的简洁资料。

3. 例题分析　选用大量例题，并逐题给出详细的解答、给读者提供了理解基本概念，灵活应用定义或定理解题的思路和实例。

4. 自测题及答案　自测题中，列举了离散数学考试题中，可能出现的基本题型。答案则是解答这些题的参考解答。这些模式有利于考生自我检查参加《离散数学》考试的能力。

本书适合学习《离散数学》并准备参加考试的各类考生，可作为学习、参考书及考前复习的基本读物。对各类学校的《离散数学》课教师也有教学参考价值。

本书由黄天发编写第一章和第三章，罗岚编写第二章，历军编写第四章。全书由黄天发定稿。

本书得到陈敦琦、余锦奎、韦民骏、包昌琴和赖先惠等的，或对内容和格式的宝贵建议，或对图例的精心设计，或对编写的热情鼓励。谨向以上同志表示衷心的感谢和谢意。

限于编者水平，必有不足之处，希同行和读者指正。

编　　者
1998 年 6 月
于电子科技大学

目　　录

第一章　数理逻辑

第二章　集合论

第三章　代数系统

第四章　图　论

第一章　数理逻辑

1.1　命题逻辑

1.1.1　基本要求[①]

1. 理解命题、命题联结词、自然语言的形式化。
2. 了解合成公式，熟悉真值。
3. 熟悉重言式及其判定。
4. 熟悉命题逻辑的等值演算。
5. 熟悉已知命题公式的范式(析(合)取范式，主析(合)取范式)。
6. 掌握应用基本等值式、基本蕴涵式证明逻辑推理。

1.1.2　基本内容

定义 1.1.1　命题是具有唯一真值的陈述句。所谓真值就是语句为真或为假的这种性质。当一个语句为真时，则称它的真值为真；当一个语句为假时，则称它的真值为假。命题的真值可以简称为命题的值。

真值的符号化：一般用 1(或 T)表示“真”，用 0(或 F)表示“假”。对于一个确定的命题，它的值不是 1 就是 0。因此，我们有时也用 1 表示抽象的“真命题”，用 0 表示抽象的“假命题”。

定义 1.1.2　由简单句构成的命题称为简单命题。由简单命题和命题联结词(或连结词)复合而成的命题称为复合命题。

简单命题一般用大写英文字母 $P,Q,R,\cdots,P_i,Q_i,R_i,\cdots$ 表示。将符号放在它所表示的命题之前。

定义 1.1.3　真值是确定的简单命题称为命题常项。真值可变化的简单句称为命题变项。

定义 1.1.4　设 P 是一个命题，复合命题“非 P”(或 P 的否定)称为 P 的否定，记作 $\neg P$，读作非 P，符号 $\neg$ 称为否定联结词。$\neg P$ 是真当且仅当 P 是假。

定义 1.1.5　设 P,Q 是两个命题，复合命题“P 并且 Q”称为 P,Q 的合取，记作 $P\wedge Q$，读作 P 且 Q，符号 $\wedge$ 称为合取联结词。规定 $P\wedge Q$ 是真当且仅当 P 和 Q 同时是真。

定义 1.1.6　设 P,Q 是两个命题，复合命题“P 或者 Q”称为 P,Q 的析取，记作 $P\vee Q$，读作 P 或 Q，符号 $\vee$ 称为析取联结词。规定 $P\vee Q$ 是真当且仅当 P,Q 至少有一个是真。

定义 1.1.7　设 P,Q 是两个命题，复合命题“P 或 Q 恰有一个成立”称为 P,Q 的异或，记作 $P\bigtriangledown Q$，符号 $\bigtriangledown$ 称为异或联结词。规定 $P\bigtriangledown Q$ 是真当且仅当，P,Q 恰有一个是真。

---

① 对基本要求的高低用不同的词汇加以区分：对概念、理论从高到低用“理解”、“了解”、“知道”三级区分；对运算方法从高到低用“熟练掌握”、“掌握”、“会”或“能”三级区分。“熟悉”则相当于“理解”并“熟练掌握”。以下同。

