

职工工业余中等学校高中课本

CHU XUE

数 学

第一册

2351

上海教育出版社

职工业余中等学校高中课本

数 学

第 一 册

职工教材编写组编

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 5.75 字数 127,000

1983 年 6 月第 1 版 1983 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—750,000 本

统一书号: K 7150·2910 定价: 0.40 元

说 明

职工业余中等学校高中数学课本，是按照教育部制订的《职工业余中等学校数学教学大纲(试行草案)》初稿，以一九八〇年人民教育出版社出版的工农业余中等学校高中课本《数学》为基础编成的，供干部、职工业余学校教学使用。

这套课本分两册。第一册的内容是函数，三角函数等两章；第二册的内容是空间图形，直线、曲线方程，复数、数列和排列、组合等三章。这套课本的教学时数为250~270课时。第一册为110~120课时，第二册为140~150课时。文科高中可以选学第一册。

这套课本是由教育部组织上海市的部分教师和有关人员编写的，由谢培审定。本册课本由胡德潜、周霖源、王抒编写，赵光初审稿。

职工教材编写组

目

录

第1章 函数	1
一 集合	1
二 二次函数	10
三 一元一次不等式组和一元二次不等式	20
四 幂函数	30
五 指数函数	41
六 对数	46
七 对数函数	65
第2章 三角函数	80
一 角的概念的推广和角的度量	80
二 任意角的三角函数	87
三 斜三角形的解法	110
四 三角函数的图象和性质	124
五 两角和、两角差的三角函数	141
六 反三角函数	163
七 简单的三角方程	171

第1章 函 数

一 集 合

1.1 集合

1. 什么叫集合

我们来看下面的例子：

- (1) 3、2、4、9、0；
- (2) 在同一平面内，到一个定点距离相等的点；
- (3) 某照相馆里的一箱照片；
- (4) 某农机站所有的拖拉机；
- (5) 一个班级的全体同学。

它们分别是五个数的全体、与定点等距离的点的全体、箱内照片的全体、农机站拖拉机的全体、这个班级同学的全体。象这些例子所叙述和表示的对象的全体叫做集合（简称集）。集合里的各个对象叫做集合的元素。我们常用大写字母 A 、 B 、 C 等表示集合，小写字母 a 、 b 、 c 等表示集合的元素。如果 a 是集合 A 的元素，就记为 $a \in A$ ，读做“ a 属于 A ”；如果 a 不是集合 A 的元素，就记为 $a \notin A$ ，读做“ a 不属于 A ”。集合与它的元素的关系是集合包含它的每一个元素，它的每一个元素都属于这个集合。例如

(1) 设 J 为所有整数的集合，显然，任一整数都是它的元素。如 $3 \in J$ 、 $-2 \in J$ 等；而分数 $\frac{1}{3}$ 、无理数 $\sqrt{2}$ 等都不

是 J 的元素, 可写为 $\frac{1}{3} \notin J$ 、 $\sqrt{2} \notin J$ 等.

(2) 设集合 A 是由大于 1 而小于 7 的偶数所组成. 显然 2、4、6 都是集合 A 的元素, 可写为 $2 \in A$ 、 $4 \in A$ 、 $6 \in A$, 而其他的偶数如 8、10 等都不是集合 A 的元素, 可写为 $8 \notin A$ 、 $10 \notin A$ 等.

所谓一个集合是给定的, 就是指, 哪些对象是它的元素, 哪些对象不是它的元素, 可以根据某种原则来判断. 例如, 对于整数集合 J , 我们根据整数的定义判断出 $3 \in J$ 、 $-2 \in J$ 而 $\frac{1}{3} \notin J$ 、 $\sqrt{2} \notin J$.

2. 集合的表示法

表示集合的方法, 常用的有列举法和描述法.

把集合的元素一一列举出来, 写在大括号“ $\{ \}$ ”内, 每个元素仅写一次, 不分次序. 象这样表示集合的方法叫做列举法. 例如: 由数 3、2、4、9、0 组成的集合, 可以写成 $\{3, 2, 4, 9, 0\}$, 或 $\{2, 3, 4, 9, 0\}$, 或 $\{0, 3, 9, 4, 2\}$ 等; 但不可以写成 $\{3, 3, 2, 4, 9, 0\}$ 或 $\{3, 3, 2, 2, 4, 9, 0\}$ 等.

