初中数学解题思路

训练与提示

青岛出版社

前　言

“列方程解应用题”和“几何证明题”是初中数学的两大重点，又是两大难点，内容涉及初中数学的绝大部分知识和主要的解题技能、技巧。熟练地掌握好这两部分内容，对于发展学生的逻辑思维能力和空间想象能力、提高学生分析问题和解决问题的能力，都具有不可低估的作用。不少同学初中数学学得不够好，主要原因是在这两部分遇到了困难。

本书对“应用题”和“几何证明题”进行了比较科学的分类，并通过剖析典型例题，揭示了每类问题的解答规律或解题思路，指出了解答过程中应该注意的问题。同时，尽力发掘多种解法或证法，启迪学生的创造性思维。

本书注意从初中学生的知识水平和思维特点出发，由易而难、由浅入深、由感性认识到理性认识，尽力做到科学性、典型性、针对性和实用性的统一。

本书文字通俗，提示精到，既可做为初中学生毕业升学的复习资料，又可做为自学和课外阅读的参考读物；初中数学任课教师随意翻翻，也不失起其备课参考资料的作用。

本书在编写过程中得到郭国庆、赵忠金、董少川等同志的许多帮助；战淑芝同志又对全书进行了修订、补充，在此一并致谢。

编　者

1983年10月

目　录

第一部分　关于列方程解应用题

第二部分　几何证明题

第 一 部 分

关于列方程解应用题

一．几个有关的基本知识

什么是应用题？人们在日常生活、生产和科学实验等实践中，常常会遇到大量需要计算的问题。这些问题用文字和数组织起来表示，就是我们所说的应用题。

不论是简单的还是复杂的应用题，都包括三个组成部分：（一）已知量的数值；（二）已知量和已知量之间、已知量和未知量之间的相互关系；（三）所求的未知量。所谓解应用题，就是根据题目中所提供的已知条件（即各数量之间的关系），确定计算方法和运算顺序，求出未知量的数值。

列方程（或方程组）解应用题的一般步骤如下：

（一）审题　也就是理解题意，见到题目后要仔细审阅，正确理解题目中的每一个词和每一句话的含义。如果有一个概念领会错了，或者漏看、错看了一个数、一个字或词，或者忽略了一个限制语，都会造成障碍，而列不出方程或列不出正确的方程。

（二）设未知数　在理解题意的基础上，进一步弄清已知条件是什么，未知数都有哪些（包括所求的未知数和隐蔽的未知数），并进而弄清已知条件和未知数之间的关系。然后恰当地选择一个未知数（或两个、三个等）用字母x（或y、z等）来表示，并用含有字母表示未知数的代数式把其他的

未知数表示出来。

（三）列方程　利用前面没有用过的**“相等关系”**列出方程（或方程组）。

（四）解方程　解所列的方程（或方程组），求出未知数的值。

（五）检验并写出答案　检验分两步，一是检验解得的未知数的值是不是方程的解；二是检验方程的解是否符合题意，把不合题意的舍去。最后写出答案。

很明显，在这五步中“列方程”是关键。有些类型的题目，例如行程问题、工程问题、几何图形问题等，如果能够熟练运用画图分析的方法，那对于理解题意，弄清数量关系是很有帮助的。

牛顿曾说：列方程就是把题目中的“日常语言翻译成代数语言”，这话说得很确切。上面说的前三步实际上就是一个“翻译”过程。例如，把“x等于a的倒数与b的倒数之和”这句话翻译成代数语言，就是：$x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$。又如，“a的平方等于b与c的平方和”，翻译成代数语言就是：$a^2=b^2+c^2$。

自　测　训　练

把下列各题翻译成代数语言：

1．①b是c的2倍；　②b等于c的$\frac{2}{3}$；

③b是c的20%；　④b比c多2倍；

⑤b等于c的3倍多1；　⑥x等于a与b的和的平方；

⑦a比b增加了百分之五。

2．有稻田m亩，每亩施肥a斤；麦田n亩，每亩施肥b斤。共施肥多少斤？

3．①一台拖拉机n天耕完一块地，一天耕这块地的几分之一？

②一台拖拉机n天耕完a亩地，一天耕多少亩地？

③m台拖拉机n天耕完a亩地，每台每天耕地多少亩？

应用题中所涉及到的事情虽然千变万化，但总是有规律可循的。我们按照应用题的主要特点把应用题分成七类：有关数字的问题、行程问题、工程问题、混合物问题、增长率问题、几何图形问题和其它问题。