定义 1.1.8 设P,Q是两个命题,复合命题"如果P则Q"称为P蕴涵Q,记作P→Q,符号→称为蕴涵联结词。规定P→Q是真当且仅当P真和Q假不同时成立。

P→Q又可称为P,Q的蕴涵式,其中P称为蕴涵式的前件(或前提),而Q称为蕴涵式的后件(或结论)。

定义 1.1.9 设P,Q是两个命题,复合命题"P当且仅当Q"称为P等价于Q,记作P↔Q,符号↔称为等价联结词。规定P↔Q是真当且仅当P,Q真值相同。

定义 1.1.10 命题变项称为命题符号,或称为抽象的命题。

我们也用大写英文字母P,Q,R,…等代表一个抽象的命题。

定义 1.1.11 命题符号称为原子。

定义 1.1.12 (合式公式)递归定义如下:

(1)P,Q,R,…,P_i,Q_i,R_i,…,1,0是合式公式,其中P,Q,R,P_i,Q_i,R_i是命题常项或原子,1是真命题,0是假命题。合式公式可简称为公式。

(2)如果A,B是公式,则(¬A),(A∧B),(A∨B),(A→B),(A↔B)也是公式。

(3)只有有限次地应用(1),(2)构成的符号串才是合式公式。

合式公式或称为命题公式。

定义 1.1.13 在定义1.1.12中,A,B这样的符号表示的是任意的公式,即不是某个具体的公式,这些符号称为元语言符号。符号P,Q,P→Q等表示的命题公式,即具体的公式,称为对象语言符号。对象语言是指用来描述研究对象(此处是命题逻辑)的语言,而元语言是指用来描述对象语言的语言。元语言和对象语言是不同研究层次上的语言。

定义 1.1.14 设A是命题公式,P_1,P_2,…,P_n是出现在A中的所有命题变项。给P_1,P_2,…,P_n指定一组真值,称为对A的一个赋值(或解释或指派)。如果指定的一组值使A的值为真,则称这组值为A的成真赋值;如果使A的值为假,则称这组值为A的成假赋值。

定义 1.1.15 设A是命题公式,A在其所有可能的赋值下取得的值列成表,称为A的真值表。

算法 1.1.1 (构造真值表的步骤(或算法))如下:

(1)找出给定命题公式中所有命题变项P_1,…,P_n($n \geq 1$),列出所有可能的赋值。对于有n个命题变项的命题公式来说,不同的赋值有2^n个。

(2)按照从内到外的顺序写出命题公式的各层次。

(3)对应每个赋值,计算命题公式各层次的值,直到最后计算出整个命题公式的值。

算法 1.1.2 (构造真值表的较简便的方法) 将命题联结词在命师公式中,从内层到外层出现的先后次序,将其所对应的值写在下面,直到最终算出整个命题公式的值。

定义 1.1.16 命题公式称为重言式(或永真式,或恒真式),是指在每个赋值下A都是真;命题公式A称为矛盾式(或恒假式,或不可满足式),是指在每个赋值下A都是假;命题公式A称为可满足式,是指至少有一个赋值使得A是真。

定义 1.1.17 一个n元真值函数是指F:$\{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$,($n \geq 1$),即此函数以n个命题变项为变元,其定义域和值域都是由真、假两值构成。

对于n个命题变项,可能的赋值有2^n个。对于每个赋值,真值函数的取值又有真、假两种可能。因此,对于n个命题变项来说,它可以构成不同的真值函数有2^{2^n}个。

定义 1.1.18 称命题逻辑中两个命题公式A,B等值(或等价)是指等价式A↔A是重

言式，记作 $A\Leftrightarrow B$。

此处“$\Leftrightarrow$”是元语言符号。

公式 1.1.1 （基本等值式）：

(1) $E_1: A\Leftrightarrow \neg\neg A$ 双重否定律

(2) $\left.\begin{array}{l} E_2: A\Leftrightarrow A\vee A \\ E_3: A\Leftrightarrow A\wedge A \end{array}\right\}$ 等幂律

(3) $\left.\begin{array}{l} E_4: (A\vee B)\Leftrightarrow (B\vee A) \\ E_5: (A\wedge B)\Leftrightarrow (B\wedge A) \end{array}\right\}$ 交换律

(4) $\left.\begin{array}{l} E_6: ((A\vee B)\vee C)\Leftrightarrow (A\vee (B\vee C)) \\ E_7: ((A\wedge B)\wedge C)\Leftrightarrow (A\wedge (B\wedge C)) \end{array}\right\}$ 结合律

