21世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

高等数学

典型例题与解法［下］

朱建民　等编著

- 归纳要点
- 精选例题
- 典型解法
- 模拟应试
- 考研训练

国防科技大学出版社

21 世纪大学数学基础训练与能力提高丛书

高等数学典型例题与解法

（下册）

多元函数微积分、无穷级数与常微分方程、应试模拟

朱健民　李建平　敖武峰　编著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

内容简介

高等数学典型例题与解法分上、下册出版。下册内容包括:多元微积分及其应用、无穷级数、常微分方程、应试模拟。每章分基本要求、内容提要、典型例题与方法、综合应用与提高(例题)、同步练习与综合练习、单元测试A、B卷。本书力求:对大纲要求有适合性,例题解法有典型性,练习题有代表性,对本科生练习和应试有有效性(考研生亦如此)。本科生、考研生分别使用同步、综合练习与单元测试A、B卷、模拟试卷。适合于理工科、财经管理学科等本科生学习与考研复习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型例题与解法·下/朱健民等编著.—长沙:国防科技大学出版社,2003.7
ISBN 7-81024-978-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①朱…②李… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题指导 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第053217号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640 邮政编码:410073
E-mail: gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:潘生 责任校对:罗青
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×1092 1/16 印张:22.5 字数:547千
2003年10月第1版第1次印刷 印数:1-4000册
ISBN 7-81024-978-9/O·121
定价:29.00元

序

数学有科学皇后之称。在现代社会,自然科学、技术科学与社会科学快速发展,数学在各科学领域的应用愈来愈广泛,而数学本身的分支增多,其理论也愈加深入。数学的发展和数学的应用紧密相关,相互促进。高等数学与现代数学已成为科学家、技术人员和管理人员用来分析和解决现代科技和社会问题的强有力的利器,不仅为解决问题提供了定量分析工具,而且提供了科学的思维方法。

大学教育为适应现代科学发展和人才培养的需要,都把数学教学摆在基础和核心的地位。培养大学生和研究生学习高等数学的浓厚兴趣和理解、应用高等数学的思想、方法的实际能力,是大学生、研究生未来从事现代化工作的必需,是大学数学教师的重任。本丛书编委和国防科技大学出版社为服务大学数学的教与学工作,试图为学生提供一套符合学习规律、适用有效的辅导教材。在编审委员会指导下,参编教师广泛参考国内流行教材和辅导教材,多次研讨写作的目的、要求和方案,定稿前又多次讨论、修改和优化。丛书凝结着作者的心血和创造性劳动。该丛书有如下特点:

1. 满足教学大纲要求,例题习题有典型性、代表性和系列性。作者参照有关学科的本科教学大纲要求,及硕士生入学考试要求而编写,限定内容范围和要求层次。广泛收集国内比较优秀的教材和习题集,反复比较,选择出有典型性、代表性的题目,继而进行分析和解答,使同学们能触类旁通。

2. 作者教学经验丰富,力图适合学生的学习规律。作者都是长期在教学第一线工作,积累了教授与导学的经验,在编写时融合了作者教学经验与教法。根据高等数学的高度抽象性、较强的逻辑性、应用广泛性的特点,掌握其思想和方法必须认真过“应用”关(解题)。而过好“应用”关,除了靠读者数学天赋、悟性,主要还是应“引导”有方。引导的方法主要是,遵循认识规律,例题习题的编排,由浅到深,由简单到复杂,由单一到综合,且提供解题的一般思路,使读者能举一反三。

3. 适合读者自学。大学生学习应有很强的独立性、主动性,况且辅导教

师不可能“招之即来”，然而优秀的“学习辅导书”也就是一位好的老师。该书安排的例题提供了分析思路，典型的同步习题和综合习题提供简答过程，全部习题提供了参考答案，十分有利于同学们自学指导。

本丛书的出版值得庆祝，它必将成为大学生、研究生愉快地进行数学训练、完成学业的益友良师。本书适合于广大的在校大学生、研究生学习，也适合于广大自学青年和在职人员自学之用。

