职工文化教育读本

高中数学辅导

（第二册）

ZHI GONG WEN HUA JIAO YU DU BEN

山东科学技术出版社

职工文化教育读本

高中数学辅导

第二册

山东省职工教育办公室 编

山东科学技术出版社

一九八五年·济南

责任编辑　宋德万

职工文化教育读本

高中数学辅导

第二册

山东省职工教育办公室　编

•

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂德州厂印刷

787×1092毫米32开本　10 印张　210 千字

1985年2月第1版　1985年2月第1次印刷

印数：1—23,000

书号　13195·132　定价 1.65 元

内容简介

本书是职工业余中等学校高中数学课本（教育部组织编写、上海教育出版社出版）的配套辅导读物，也可单独使用．它符合教育部制定的《职工业余中等学校数学教学大纲（试行草案）》中规定的内容、范围和要求．

这套读物分二册．第一册的内容是函数，三角函数等二章；第二册的内容是空间图形，直线、曲线方程，复数、数列和排列、组合等三章．文科高中选用第一册．

考虑到业余教育的特点，书中除对每节内容给出提要外，还列举了大量的例题．其中有些是原课本中的典型习题．另外，增加了部分练习题和每章后的复习题，以期把所学知识向深、广两个方面能有适当引伸，为进一步升入电视大学和职工大学学习创造条件．各章的复习题都作了解答，供读者参考．

本册由山东省职工教育办公室组织编写，马大陆、张春林执笔．

这套读物可作为青壮年职工自学、复习高中数学基本知识，加强基本技能训练的参考书，也可供职工学校教师教学时参考．

出版说明

职工教育是开发智力、培养人材的重要途径，是持续发展国民经济的可靠保证，它同现代化建设有着极其密切的关系，因此，必须抓紧抓好职工教育。

为适应职工教育全面开展和广大读者业余自学的急切需要，我们编写了这套《职工文化教育读本》。它是根据成人和速成的特点，在现行的职工业余中等学校课本的基础上而编写的。这套书由浅入深，循序渐进，内容充实，文字简练，可以在较短的时间掌握业余中等学校应该掌握的相应内容；在着重讲清基本概念和基础知识的同时，重视培养分析问题、解决问题的能力和解题技巧的训练；每节后配有一定数量的习题，书末有答案备查。

这套丛书可作为职工教育的补充教材，也可作为广大青年的自学用书。

目　录

第3章　空间图形

立体几何主要研究空间图形的形状、性质以及进行有关的计算。在研究立体图形时，往往通过研究它的某一平面部分或截面，从而转化为平面几何的问题，也就是立体几何平面化。因此，平面几何是学习立体几何的基础。本章的主要内容是直线与平面、多面体、旋转体三部分。学习中，除掌握有关的基本概念、定理和计算公式外，应通过较多的练习，逐步培养和加强空间想象能力。