(5) $\left.\begin{array}{l} E_8: (A\vee (B\wedge C))\Leftrightarrow ((A\vee B)\wedge (A\vee C)) \\ E_9: (A\wedge (B\vee C))\Leftrightarrow ((A\wedge B)\vee (A\wedge C)) \end{array}\right\}$ 分配律

(6) $\left.\begin{array}{l} E_{10}: \neg(A\vee B)\Leftrightarrow (\neg A\wedge \neg B) \\ E_{11}: \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow (\neg A\vee \neg B) \end{array}\right\}$ 德·摩根律

(7) $\left.\begin{array}{l} E_{12}: (A\vee (A\wedge B))\Leftrightarrow A \\ E_{13}: (A\wedge (A\vee B))\Leftrightarrow A \end{array}\right\}$ 吸收律

(8) $\left.\begin{array}{l} E_{14}: (A\vee 1)\Leftrightarrow 1 \\ E_{15}: (A\wedge 0)\Leftrightarrow 0 \end{array}\right\}$ 零律

(9) $\left.\begin{array}{l} E_{16}: (A\vee 0)\Leftrightarrow A \\ E_{17}: (A\wedge 1)\Leftrightarrow 0 \end{array}\right\}$ 同一律

(10) $E_{18}: (A\vee \neg A)\Leftrightarrow 1$ 排中律

(11) $E_{19}: (A\wedge \neg A)\Leftrightarrow 0$ 矛盾律

(12) $E_{20}: (A\rightarrow B)\Leftrightarrow (\neg A\vee B)$ 蕴涵等价式(蕴涵等值式)

(13) $E_{21}: (A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge (B\rightarrow A)$ 等价等值式

(14) $E_{22}: (A\rightarrow B)\Leftrightarrow (\neg B\rightarrow \neg A)$ 假言易位

(15) $E_{23}: (A\leftrightarrow B)\Leftrightarrow (\neg A\leftrightarrow \neg B)$ 等价否定等值式

(16) $E_{24}: ((A\rightarrow B)\wedge (A\rightarrow \neg B))\Leftrightarrow \neg A$ 归缪律

定义 1.1.19 在联结词集合中，如果一个联结词可以由集合中其他的联结词来定义，则此联结词称为冗余的联结词，否则，称为独立的联结词。

定义 1.1.20 一个联结词集合称为全功能的，是指任一真值函数都可以用仅含有此集合中的联结词的命题公式表示。一个联结词集合称为是极小全功能的，是指它是一个不含冗余联结词的全功能集合。

定理 1.1.1 $\{\neg,\wedge\},\{\neg,\vee\},\{\neg,\rightarrow\}$ 都是全功能集合。

定义 1.1.21 在仅含有联结词 $\neg,\wedge,\vee$ 的命题公式 A 中，将 $\vee$ 换成 $\wedge$，$\wedge$ 换成 $\vee$，若 A 中含有 0 或 1，就将 0 换成 1，1 换成 0，所得命题公式称为对偶式，记作 A^*。

不难看出，A 是 A^* 的对偶式，即对偶式是相互的，又 $(A^*)^*=A$。

定理 1.1.2 设 A 和 A^* 互为对偶式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在 A 和 A^* 中的全部命题变项，若将 A 和 A^* 写成 n 元函数形式，则

(1) $\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$；

(2) $A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)\Leftrightarrow \neg A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$。

定理 1.1.3 （对偶原理） 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在公式 A 和 B 中的所有命题变项，如果 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$。

定义 1.1.22 命题变项及命题变项的否定称为文字。

定义 1.1.23

(1)仅由有限个文字构成的析取式称为简单析取式(或子句)；

(2)仅由有限个文字构成的合取式称为简单合取式(或短语)。

定理 1.1.4

(1)一个简单析取式是重言式，当且仅当它同时包含一个文字及其否定；

(2)一个简单合取式是矛盾式，当且仅当它同时包含一个文字及其否定。

定义 1.1.24

(1)仅由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式；

(2)仅由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式。

定理 1.1.5

(1)一个析取范式是矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式；

(2)一个合取范式是重言式，当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

算法 1.1.3(求范式的算法)

(1)对给定的命题公式 A，由基本等值式 E_{20}，E_{21} 消去 A 中的联结词$\leftrightarrow$和$\rightarrow$(如果有的话)。