把集合中元素的共同特性描述出来, 写在大括号“ $\{ \}$ ”内, 用来表示集合. 象这样表示集合的方法叫做描述法. 例如:

由某农机站所有的拖拉机组成的集合, 可以表示为

$\{\text{某农机站的拖拉机}\};$

由一个班级的全体同学组成的集合, 可以表示为

$\{\text{一个班级里的同学}\};$

由小于 10 的正偶数组成的集合, 可以表示为

$\{\text{小于 10 的正偶数}\},$

或 $\{x | x \text{ 为小于 10 的正偶数}\};$

由不等式 $x-2>1$ 的所有的解组成的集合, 可以表示为

$$\{x|x-2>1\}, \text{ 或 } \{x:x-2>1\};$$

由在直线 $x+y=0$ 上所有点组成的集合, 可以表示为

$$\{(x, y)|x+y=0\},$$

或

$$\{(x, y):x+y=0\}.$$

今后我们规定 N 表示自然数的集合, J 表示整数的集合, Q 表示有理数的集合, R 表示实数的集合, R^+ 表示正实数的集合, R^- 表示负实数的集合.

例如, 集合 $\{x|0\leq x\leq 2, x\in Q\}$ 表示所有大于或等于零, 并且小于或等于 2 的有理数所组成的集合.

3. 集合的种类

集合可按它所包含的元素的个数分为下面几种:

集合中所包含的元素的个数是有限个, 这样的集合叫做有限集合. 例如: $\{\text{某农机站的拖拉机的}\}$; $\{x|x \text{ 为小于 } 10 \text{ 的正偶数}\}$; $\{\text{一个班级里的同学}\}$; $\{x|1\leq x\leq 100, x\in N\}$. 特别地, 只含有一个元素的集合, 叫做单元素集合. 例如, $\{a\}$; $\{x\}$; $\{0\}$. 应注意 a 和 $\{a\}$ 是不同的, a 表示一个元素, $\{a\}$ 表示只含有一个元素的集合.

集合中所包含的元素的个数是无限多个, 这样的集合叫做无限集合. 例如: $\{x|x-2>1\}$; $\{(x, y)|x+y=0\}$; $\{\text{平面内所有的圆}\}$.

不含任何元素的集合, 叫做空集合, 简称空集. 用符号 $\emptyset$ 表示. 例如, $\{\text{小于零的正整数}\} = \emptyset$; $\{x|x^2+1=0, x\in R\} = \emptyset$. 应注意空集 $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 是不同的, $\emptyset$ 表示不含任何元素的集合, $\{0\}$ 表示只含有一个元素零的单元素集, 如

$$\{x|x^2=0\} = \{0\}.$$

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集

设集合 $A = \{\text{语文、数学、物理、化学}\}$, 集合 $B = \{\text{语文、数学}\}$, 容易看出: 这里, 集合 B 的任何一个元素, 都是集合 A 的元素. 对于两个集合 A 与 B , 如果集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素, 那么, 集合 B 就叫做集合 A 的一个子集. 记作

$$B \subseteq A \text{ 或 } A \supseteq B.$$

读作“ B 包含于 A ”或“ A 包含 B ”.

例如: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$B = \{1, 3, 5\}, \quad C = \{3, 5\}.$$

那末, $A \supseteq B$ 或 $B \subseteq A$; $A \supseteq C$ 或 $C \subseteq A$, 这就是说 B 和 C 都是 A 的子集. 容易看出, C 也是 B 的子集.

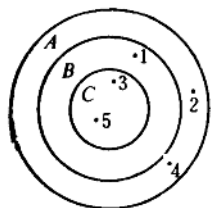


图 1.1

为了直观地表示集合与集合间的关系, 可以用简单的示意图来表示. 从图 1.1 上可以看出:

如果 $A \supseteq B$, $B \supseteq C$, 那么 $A \supseteq C$.

又如, 因为 $R \supseteq Q$, $Q \supseteq N$, 所以 $R \supseteq N$. 上面的关系式, 学生可以仿照图 1.1 把它用图表达出来.

关于子集的定义, 还应注意下列两种特殊情况:

(1) 对于任何一个集合 A , 因为它的每一个元素都是集合 A 的元素, 即 $A \subseteq A$. 也就是说任何一个集合是它本身的子集.

(2) 一般我们规定, 空集是任何集合的子集.