下面我们分别举例说明每类问题的解题思路和解答中应该注意的问题。

二．有关数字的问题

这类问题可以分成四小类，即一般数字关系问题、数字排列问题、连续数问题和倍数关系问题。

（一）一般数字关系问题 这类问题的解法很容易，只要懂得和、差、积、商、大、小等数学术语，就可以直接把题目里的日常语言翻译成代数语言，列出方程。

例1 $\frac{9}{17}$的分子、分母各加上一个什么相同的数，分数的值变为$\frac{3}{5}$？

解： 设分子、分母所加相同的数为x。根据题意，得

$$\frac{9+x}{17+x}=\frac{3}{5}.$$

等式两边都乘以5（$17+x$），

解之，得$x=3$.

经检验，$x=3$是原方程的根。

答：$\frac{9}{17}$的分子、分母各加上3，分数的值就变为$\frac{3}{5}$。

注意 因为本题列出的是分式方程，所以最后必须验根。

例2 两数的和是95，如果用小数去除大数，商4，余5，求两数。

解法一：设小数为x，则大数为$95-x$。根据题意，得

$$\frac{95-x}{x}=4+\frac{5}{x},\ \left(或\frac{95-x-5}{x}=4\right)$$

去分母，得 $95-x=4x+5$,

解之，得 $x=18$.

经检验，$x=18$是原方程的根.

则 $95-x=95-18=77$.

答：两数分别为77和18。

注意 上面的方程中余数5，不能只加5，而要加上$\frac{5}{x}$。因为$\frac{被除数}{除数}=商数+\frac{余数}{除数}$。

解法二：设大数为x，小数为y．依据题意，得

$$\begin{cases} x+y=95, \\ \frac{x}{y}=4+\frac{5}{y}. \end{cases}$$

解之，得 $\begin{cases} x=77, \\ y=18. \end{cases}$ （检验略）

答：（略）

例 3 某人用两个数相乘，被乘数比乘数大94。乘起来后，他再用乘数去除，本应还原回去仍得被乘数。但因他将乘积的十位数字看错了，比原数少看了 4，因而得商为 139 而余 6。问原来两数各是多少？

解：设乘数为x，那么被乘数就是x + 94。依题意，得

$$\frac{x(x+94)-40-6}{x}=139.$$

整理，得 $x^2-45x-46=0$，

解之，得 $x_1=-1$，$x_2=46$。

经检验，-1 和46都是原方程的根。但 -1 不合题意，应舍去。

$$x+94=46+94=140.$$

答：（略）

（二）数字排列问题 解这类问题，关键在于明确数是由数字和数位组成的。例如 4 这个数字，在个位上它表示 4 个；在十位上它表示 4 个10，即40个；在百位上它表示 4 个100，即400个…… 因此，如果一个两位数的十位上的数字是x，个位上的数字是y，那么这个两位数就可以表示为 $10x+y$；如果一个三位数的百位、十位、个位上的数字分别是x、y、z，那么这个三位数就可以表示为 $100x+10y+z$。其它多位数依此类推。

例1 某两位数，比其数字和的 6 倍多 3，如果将其数字顺序交换后所得的数加 3，则是原数的 $\frac{4}{5}$，求此两位数。

解：设这个两位数的十位数字是x，个位数字是y，则这个两位数是$10x+y$。据题意，得

$$\begin{cases}10x+y=6(x+y)+3,\\(10y+x)+3=\frac{4}{5}(10x+y).\end{cases}$$

整理，得 $\begin{cases}4x-5y=3,\\35x-46y=15,\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases}x=7,\\y=5,\end{cases}$

$$10x+y=10\times7+5=75.$$

答：这个两位数是75。

注意 设未知数时，一般是直接设，就是求什么，设什么。但有时直接设未知数，列方程比较麻烦，不如间接设来得简便。何况，有些应用题直接设未知数不易列出方程，而间接设却可顺利解决，如例1、例2。

例2 一个三位数的三个数字的和是17，百位数字与十位数字的和比个位数字大3；如果把个位数字和百位数字的位置对调，那么所得的三位数比原数大495，求原三位数。

解：设百位数字、十位数字和个位数字分别为x、y和z，则原三位数就是：$100x+10y+z$。根据题意，得

$$\begin{cases}x+y+z=17,\\x+y-z=3,\\(100z+10y+x)-495=100x+10y+z,\end{cases}$$

解之，得 $x=2$，$y=8$，$z=7$，

$100x+10y+z=287$.