丛书的出版是作者和编辑辛勤劳动的结晶，在此感谢他们的劳动，并向同学们和自学青年郑重推荐此书。

侯振挺

2003 年 8 月

前 言

现代大学教育是以培养学习者获取新知识的能力为主要目的的素质教育。数学素质教育是其最重要的方面之一，这是由数学的重要性和特殊性决定的。数学是自然科学的基本语言，是“整理出的宇宙秩序”，尤其是在知识经济时代，“高技术本质上是数学”，数学已成为一种重要的经济竞争力。数学同时也是“辩证思维的工具”，是当代文化的一个重要组成部分。因此，数学在大学教育中的地位越来越重要，而如何学好数学也成为当代大学生普遍关心的问题。我们认为，熟练掌握数学的基本知识和基本方法，提高综合运用和灵活运用知识的能力是学好数学的基本要求。对数学知识掌握的熟练性、综合性和灵活性，成为各类数学考试，尤其是全国硕士研究生入学考试的测试目标。“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”明确“**要求考生比较系统地理解数学的基本概念和基本理论，掌握数学的基本方法，要求考生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析问题和解决问题的能力**”。由此看出，单纯的死记硬背学不好数学，更考不好数学。为了帮助在校大学生及考研的同学更好地理解和掌握“高等数学”，并提高应试能力，根据国家教委审定的“高等数学课程教学基本要求”，教育部“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求，结合我们长期从事“高等数学”的教学经验及对历年考研数学试题的长期跟踪和分析研究，编写此书。

全书分上、下册，共十一章，除第十一章为实战模拟外，前十章按知识点分类确定，其顺序与教学一致。**遵照重点突出、知识自足、同步训练、循序渐进、巩固提高、举一反三、融会贯通的编写原则**，前十章每章都划分为六个板块：

基本要求 指出本章各知识点的要求。我们用“**理解、了解、知道**”来区分对基本概念和理论的高、中、低三个层次的不同要求，相应地，对运算和推导的不同要求用“**熟练掌握、掌握、会**”来加以区分。读者由此明确学习重点。

内容提要 简明概述本章主要知识点，突出必须掌握的核心知识及考试重点，以方便读者复习。

典型例题与方法 **侧重对学生熟练性的能力培养，同步指导学生学习“高等数学”课程全过程**。紧扣教学基本要求和考试重点，每个主要知识点都精选 1 ~ 3 道题目，讲解典型解法，突出解题思路，归纳解题方法。同时，针对学习中易犯的概念及逻辑错误，对高等数学中较难辨别的概念予以辨析，指导同学们掌握正确的思维方法。

综合应用与提高 **侧重对学生综合性和灵活性的能力培养，指导学生考研复习**。所选题目综合性强、题型较为新颖，一个题目往往涉及不同章节的多个知识点，通常需要熟练地综合和灵活运用所学知识才能解决，这正是考研题的主要特点。通过示范讲解和一题多解，启发和开拓解题思路，希望达到举一反三、融会贯通、触类旁通的效果。

同步及综合练习 包含难度不同的两组练习题。**“同步练习”主要针对本章知识点的**

熟练性训练；“综合练习”则是以本章知识点为中心的综合性及灵活性训练。每组练习中将类型相同的题排在一起，对奇数号题给出简答，对偶数号题给出答案及提示。这种设计对初学者大有裨益。

单元测试　包含难度不同的两组测试题，**“测试题 A”主要以课程基本要求为目标；“测试题 B”则以考研要求为目标。**通过自我测试，既可以及时发现学习中存在的问题以便明确进一步复习的方向，又能通过实战体验，提高应试能力。对测试题我们给出详细的解答，方便读者对照检查。

在第十一章，**提供了每学期期末与全学年的模拟测试题及其解答**，并给出了近三年的全国硕士研究生入学统一考试数学试题，供读者参考。

解题的能力与科学的思维方式、熟练的技巧、涉及知识的使用意识密切相关，所以，熟练掌握基本概念、基本理论和基本方法是至关重要的，通过研习一定数量的范例学会解题不失为应试的一个有效途径。值得指出的是，数学学习中解题的目的，绝不只是为了给出答案，而是通过它启迪与培养人们的逻辑思维和科学研究方法。因此，读者学习解题时不要局限于题目的本身，不要搞题海战术，而应多思考、多联系，通过解题发展自己的能力。使用本书时，建议读者先不看解答做题，然后对照和消化解答，并找出有益的启发，以获得较大的收获。