如果 B 是 A 的子集, 并且 A 中至少有一个元素不属于 B , 那么集合 B 就叫做集合 A 的真子集. 记作

$$B \subset A \text{ 或 } A \supset B.$$

例如自然数集 N 是实数集 R 的真子集, 空集是任何非空集合的真子集.

对于两个集合 A 、 B , 如果 $A \subseteq B$, 同时 $A \supseteq B$, 那末, 集合 A 和集合 B 叫做相等. 记作 $A=B$, 读做“集合 A 等于集合 B ”. 一般地说, 当两个集合的元素完全相同时, 那么, 这两个集合相等.

例 1 设集合 $S=\{0, 1, 2\}$, 写出 S 的所有的子集与真子集.

解 S 的所有子集是: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$;

S 的所有真子集是: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$.

例 2 设 $A=\{2, 3\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$. 那末, $A=B$.

解 适合条件 $x^2-5x+6=0$ 的 x 有 $x_1=2$, $x_2=3$, 即 $B=\{2, 3\}$, 所以 A 与 B 的元素完全相同. 即 $A=B$.

2. 交集

设集合 $A=\{\text{语文, 数学, 物理}\}$, $B=\{\text{语文, 数学, 化学}\}$. 那末, 集合 $C=\{\text{语文, 数学}\}$ 是既属于 A 又属于 B 的一切元素所组成的集合, 这时, 我们叫集合 C 是集合 A 与 B 的交集. 也就是说, 把由 A 与 B 的所有公共元素所组成的集合叫做 A 与 B 的交集. 记作 $A \cap B$. 即

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ 并且 } x \in B\}.$$

集合 A 与 B 的交集可用图 1.2 的阴影部分表示.

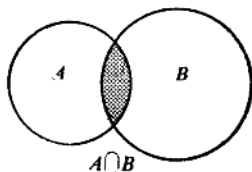


图 1.2

对于任意集合 A 都有

$$A \cap A = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset.$$

例 3 设 $A = \{\text{矩形}\}$, $B = \{\text{菱形}\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{\text{矩形}\} \cap \{\text{菱形}\} = \{\text{正方形}\}.$

例 4 设 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x \geq 0\}$. 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{x | -1 < x < 2\} \cap \{x | x \geq 0\}$
 $= \{x | 0 \leq x < 2\}.$

例 5 设 $A = \{x | 2 < x < 3\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B = \{x | 2 < x < 3\} \cap \{x | x < 2\} = \emptyset.$

例 6 设 $A = \{(x, y) | x + 2y = 3\}$, $B = \{(x, y) | 4x + y = 5\}$, 求 $A \cap B$.

解 $A \cap B$
 $= \{(x, y) | x + 2y = 3\} \cap \{(x, y) | 4x + y = 5\},$
 $= \left\{ (x, y) \left| \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + y = 5 \end{cases} \right. \right\} = \{(1, 1)\}.$

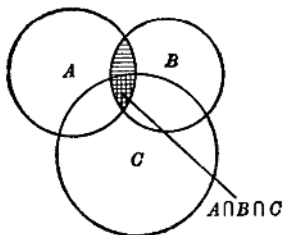


图 1.3

例 7 画示意图表示集合

$$A \cap B \cap C.$$

解 可先画出 $A \cap B$ (横线阴影部分).

再画出 $(A \cap B) \cap C$ (竖线阴影部分).

3. 并集

设集合 $A = \{\text{语文, 数学, 物理}\}$, $B = \{\text{语文, 数学, 化学}\}$, 把 A 与 B 两个集合的元素合并起来, 可以组成一个集合 $D = \{\text{语文, 数学, 物理, 化学}\}$, 对于这样的集合 D , 叫做集合 A 与 B 的并集. 也就是说, 把集合 A 与集合 B 的所有元素合并在一起所组成的集合, 叫做集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$

$A \cup B$ 可用图 1.4 的阴影部分表示.

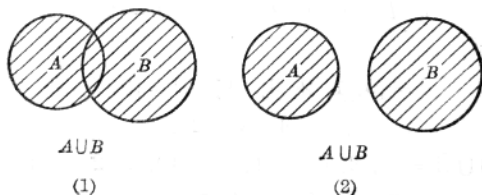


图 1.4

根据定义, 对任何集合都有:

$$A \cup A = A; \quad A \cup \emptyset = A.$$

例 8 设 $A = \{1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 求 $A \cup B$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad A \cup B &= \{1, 2\} \cup \{-1, 0, 1\} \\ &= \{-1, 0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

例 9 设 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | 1 < x < 5\}$, 求 $A \cup B$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad A \cup B &= \{x | -2 < x < 3\} \cup \{x | 1 < x < 5\} \\ &= \{x | -2 < x < 5\}. \end{aligned}$$

4. 补集

在研究集合与集合之间的关系时, 这些集合常常是某一个给定集合的子集, 这个给定的集合叫做全集, 用符号 I 表示. 也就是说, 全集包含了我们所要研究的各个集合的全部元素.