(2)由基本等值式 E_{10}，E_{11}，即德·摩根律和 E_1，即双重否定律，将 A 中的否定号都内移至命题变项之前，并消去双重否定号(如果有的话)。

(3)由基本等值式 E_8，E_9，即分配律，将 A 最后变成析取范式或合取范式的形式。

定理 1.1.6(范式存在定理) 对任一命题公式都存在着与之等值的析取范式和合取范式。

定义 1.1.25 在含 n 个命题变项的简单合取式中，如果每个命题变项与其否定不同时存在，而二者之一必出现且仅出现一次，且第 i 个命题变项或其否定出现在从左起的第 i 位上(如果命题变项无角标，则按字典顺序排列)，这样的简单合取式称为极小项。

算法 1.1.4(求主析取范式)

(1)设 A 是任给的命题公式，根据算法 1.1.3 求出 A 的析取范式 A'。

(2)展开。如果 A' 的某个简单合取式 B 中不含命题变项 P_i 或其否定$\neg P_i$，则将 B 展成形式：$B\Leftrightarrow B\wedge 1\Leftrightarrow B\wedge(P_i\vee\neg P_i)\Leftrightarrow(B\wedge P_i)\vee(B\wedge\neg P_i)$。

(3)消去。将重复出现的命题变项、矛盾式及重复出现的极小项都“消去”，如 $P\wedge P$ 用 P 代替，$P\wedge\neg P$ 用 0 代替，$m_i\vee m_i$ 用 m_i 代替。

(4)排序。将极小项按从小到大的顺序排列。为了使主析取范式的表达简洁，用$\sum$表示极小项的析取，如 $m_i\vee m_j\vee m_k$ 用 $\sum(i,j,k)$ 表示。

定理 1.1.7(主析取范式存在定理) 任何命题公式都存在着与其等值的主析取范式。

定理 1.1.8 任一命题公式的主析取范式是唯一的。

定义 1.1.26 在含 n 个命题变项的简单析取式中，如果每个命题变项与其否定不同时存在，而二者之一必出现且仅出现一次，且第 i 个命题变项或其否定出现在左起的第 i 位上

(如命题变项无角标码，则按字典顺序排列)，这样的简单析取式称为极大项。

算法 1.1.5(求主合取范式)

(1)设 A 是任给的命题公式，根据算法 1.1.3 求出 A 的合取范式 A′。

(2)展开。如果 A′的某个简单析取式 B 中，不含命题变项 P_i 或其否定 $\neg P_i$，则将 B 展成形式：$B \Leftrightarrow B \vee 0 \Leftrightarrow B \vee (P_i \wedge \neg P_i) \Leftrightarrow (B \vee P_i) \wedge (B \vee \neg P_i)$。

(3)消去。将重复出现的命题变项、重言式及重复出现的极大项都“消去”，如 $P \vee P$ 用 P 代替，$P \vee \neg P$ 用 1 代替，$M_i \wedge M_i$ 用 M_i 代替。

(4)排序。将极大项按由小到大的顺序排列。为了使主合取范式的表达简洁。用 Π 表示极大项的合取，如 $M_i \wedge M_j \wedge M_k$ 用 $\Pi(i,j,k)$ 表示。

定理 1.1.9(主合取范式存在定理)　任一命题公式都存在着与之等值的主合取范式。

定理 1.1.10　任一命题公式的主合取范式是唯一的。

定义 1.1.27　称命题公式 B 是从前提 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geqslant 1)$ 推出的结论，是指或者 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的合取为假，或者 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的合取为真，B 也真。

定理 1.1.11　命题公式 B 能从命题公式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 推出，当且仅当命题公式 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow B$ 是重言式。

定义 1.1.28　如果 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow B$ 是重言式，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 推出结论 B 的推理正确，B 是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的逻辑结论(或有效结论)，记作 $A_1, A_2, \cdots, A_n \models B$。(其中“$\models$”是元语言符号。)

公式 1.1.2　(基本蕴涵式)：

(1)	$I_1: (A \wedge B) \Rightarrow A$ $I_2: (A \wedge B) \Rightarrow B$	化简
(2)	$I_3: A \Rightarrow A \vee B$ $I_4: B \Rightarrow A \vee B$	附加
(3)	$I_5: ((A \rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$	假言推理
(4)	$I_6: ((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow A$	拒取式
(5)	$I_7: ((A \vee B) \wedge \neg A) \Rightarrow B$	析取三段论
(6)	$I_8: ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \Rightarrow (A \rightarrow C)$	假言三段论
(7)	$I_9: ((A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
(8)	$I_{10}: ((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C)) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难