本书的出版，得到国防科技大学出版社和国防科技大学理学院数学与系统科学系领导的大力支持。衷心感谢本书的责任编辑潘生副编审，没有他的热情鼓励和辛勤劳动，本书难以付梓。电子科学与工程学院 2001 级部分学员认真阅读了本书初稿，符绩枕教授、毛紫阳教员为本书提供了部分材料并和作者讨论了书中的一些问题，他们提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。本书还参考了国内外的一些教材和习题集，对其著作者表示衷心感谢。

尽管作者竭尽其力，但书中还会有错漏不当之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 8 月

目　录

第六章　多元函数微分学

第七章　重积分及其应用

第八章　曲线积分、曲面积分及其应用

第九章 级 数

第十章　常微分方程

第十一章　应试模拟

第六章　多元函数微分学

一、基本要求

理解多元函数的概念;了解二元函数的极限与连续的概念,知道有界闭区域上连续函数的性质;理解二元函数的偏导数、全微分的概念;了解二阶混合偏导数可交换求偏导次序的条件;了解二元函数可微分的必要条件与充分条件;知道方向导数与梯度的概念与计算;熟练掌握复合函数微分法与隐函数的微分法;会求曲面的切平面方程和法线方程及空间曲线的切线方程和法平面方程;理解多元函数的极值的概念;知道二元函数极值存在的必要条件与充分条件;会用极值与条件极值的方法求解一些最大值或最小值问题.

二、内容提要

1.多元函数的概念

1)平面区域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 xOy 平面上的一点,δ 为正常数,称平面点集

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

为 P_0 的 δ 邻域,$U(P_0,\delta)$ 中去掉 P_0 的点集称为 P_0 的去心邻域,记为 $\dot{U}(P_0,\delta)$,也可以定义 P_0 的 δ 邻域为点集

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\}.$$

邻域是一个非常重要的概念,由它可以定义不同属性的平面上的点或平面点集.

设 E 为 xOy 平面上的点集,P 为平面上的一点.若存在 P 的 δ 邻域 $U(P,\delta)$ 使 $U(P,\delta)\subset E$,则称 P 为 E 的内点.若 P 的任何邻域中既有 E 中的点,又有非 E 的点,即对于任何 $\delta>0$,有 $U(P,\delta)\cap E\neq\varnothing$,$U(P,\delta)\cap E^c\neq\varnothing$,则称 P 为 E 的边界点,其中 E^c 是 E 关于 xOy 平面的余集,E 的边界点的全体记为 ∂E.

若 E 中的所有点均为内点,则称平面点集 E 为开集.对于点集 E,若 E 中任何两点之间均可由 E 中的有限折线相连,则称 E 为连通的.连通的开集称为区域,通常称为开区域,而称 $\bar{E}=E\cup\partial E$ 为闭区域.

对区域 E,若 E 中任何简单闭曲线的内部均在 E 内,则称 E 为单连通区域.非单连通的区域称为多连通区域.

上述定义又可推广到一般的 n 维空间

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n\}$$

上,只需定义 $\mathbf{R}^n$ 中两点

$$M_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), M_2(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

的距离为

$$|M_1M_2| = [(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

2) 二元函数的定义

设 E 为 xOy 平面上的点集,若存在一个对应法则 f,对 E 中的任何一点 (x,y),均有惟一实变数 z 与之对应,则称 z 是 x、y 的二元实函数,简称二元函数,记为

$$z = f(x,y),(x,y)\in E,\text{或 } z = f(P), P\in E.$$

此时,称 E 为 $z = f(x,y)$ 的定义域,集合

$$f(E) = \{f(x,y) \mid (x,y)\in E\}$$

称为该函数的值域.

同样,可以定义三元函数 $u = f(x,y,z)$ 或一般 n 元函数 $u = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 通常我们研究二元函数. 这是因为二元函数的概念和性质可推广到一般的多元函数,并且二元函数有几何意义,它表示三维空间中的曲面.

3) 二元函数的极限与连续

设 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)\in \bar{D}$(即 P_0 为 D 的内点或边界点). 若存在常数 A,使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $P(x,y)\in D\cap U(P_0,\delta)$ 时,

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon,$$

则称 $z = f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时存在极限 A,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A \text{ 或 } f(x,y)\to A,\ (x,y)\to(x_0,y_0).$$

此时的极限称为二重极限,与之相对应的是二次极限(或累次极限),即

$$\lim_{x\to x_0}[\lim_{y\to y_0} f(x,y)] \text{ 和 } \lim_{y\to y_0}[\lim_{x\to x_0} f(x,y)].$$

值得注意的是,二元函数的二重极限和二次极限之间不存在必然的联系.