答：（略）

例 3　一个两位数，两个数字的和是 5，将它的两个数字调换后，用原数去乘，得736，求原两位数。

解法一：设原两位数的个位数字为x，则十位数字为5－x。依题意，得

$$[10x+(5-x)][10(5-x)+x]=736,$$

整理，得　$x^2-5x+6=0,$

$$(x-2)(x-3)=0,$$

$$x_1=2,\ x_2=3,$$

当$x=2$时，$5-x=3$；当$x=3$，$5-x=2$。

答：这个两位数是23或32。

解法二：设原数的十位数字为x，个位数字为y，则原数为10x＋y。依题意，得

$$\begin{cases} x+y=5, \\ (10y+x)(x+y)=736. \end{cases}$$（下略）

注意　从一个两位数中减去它的个位数字，所得之差是十位数字的10倍；再减去一个十位数字，所得之差便是十位数字的 9 倍。也就是说，从一个两位数中减去它的两个数字的和，所得之差是十位数字的 9 倍。明白了这个道理，此题还可有如下的解法。

解法三：设原两位数为x，则十位数字是$\frac{x-5}{9}$，

个位数字是$5-\frac{x-5}{9}=\frac{50-x}{9}$，依题意，得

$$\left(10\cdot\frac{50-x}{9}+\frac{x-5}{9}\right)\cdot x=736,$$

化简，得　$x^2-55x+736=0$，

解之，得　$x_1=32,\ x_2=23$。

答：（略）

例 4　一个两位数的两个数字的和大于12。如果这个两位数减去36，那么它的数字的位置互换，求这个两位数。

解：设十位数字为x，个位数字为y，则所求的两位数为$10x+y$。根据题意，得

$$\begin{cases} x+y>12, & ① \\ (10x+y)-36=10y+x. & ② \end{cases}$$

由②，得　$y=x-4$，　③

将③代入①，得　$x+(x-4)>12$.

$$x>8.$$

因为x只能是1、2、3、4、5、6、7、8、9这九个数字中的一个，又知$x>8$，故知$x=9$。

代入③，得　$y=5$.

$10x+y=95$.

答：（略）

注意　这个问题列出的是由一个方程和一个不等式组成的混合组。解时，一般先从方程入手，求出两个未知数之间的最简关系式(如上面的方程③)，再代入不等式，设法求解。此题如果方程②得到的不是$y=x-4$，而是$x=y+4$，那当然也可以。想一想，应当如何确定y的值？

例 5　某数加上365，然后乘以5，再删去末位数，则得244，求某数。

分析　因为5与任何整数相乘，其乘积的末位数不是5便是0，所以此题应分末位数是5和0两种情况来解。

解：设某数为x，

①当与5相乘所得之积的末位数是5时，得

$5(x+365)-5=244\times10$,

解之，得　$x=124$。

②当与5相乘所得之积的末位数是0时，得

$5(x+365)-0=244\times10$，

解之，得　$x=123$。

答：某数是124或123。

（三）连续数问题　初中数学所涉及的连续数问题有三种：连续整数、连续偶数和连续奇数。连续整数，前后两数相差1；连续偶数和连续奇数前后两数相差2。只要明白了这一点，解这类问题就很容易了。