一、直线与平面

Ⅰ　内容提要

（一）平面的基本性质

（1）如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。此时，称直线在平面内，或平面过直线。

（2）如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线。

（3）不在同一条直线上的三个点确定一个平面。

（4）一条直线和这条直线外的一点，确定一个平面。

（5）两条相交的直线，确定一个平面。

（6）两条平行的直线，确定一个平面。

（二）空间两条直线

1．两条直线的位置关系

（1）重合——有无数个公共点。

（2）相交——只有一个公共点。

（3）平行——在同一个平面内，没有公共点。

（4）异面直线——不在同一个平面内的两条直线（也就是它们既不平行也不相交）．

2．两条异面直线所成的角

等角定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，并且方向相同，那么这两个角相等。

经过空间任意一点分别作两条异面直线的平行线，这两条直线相交所成的锐角（或直角）叫做两条异面直线所成的角（图3-1）。

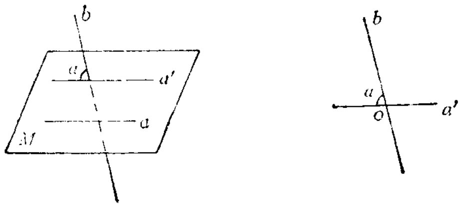

图 3-1

如果两条异面直线所成的角是直角，则称这两条异面直线互相垂直。

3．平行直线的传递性

平行于同一条直线的两条直线互相平行。

（三）空间直线和平面

1. 直线和平面的位置关系

（1）直线和平面平行——没有公共点。

（2）直线和平面相交——只有一个公共点。

（3）直线在平面内——有无数个公共点。

2. 直线和平面平行的判定和性质

（1）**判定** 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行。

（2）**性质** 如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行（图3-2）。

3. 直线和平面垂直的判定和性质

如果一条直线垂直于平面内的任何一条直线，则称这条直线和这个平面互相垂直。这条直线叫做这个平面的垂线，它们的交点叫做垂足。

（1）**判定** ①如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直（图3-3）。

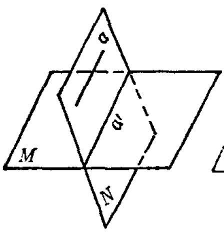

图 3-2

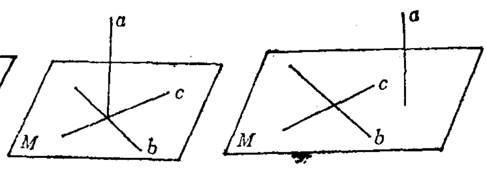

图 3-3

②如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面。

（2）**性质** 垂直于同一平面的两条直线互相平行。

4. 斜线、射影、直线和平面所成的角

一条直线和一个平面相交而不垂直，这条直线叫做这个平面的斜线。它们的交点叫做斜足。

从平面外一点引平面的垂线和斜线，在平面内的斜足和垂足的连线，叫做这条斜线在平面内的射影。

斜线和它在平面内的射影所成的锐角叫做这条直线和这个平面所成的角。若直线与平面平行或直线在平面内，则规定直线与平面所成的角为0°。若直线与平面垂直，则称直线与平面成直角。

5. 三垂线定理及其逆定理

三垂线定理 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直（图3-4）。

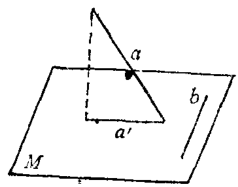

图 3-4

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线在这个平面内的射影垂直。

（四）空间两个平面

1. 两个平面的位置关系

（1）重合——一个平面内所有的点都在另一个平面内。

（2）相交——有一条公共直线。

（3）平行——没有公共点。

2. 二面角

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形，叫做二面角。这条直线叫做二面角的棱。这两个半平面叫做二面角的

面。

从二面角棱上任意一点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所组成的角叫做二面角的平面角（图3-5）。