设 $z = f(x,y)$ 在区域 D 上有定义,$P_0(x_0,y_0)\in D$,若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$,则称 $f(x,y)$ 在 P_0 处连续. 此时,D 可以是开区域或闭区域,因此 P_0 也可能是 D 的边界点. 类似于闭区间上一元连续函数,二元连续函数有下面的性质:

设 $z = f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,则 $f(x,y)$ 在 D 上存在最大值 M 和最小值 m,即存在 $(x_1,y_1)\in D$ 和 $(x_2,y_2)\in D$,使

$$f(x_1,y_1) = M,\ f(x_2,y_2) = m,$$

而对 $\forall (x,y)\in D$,有

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M.$$

并且对于介于 m 和 M 之间的任何数 γ,一定存在 $(\xi,\eta)\in D$,使 $f(\xi,\eta) = \gamma$.

因此,有界闭区域上的连续函数也具有有界性、最值性和介值性.

2.偏导数

1) 偏导数的定义

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称该极限为 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 x 的偏导数,记为

$$f'_x(x_0,y_0),\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\text{ 或}\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}.$$

同理,可定义 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处关于 y 的偏导数

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

在不引起混淆的情况下,有时为了记号的简单,也将 $f'_x(x_0,y_0)$ 和 $f'_y(x_0,y_0)$ 记为 $f'_1(x_0,y_0)$ 和 $f'_2(x_0,y_0)$.

由偏导数的定义可知,偏导数实质上是一元函数的导数,如

$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}.$$

因此,一元函数的求导公式和求导法则对求偏导数也是适用的.

对多元函数亦可定义相应的偏导数,例如对三元函数 $u=f(x,y,z)$,可定义 $\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

2) 高阶偏导数

对二元函数 $z=f(x,y)$,若它在区域 D 上关于 x 和 y 的偏导数存在,则可定义 $f(x,y)$ 的二阶偏导数

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ f''_{yy}(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

称 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 为二阶混合偏导数,下面的定理给出了它们相等的条件:

设 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内存在,若它们在 P_0 处连续,则

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

同样地,可以定义二元函数的更高阶偏导数和一般多元函数的高阶偏导数.

3.全微分

1) 全微分的定义

设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义,$(x,y)\in D$,$(x+\Delta x,y+\Delta y)\in D$,若存在与 Δx,Δy 无关的数 A 和 B,使

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$,则称 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微,且称

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

为 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处的全微分.

二元函数的可微性是一元函数的可微性的推广.若 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微,则它在 (x,y) 处连续.一元函数可微与函数存在导数等价,但二元函数可微和存在偏导数却没有这样的关系.实际上,若 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微,则它在该点处的偏导数存在,且全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

但反过来不成立.

2) *判别函数可微的方法*

通常有两种方法来判别函数的可微性:

方法一:若 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 的某邻域中的偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 存在,且 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在 (x,y) 处连续,则 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处可微.

方法二:首先求 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$,然后验证

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z - [f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y]}{\rho} = 0,$$

其中 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

在利用方法一来确定 $f(x,y)$ 的可微性时,通常根据多元初等函数的连续性可知 $f(x,y)$ 有连续的偏导数.而适用于方法二的具体问题往往是考虑 $f(x,y)$ 在一些特殊点的可微性,其中 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 一般要用定义求得.

4.多元复合函数微分法

1) *复合函数的一阶偏导数*

设 $z = f(u,v)$ 可微,$u = u(x,y)$ 和 $v = v(x,y)$ 存在偏导数,则 $z = f[u(x,y), v(x,y)]$ 有关于 x 和 y 的偏导数如下:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

特别地,若 $u = u(x)$, $v = v(x)$,则 $z = f[u(x), v(x)]$ 对 x 的导数为

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

称上述求导(或偏导)的公式为链式法则.这里要注意求偏导数的对象,即是对复合前的函数求导数(或偏导数),还是对复合后的函数求偏导,例如 $z = f(x, y(x))$,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

这里的 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示复合前的二元函数 $z = f(x,y)$ 关于 x 求偏导数,而 $\frac{dz}{dx}$ 则表示复合以后的函数 $z = f(x, y(x))$ 关于 x 求导数,二者切不可混为一谈.