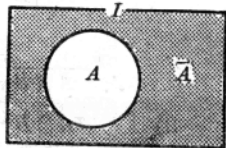


图 1.5

设有某一个给定的全集 I , A 是集合 I 的子集, 那么在集合 I 中除去子集 A , 余下的一切元素所组成的集合, 叫做 A 的补集(或称余集), 记作 $\bar{A}$. 见图 1.5 中的阴影部分.

根据补集的定义, 对任何集合 A 有:

$$A \cup \bar{A} = I, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

例 10 设 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 3, 4\}$, 求 $A \cup \bar{A}$ 和 $A \cap \bar{A}$.

解 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $A = \{0, 3, 4\}$,
那么, $\bar{A} = \{1, 2\}$,

$$A \cup \bar{A} = \{0, 3, 4\} \cup \{1, 2\} = \{0, 1, 2, 3, 4\} = I,$$

$$A \cap \bar{A} = \{0, 3, 4\} \cap \{1, 2\} = \emptyset.$$

例 11 设 $I = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$$A = \{c, d, e, f\}, \quad B = \{e, f, g\}.$$

求证 1) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

证明 已知

$$A = \{c, d, e, f\}, \quad B = \{e, f, g\},$$

则 $\bar{A} = \{a, b, g, h\}$,

$$\bar{B} = \{a, b, c, d, h\}.$$

$$1) \quad A \cup B = \{c, d, e, f, g\},$$

$$\overline{A \cup B} = \{a, b, h\},$$

$$\begin{aligned} \bar{A} \cap \bar{B} &= \{a, b, g, h\} \cap \{a, b, c, d, h\} \\ &= \{a, b, h\}, \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};$$

$$2) \quad A \cap B = \{c, d, e, f\} \cap \{e, f, g\} = \{e, f\},$$

$$\overline{A \cap B} = \{a, b, c, d, g, h\},$$

$$\begin{aligned} \bar{A} \cup \bar{B} &= \{a, b, g, h\} \cup \{a, b, c, d, h\} \\ &= \{a, b, c, d, g, h\}, \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

7. 设 $A = \{x | x \leq 2\}$, $B = \{x | x < 0\}$, 求 $A \cup B$ 和 $A \cap B$.
8. 设 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6\}$.
 写出 $\bar{A}$; $\bar{B}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A \cup B}$; $\overline{A \cap \bar{B}}$; $\overline{A \cup \bar{B}}$.

二 二次函数

1.3 函数, 函数的定义域

在研究两个变量 x 和 y 的函数关系时, “ y 是 x 的函数”这句话, 可以用符号表示为: $y = f(x)$. 例如, A 是 r 的函数, 可以写成 $A = f(r)$.

如果我们要同时研究几个不同的函数关系, 那么就要在括号外面采用不同的字母来区别它们. 例如, 圆的周长 C 是它的半径 r 的函数, 圆的面积 A 也是它的半径 r 的函数, 但是 $C = 2\pi r$, $A = \pi r^2$, 两个函数关系并不相同, 因此就应当在括号外面采用不同字母来分别表示, 可以写成 $C = f(r)$ 和 $A = F(r)$.

对于自变量 x 的一个值 a , 函数 $f(x)$ 的对应值可以记做 $f(a)$. 例如, 如果

$$f(x) = 3x^2 + 2x - 4,$$

那么 $f(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 4 = 12,$

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 \times 0 - 4 = -4,$$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 4 = -3,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = -4\frac{1}{4}.$$

我们还可以看到, 变量虽然可以取各种不同的数值, 但是一般来说, 在许多函数关系里, 自变量的变化是有一定范围的, 函数值的变化也有一定的范围. 自变量的变化范围, 叫做

函数的定义域, 函数值的变化范围, 叫做函数的值域. 例如:

(1) 一本书的单价是 0.4 元, 书的本数 x 和书的总价 y 之间的关系是 $y=0.4x$ (元).