平面角是直角的二面角叫做直二面角。

3. 两平面平行的判定和性质

（1）判定

①如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行。

②如果一个平面内的两条相交直线，分别和在另一个平面内的两条直线平行，那么这两个平面平行。

（2）性质

①如果两个平行平面分别和第三个平面相交，那么它们的交线平行（图3-6）。

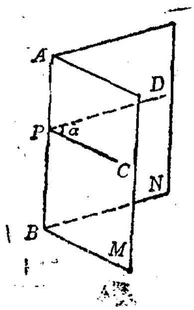

图 3-5

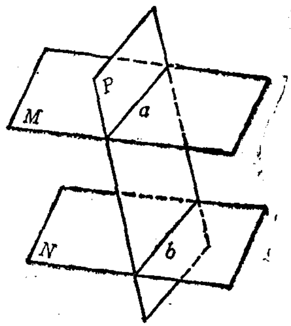

图 3-6

②夹在两个平行平面之间的平行线段的长相等（图3-7）。

4. 两平面垂直的判定和性质

成直二面角的两个相交平面叫做两个平面互相垂直。

（1）**判定** 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直（图3-8）。

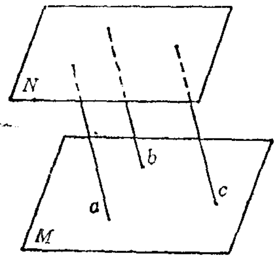

图 3-7

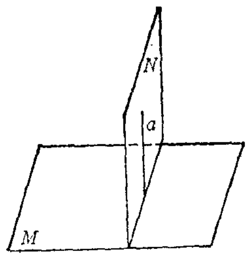

图 3-8

（2）**性质** 如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线，垂直于另一个平面。

（五）有关距离的概念

1. 两条异面直线的距离

和两条异面直线都垂直的直线叫做这两条异面直线的公垂线。

与两条异面直线都相交的公垂线（它是唯一的）夹在这两条异面直线间的线段的长叫做异面直线间的距离。

2. 点到平面的距离

从平面外一点向平面引垂线，这点到垂足之间的距离叫做这点到这个平面的距离。

3. 直线和平面的距离

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做直线和平面的距离。

4. 平行平面间的距离

和两个平行平面垂直的直线叫做这两个平行平面的公垂线。

夹在两个平行平面之间的公垂线（线段）的长叫做两个平行平面之间的距离。

Ⅱ 例 题

例1 两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一个平面内。

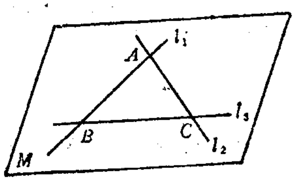

图 3-9

已知 直线l_1、l_2、l_3两两相交（图3-9）。

求证 l_1、l_2、l_3在同一平面内。

证明 $\because$ l_1和l_2相交，

$\therefore$ l_1和l_2确定一个平面M。

$\because$ l_3与l_1、l_2的交点B、C在平面M内，

$\therefore$ l_3在平面M内。

即 l_1、l_2、l_3在同一平面M内。

例2 在如图3-10所示的长方体中，如果$AB=5\sqrt{3}$ cm，$BC=5$cm，$BB_1=15$cm，那么A_1B_1和DD_1，AD和CC_1，A_1D_1和DC的距离各是多少？BB_1和DC_1，A_1C_1和BC，AA_1和BD_1的交角各是多少？

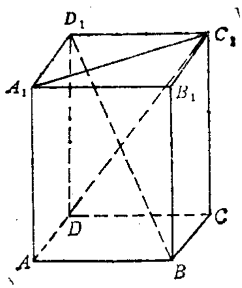

图 3-10

解 在长方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$中，

$\because$ $A_1D_1\perp A_1B_1$，$A_1D_1\perp DD_1$，

$\therefore$ A_1D_1为A_1B_1和DD_1两异面直线的距离，

$\therefore$ $A_1D_1=AD=BC=5(\text{cm})$。

同法可得，AD和CC_1的距离$DC=AB=5\sqrt{3}\,\text{cm}$。

A_1D_1和DC的距离$DD_1=BB_1=15\text{cm}$。

$\because$ $BB_1 /\!/ CC_1$，

$\therefore$ BB_1和DC_1的交角是$\angle CC_1D=\alpha$。

在直角三角形DCC_1中，$\text{tg}\alpha=\dfrac{DC}{CC_1}=\dfrac{5\sqrt{3}}{15}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ $\alpha=30°$。

$\because$ $BC /\!/ B_1C_1$， $\therefore$ A_1C_1和BC的交角是$\angle A_1C_1B_1=\beta$。

在直角三角形$A_1B_1C_1$中，$\text{tg}\beta=\dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}=\dfrac{5\sqrt{3}}{5}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ $\beta=60°$，

$\because$ $AA_1 /\!/ DD_1$，$\therefore$ AA_1和BD_1的交角是$\angle BD_1D=\gamma$。

$\because$ $DD_1\perp AD$，$DD_1\perp DC$，$\therefore$ $DD_1\perp$平面AC。

$\therefore$ $DD_1\perp BD$。在直角三角形BDD_1中，

$$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{3})^2}=10,$$

$$\text{tg}\gamma=\frac{BD}{DD_1}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3},$$