另外公式 1.1.1 中列出的基本等值式各自都可以分解成两个基本蕴函式。

定义 1.1.29　称一个推理的前提是一致的(或相容的)，是指前提的合取为可满足式。否则，前提是不一致的(或不相容的)。

定义 1.1.30　证明是一个描述推理过程的命题公式序列。其中的每个命题公式或者是已知的前提，或者是由某些前提应用推理规则得到的结论。

定义 1.1.31　自然推理系统 P 定义如下：

1. 字母表

(1)命题常项，命题变项：$P, Q, R, \cdots, P_i, Q_i, R_i \cdots, 1, 0$；

(2)命题联结词：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$；

(3)括号：(，)。

2. 合式公式:同定义 1.1.12。

3. 推理规则

(1)前提引入规则(或称 P 规则):在证明的任何步上,都可以引入前提。

(2)结论引用规则(或称 T 规则):在证明的任何步上,所证的结论都可以作为后继证明的前提。

(3)置换规则:在证明的任何步上,命题公式中的任何子命题公式都可以用与之等值的命题公式置换。例如,可用$\neg P \vee Q$ 置换 $P \rightarrow Q$ 等。

(4)假言推理规则:$A \rightarrow B, A \models B$。

(5)附加规则:$A \models A \vee B$。

(6)化简规则:$A \wedge B \models A$。

(7)拒取式规则:$A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$。

(8)假言三段论规则:$A \rightarrow B, B \rightarrow C \models A \rightarrow C$。

(9)析取三段论规则:$A \vee B, \neg B \models A$。

(10)构造性二难规则:$A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \models B \vee D$。

(11)合取引入规则:$A, B \models A \wedge B$。

以上这些就构成了系统 P 的基本部分,即在系统进行证明的出发点。

定理 1.1.12(附加前提证法(或称 CP 规则)) 要证明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \Rightarrow (A \rightarrow B)$。如果能证明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge A) \Rightarrow B$ 即可。

定理 1.1.13(归缪法(或称反证法,或称间接证明法)) 要证明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \Rightarrow B$ 只要证明$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B)$是假(或者说不相容)。

定理 1.1.14 设命题公式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一致的,并设 B 也是命题公式。如果前提$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \wedge \neg B$ 是不一致的,亦即它蕴涵着一个矛盾式,则可从命题公式 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 推出命题公式 B 来。

1.1.3 例题分析

例 1.1.1 判断下列语句是否是命题?如果是命题,请指出哪些是简单命题?哪些是复合命题?

(1)2 是无理数。

(2)3 能被 2 整除。

(3)$x+3>0$。

(4)今天天气多好呀!

(5)2 是素数,当且仅当三角形有三条边。

(6)雪是黑的当且仅当太阳从东方升起。

(7)老王是开拓者或小李是开拓者。

(8)明天我去办公室。

(9)2000 年元旦天气晴朗。

(10)太阳系以外的星球上有生物。

(11)4 是 2 的倍数或是 3 的倍数。

(12)2 是偶数且是奇数。

(13)兰色和黄色可以调配成绿色。

(14)小李和小王是同学。

解 首先由定义 1.1.1 知，命题是具有唯一真值的陈述句。在(3)中，我们把 x 理解为变量，$x+3>0$ 是随 x 取不同而不唯一，故(3)不是命题。(4)是感叹句，而不是陈述句，故(4)也不是命题。因此，除(3)和(4)外全是命题。

其次，简单命题是(1)，(2)，(8)，(9)，(10)，(13)和(14)。在(13)中，主语由兰色和黄色构成，它们不能分离开，故(13)是简单命题。(14)也类似。