例1　五个连续整数的和为35，求这五个数。

解：设中间一数为x，则其余四数依次为$x-2$，$x-1$，$x+1$，$x+2$。依题意，得

$(x-2)+(x-1)+x+(x+1)+(x+2)=35$，

解之，得　$x=7$，

$x-2=5$，$x-1=6$，$x+1=8$，

$x+2=9$。

答：（略）

注意　求解连续数问题，在设未知数时，一般是设中间的一个数为x。

例2　三个连续偶数，第一个数的一半的平方，比第二、第三两数的乘积的$\frac{1}{4}$少11，求这三个数。

解：设最小的一个数为x，则其余两数为$x+2$，$x+4$，依题意，得

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(x+2)(x+4)-11,$$

解之，得　$x=6$。　（下略）

（四）倍数关系问题 倍数关系包括整数倍数、分数倍数和百分数倍数。对于整数倍数来说，甲是乙的几倍就说是几倍。但对于分数倍数和百分数倍数来说，习惯上都把“倍”字省略，只说甲是乙的几分之几或百分之几。既然都是倍数关系，那么这三种倍数所说的两个数量之间的关系应该是相同的。例如，求10的2倍是多少？用乘法：$10\times2=20$。求10的$\frac{1}{2}$(倍)是多少？10的20%（倍）是多少？也都用乘法：$10\times\frac{1}{2}=5$，$10\times20\%=2$。这是已知一个数求它的几倍（或几分之几、百分之几）是多少，用乘法；反过来，如果已知一个数的几倍（或几分之几、百分之几）是多少，求这个数，就要用除法。例如，已知一个数的2倍等于20，求这个数，用除法：$\frac{20}{2}=10$。已知一个数的$\frac{1}{2}$是5，求这个数；已知一个数的20%是2，求这个数，也都用除法：$5\div\frac{1}{2}=10$；$2\div20\%=10$。这些关系很简单，但在列方程时常常用到。

例1 甲煤场有煤185吨，乙煤场有煤237吨，甲场每天运走15吨，乙场每天运走18吨。多少天后，乙场的煤是甲场的一倍半？

解：设x天后，乙场的煤是甲场的1.5倍，则

$$237-18x=1.5(185-15x),$$

解之，得$x=9$。

答：（略）

例2 第一车间的人数比第二车间的人数的$\frac{4}{5}$少30人，如果从第二车间调10人到第一车间，那么第一车间的人数就

是第二车间人数的$\frac{3}{4}$，求原来每个车间的人数。

解法一：设原来第一车间为x人，第二车间为y人，则

$$\begin{cases} x=\frac{4}{5}y-30, \\ x+10=\frac{3}{4}(y-10), \end{cases} \text{解之，得} \begin{cases} x=170, \\ y=250, \end{cases}$$

答：（略）

解法二：设第二车间为x人，则第一车间为（$\frac{4}{5}x-30$）人，依题意，得

$$\frac{3}{4}(x-10)=\left(\frac{4}{5}x-30\right)+10$$

解之，得 $x=250$。

$$\frac{4}{5}x-30=\frac{4}{5}\times 250-30=170。$$

答：（略）

注意 设未知数时，要注意单位，有单位的不能漏掉。列出的方程，两边必须是同类量，即表示同一单位的数或式子。

例3 甲、乙两拖拉机厂，按计划每月共生产拖拉机460台。由于改革了经营管理制度，本月甲厂完成计划的110%，乙厂完成计划的115%，因而，两厂共生产拖拉机519台。本月甲、乙两厂各超额生产拖拉机多少台？

解法一：设甲厂本月超额生产拖拉机x台，乙厂本月超额生产y台。依题意，得

$$\begin{cases} x+y=519-460, \\ \dfrac{x}{110\%-1}+\dfrac{y}{115\%-1}=460, \end{cases}$$

整理，得 $\begin{cases} x+y=59, \\ 3x+2y=138, \end{cases}$

解之，得 $\begin{cases} x=20, \\ y=39, \end{cases}$ （下略）

解法二：设本月原计划甲厂生产x台，乙厂生产y台。由题意，得

$$\begin{cases} x+y=460, \\ \dfrac{110}{100}\cdot x+\dfrac{115}{100}\cdot y=519, \end{cases}$$ （下略）

解法三：设本月原计划甲厂生产x台，则乙厂生产（460－x）台，甲厂超额生产$\dfrac{10x}{100}$台，乙厂超额生产$\dfrac{15(460-x)}{100}$台。由题意，得

$$\frac{10x}{100}+\frac{15(460-x)}{100}=519-460.$$

或：$\dfrac{110x}{100}+\dfrac{115(460-x)}{100}=519.$ （下略）

例 4 一个机器制造厂的三年计划中，规定每年比上一年增长的台数相同。如果第三年比原计划多生产一千台，那么每年比上一年增长的百分数就相同，而第三年生产的总台数恰等于原计划三年生产的总台数的一半。问原计划每年各生产多少台？

解法一：设原计划第一年生产x台，每年比上一年增产y