$\therefore$ $\gamma=\text{arctg}\dfrac{2}{3}\approx 33°41'$。

例3 如图3-11所示，点O为$\square ABCD$对角线的交点，$GA=GC$，$GB=GD$，求证$GO\perp$平面AC。

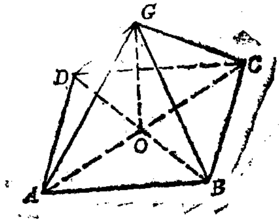

图 3-11

证明 $\because$ 点O为$\square ABCD$的对角线的交点，

$\therefore$ $AO=CO$。

$\because$ $GA=GC$

$\therefore$ GO是等腰三角形GAC底边AC上的高，

即 $GO\perp AC$。

同理可证 $GO\perp BD$。

$\therefore$ $GO\perp$平面AC。

例4 如图3-12所示，AB、BC、CD是不在同一个平面内的三条线段。求证：经过这三条线段的三个中点的平面和AC平行，也和BD平行。

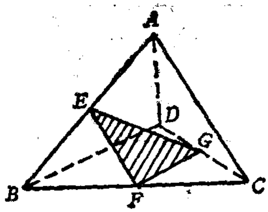

图 3-12

证明 $\because$ E、F、G分别为AB、BC、CD的中点，

$\therefore$ EF、FG分别是$\triangle ABC$和$\triangle BCD$的中位线。

$\therefore$ $EF/\!/AC$，$FG/\!/BD$。

$\therefore$ $AC/\!/$平面EFG，$BD/\!/$平面EFG。

例5 如图3-13所示，平面M、N相交于CD，线段EA、EB分别垂直于平面M、N，求证：$AB\perp CD$。

证明 $\because$ $EA\perp$平面M，CD在平面M内，

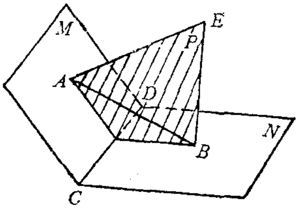

图 3-13

∴ $CD \perp EA$.

同理可证 $CD \perp EB$.

∴ CD垂直于EA、EB所确定的平面P.

∵ AB在平面P内，

∴ $AB \perp CD$.

例6 由矩形$ABCD$的顶点A引线段AK垂直于这个矩形所在的平面M（图3—14），$BK=6\text{cm}$，$CK=9\text{cm}$，$DK=7\text{cm}$，求AK的长。

解 ∵ $AK \perp$平面M，

∴ AD、AB分别为KD、KB在平面M内的射影，且$AK \perp AB$.

因为$CD \perp AD$，故由三垂线定理，得$CD \perp KD$.

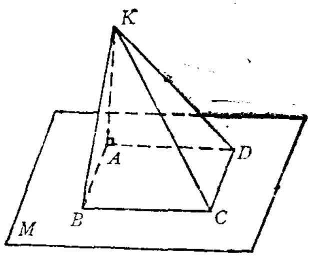

图 3-14

在直角△KDC中，

$$DC=\sqrt{CK^2-DK^2}$$
$$=\sqrt{9^2-7^2}=4\sqrt{2}$$

∴ $AB=CD=4\sqrt{2}$.

在直角△KAB中，

$$AK=\sqrt{BK^2-AB^2}=\sqrt{6^2-(4\sqrt{2})^2}=2(\text{cm}).$$

答： $AK=2\text{cm}$.

注： 立体几何的计算题，常转化为平面几何问题来解。如本例中，就是分别解直角△KDC和直角△KAB，求得AK的长。

例7 过一个角的顶点引这角所在的平面的斜线，如果斜线和这角的两边成相等的角，那么斜线在平面内的射影是这角的平分线。

证明 如图3-15所示，$BO\perp$平面M，O为垂足，点O在

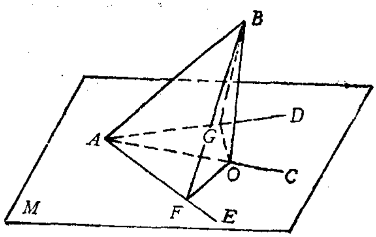

图 3-15

AC上，且$\angle BAE=\angle BAD$。

在平面M内过O作$OG\perp AD$，$OF\perp AE$，垂足为G、F，联结BG和BF，由三垂线定理，得

$$BF\perp AE,\quad BG\perp AD.$$

在直角$\triangle AFB$和直角$\triangle AGB$中，

$\because$ $\angle BAE=\angle BAD$，$AB=AB$，

$\therefore$ $\triangle ABF\cong\triangle ABG$。

$\therefore$ $BF=BG$。

由勾股定理，得 $OF=OG$。

$\therefore$ 点O在$\angle DAE$的平分线上，即AC平分$\angle DAE$。

例8 设$\triangle ABC$的面积为S，一边BC在平面M内，且与平面M的夹角为α，作$AA_1\perp$平面M，垂足为A_1，求$\triangle A_1BC$的面积（图3-16）。