复合命题是(5)，(6)，(7)，(11)和(12)。

例 1.1.2 将例 1.1.1 中的命题符号化，并讨论它们的真值。

解 简单命题和符号化只需用一个大写英文字母表示即可。例如(1)可表示为：P:2 是无理数。其余从略。

复合命题的符号化如下：

(5)$P\leftrightarrow Q$，其中 P:2 是素数，Q:三角形有三条边。

(6)$P\leftrightarrow Q$，其中 P:雪是黑的，Q:太阳从东方升起。

(7)$P\vee Q$，其中 P:老王是开拓者，Q:小李是开拓者。

(11)$P\vee Q$，其中 P:4 是 2 的倍数，Q:4 是 3 的倍数。

(12)$P\wedge Q$，其中 P:2 是偶数，Q:2 是奇数。

真命题是：(1)，(5)，(11)和(13)。在(5)中，P，Q 都真，故 $P\leftrightarrow Q$ 真。

假命题是：(2)，(6)和(12)。在(6)中，P 假，Q 真，故 $P\leftrightarrow Q$ 假。

又(9)和(10)的真值客观存在，只是现在不知道。(7)，(8)和(14)的真值由具体情况而定(也是客观存在的)。

例 1.1.3 判断下列各命题的真值。

(1) 如果 $1+2=3$ 则 $4+5=9$。

(2) 如果 $1+2=3$ 则 $4+5\neq9$。

(3) 如果 $1+2\neq3$ 则 $4+5=9$。

(4) 如果 $1+2\neq3$ 则 $4+5\neq9$。

(5) $1+2=3$ 且 $4+5=9$。

(6) $1+2=3$ 且 $4+5\neq9$。

(7) $1+2=3$ 或 $4+5=9$。

(8) $1+2=3$ 或 $4+5\neq9$。

(9) $1+2=3$ 当且仅当 $4+5=9$。

(10) $1+2=3$ 当且仅当 $4+5\neq9$。

(11) $1+2\neq3$ 当且仅当 $4+5=9$。

(12) $1+2\neq3$ 当且仅当 $4+5\neq9$。

解 在(1)中，蕴涵式的前提和结论都是真，故(1)是真命题，其值为真。在(2)中，蕴涵式的前提为真，而结论为假，故(2)是假命题，其值为假。类似地，可讨论其余的。

本题的答案是：(1)，(3)，(4)，(5)，(7)，(8)，(9)和(12)是真命题，其它的是假命题。

例 1.1.4 将下列命题符号化，并讨论其真值。

(1)如果今天是星期一，则明天是星期二。

(2)如果今天是星期一，则明天是星期三。

解 设P：今天是星期一，Q：明天是星期二，R：明天是星期三。

(1)符号化为 $P \to Q$；(2)符号化为 $P \to R$。

讨论

①如果P是真命题(即今天是星期一)，则Q也是真命题，因此，(1)是真命题；(2)是假命题(因R是假命题)。

②如果P是假命题(即今天不是星期一)，则(1)和(2)都是真命题。

例 1.1.5 将下列命题符号化。

(1)3是奇数又是素数。

(2)小王不但聪明而且用功。

(3)虽然天气很好，老王还是不来。

(4)小李一边吃饭，一边看电视。

(5)如果天下大雨，他就乘公共汽车上班。

(6)只有天下大雨，他才乘公共汽车上班。

(7)除非天下大雨，否则他不乘公共汽车上班。

(8)只有不怕困难，才能战胜困难。

解

(1)设P：3是奇数，Q：3是素数。原题符号化为 $P \land Q$。

(2)设P：小王聪明，Q：小王用功。原题符号化为 $P \land Q$。

(3)设P：天气很好，Q：老王不来。原题符号化为 $P \land Q$。

(4)设P：小李吃饭，Q：小李看电视。原题符号化为 $P \land Q$。

(5)设P：天下大雨，Q：他乘公共汽车上班。原题符号化为 $P \to Q$。

(6)设同(5)。原题符号化为 $Q \to P$。

(7)设同(5)。原题符号化为 $\neg P \to \neg Q$。

(8)设P：(人们)不怕困难，Q：(人们)战胜困难。原题符号化为 $\neg P \to \neg Q$。

例 1.1.6 设P，Q，R的意义如下：

P：小王乘坐公共汽车。Q：小王在看书。R：小王在思考问题。

试用日常语言复述下列复合命题。

(1) $(P \land Q) \land \neg R$。

(2) $\neg (P \lor Q) \land R$。

(3) $P \to (Q \lor R)$。

(4) $P \land (Q \lor R)$。

解

(1)小王乘坐公共汽车并且在看书。但没有思考问题。

(2)小王或不乘公共汽车或不看书，而是在思考问题。

(3)如果小王乘坐公共汽车，他就看书或思考问题。

(4)小王乘坐公共汽车，他或者看书或者思考问题。

例 1.1.7 设P，Q的真值为0，R，S的真值为1。试求下列各命题的真值。

(1) $P \lor (Q \land R)$。

(2)(P↔R)∧(¬Q∨S)。

(3)(P∧(Q∨R))→((P∨Q)∧(R∧S))。

(4)¬(P∨(Q→(R∧¬P)))→(R∨¬S)。

解

(1)P∨(Q∧R)⇔0∨(0∧1)⇔0∨0⇔0。

(2)(P↔R)∧(¬Q∨S)⇔(0↔1)∧(¬0∨1)