函数的定义域是全体自然数, 函数的值域是

$$\{0.4, 0.8, 1.2, \dots\}.$$

(2) 一个圆的半径 r (厘米) 和它的面积 A (厘米²) 之间的关系是 $A=\pi r^2$.

函数的定义域是 $r>0$, 函数的值域是 $A>0$.

在中学阶段所学的函数常常是能够用一个式子表达的函数. 它的定义域一般是指能使函数表达式有意义的所有实数 x 的集合. 为了研究函数的定义域和性质, 常常要用到区间的概念. 设 a 、 b 是两个实数, 而且 $a<b$, 我们把满足 $a\leq x\leq b$ 这个不等式的一切实数 x 的集合叫做闭区间, 记为 $[a, b]$. 把满足 $a<x<b$ 这个不等式的一切实数 x 的集合叫做开区间, 记为 (a, b) . 同样把满足 $a\leq x<b$, 及 $a<x\leq b$ 的一切实数 x 的集合都叫做半开半闭区间, 记为 $[a, b)$ 及 $(a, b]$. 全体实数的集合 R 记为 $(-\infty, +\infty)$, “ ∞ ”读作“无穷大”, “ $-\infty$ ”读作“负无穷大”, “ $+\infty$ ”读作“正无穷大”. 注意, “ ∞ ”不是一个数. 满足 $x\geq a$, $x>a$, $x\leq b$, $x<b$ 的实数 x 的全体分别记为

$$[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b).$$

例 1 求函数 $f(x)=\frac{3x}{4x-1}$ 的定义域.

解 当 $4x-1=0$ 时, 即当 $x=\frac{1}{4}$ 时, 函数没有意义, 所以函数的定义域是

$$\left\{x \mid x \in R, x \neq \frac{1}{4}\right\},$$

或记为 $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$.

例 2 求函数 $f(x) = 2 + \sqrt{3+4x}$ 的定义域.

解 要使 $\sqrt{3+4x}$ 有意义, 应该使 $3+4x \geq 0$, 即 $x \geq -\frac{3}{4}$. 所以定义域是

$$\left\{x \mid x \geq -\frac{3}{4}\right\} \text{ 或记为 } \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right).$$

例 3 求函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$ 的定义域.

解 要使 $\sqrt{x+1}$ 有意义, 应该有 $x+1 \geq 0$ 即 $x \geq -1$, 要使 $\sqrt{1-x}$ 有意义, 应该有 $1-x \geq 0$ 即 $x \leq 1$. 所以函数的定义域是

$$\{x \mid x \geq -1\} \cap \{x \mid x \leq 1\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\},$$

或记为 $[-1, 1]$.

1.4 二次函数

看下面的例子:

(1) 一正方形的边长是 x , 那么它的面积 y 与边长 x 的关系是 $y = x^2$;

(2) 缝纫机厂第一个月的产量为 60 台, 第三个月的产量 y (台) 与月平均增长率 x 之间的关系是

$$y = 60(1+x)^2,$$

即 $y = 60 + 120x + 60x^2$.

在上面两个函数关系式中, 自变量 x 的最高次数是 2, 我们把形如 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的函数叫做二次函数.

1.5 函数 $y = ax^2$ 的图象和性质

例 1 作函数 $y = x^2$ 和 $y = -x^2$ 的图象.

解 先作函数 $y = x^2$ 的图象. 列出 x, y 的对应数值表:

x		-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	
$y=x^2$		4	$2\frac{1}{4}$	1	0	1	$2\frac{1}{4}$	4	

用表里各组对应值作为点的坐标进行描点，然后用平滑曲线把它们顺次连结起来，就得到函数 $y=x^2$ 的图象(图 1.6)。

用同样方法，可以作出函数 $y=-x^2$ 的图象(图 1.7)。

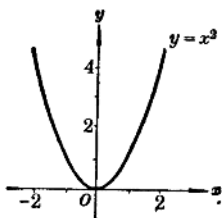


图 1.6

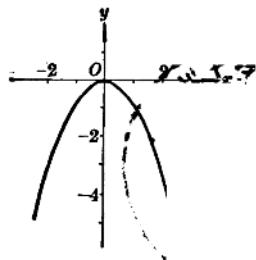


图 1.7

例 2 在同一坐标系里作函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和 $y=2x^2$ 的图象。

解 先作函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象。列出 x 和 y 的对应数值表：

x		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
y		8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	