⇔0∧(1∨1)⇔0∧1⇔0。

(3)(P∧(Q∨R))→((P∨Q)∧(R∧S))⇔(0∧(0∨1))→((0∨0)

∧(1∧1))⇔(0∧1)→(0∧1)⇔0→0⇔1。

(4)¬(P∨(Q→(R∧¬P)))→(R∨¬S)⇔

¬(0∨(0→(1∧¬0)))→(1∨¬1)⇔

¬(0∨(0→(1∧1)))→(1∨0)⇔¬(0∨(0→1)→1

⇔¬(0∨1)→1⇔¬1→1⇔0→1⇔1。

例 1.1.8 由真值表判断下列命题公式的类型,即哪些是重言式?哪些是矛盾式?哪些是可满足式?

(1)P→(P∨Q∨R)。

(2)(P→¬P)→¬P。

(3)¬(Q→P)∧P。

(4)(P→Q)→(¬Q→¬P)。

(5)(¬P→Q)→(Q→¬P)。

(6)(P∧¬P)→Q。

(7)(P∨¬P)→((Q∧¬Q)∧¬R)。

(8)(P→Q)→¬(P∨Q)。

(9)((P→Q)∧(Q→R))→(P→R)。

(10)((P∨Q)→R)↔S。

解 根据算法 1.1.2,即构造真值表的较简便的方法来解给定的各题。

表例 1.1.8(1)

P	Q	R	P	→	(P	∨	Q	∨	R)
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
步骤			③	①	①	②	①	③	②

表例 1.1.8(2)

P	(P	→	¬P)	→	¬P
0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
步骤	①	②	①	③	②

(1)构造真值表如表例 1.1.8(1)。由表例 1.1.8(1)中的步骤④所在的列全为“1”，故知给定命题公式是重言式，显然也是可满足式。

(2)构造真值表如表例 1.1.8(2)。由表例 1.1.8(2)的步骤③所在的列全为“1”，故知给定命题公式是重言式，从而也是可满足式。

(3)构造真值表如表例 1.1.8(3)。由表例 1.1.8(3)的步骤④所在的列全为“0”。故知给定命题公式是矛盾式。

(4)构造真值表如表例 1.1.8(4)。由表例 1.1.8(4)的步骤③所在的列全为“1”，故知给定的命题公式是重言式，从而也是可满足式。

(5)构造真值表如表例 1.1.8(5)。由表例 1.1.8(5)的步骤③所在的列既有“1”，又有“0”，故知给定命题公式是可满足式。

表例 1.1.8(3)

P	Q	¬	(Q	→	P)	∧	P
0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
步骤		③	①	②	①	④	③

表例 1.1.8(4)

P	Q	(P→Q)	→	(¬Q	→	¬P)
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0
步骤		②	③	①	②	①

(6)构造真值表如表例 1.1.8(6)的步骤③所在列既有“1”，又有“0”，故知给定命题公式是可满足式。

表例 1.1.8(5)

P	Q	(¬P	→	Q)	→	(Q	→	¬P)
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0
步骤		①	②	①	③	①	②	①

表例 1.1.8(6)

P	Q	(P	∧	¬P)	↔	Q
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1
步骤		①	②	①	③	②

(7)构造真值表如表例 1.1.8(7)。由表例 1.1.8(7)的长括号所示列全为“0”，故知给定命题公式是矛盾式。

(8)构造真值表如表例 1.1.8(8)。由表例 1.1.8(8)的长括号所示列既有“1”又有“0”，故知给定命题公式是可满足式。

(9)构造真值表如表例 1.1.8(9)。由表例 1.1.8(9)的长括号所示列全为“1”，故知给定命题公式是重言式，因而也是可满足式。

(10)构造真值表如表例 1.1.8(10)。由表例 1.1.8(10)的长括号所示列既有“1”又有“0”，故知给定命题公式是可满足式。