理论力学

自学辅导

霍瑞云　石金钟　编

河南教育出版社

前　言

本书系中学物理教师、社会青年系统自学理论力学的参考读物，也是各类学校学习理论力学课程的参考书。

理论力学既是一门技术基础课程，又是一门基础理论课程。它的概念既有高度的抽象性又广泛地联系实际。为了帮助读者能够熟练地掌握概念，并运用理论解决实际问题，本书在编写过程中收入了大量的例题和自测题，并分别给出了解题方法和答案。这对于自学理论力学的读者，无论是加深对概念的理解或提高解题技巧的能力都起着重要作用。

本书共分五章：质点力学，质点系力学，刚体力学，非惯性系质点力学，分析力学。每章都按照理论力学教学大纲提出了基本要求，并简要介绍了有关的基本内容，对于基本概念用问答的形式给出了较详细的解答，对于一些难度较大，典型的题，以例题的形式给出了题思路，分析问题的方法及解答。为了帮助读者自我检查是否已经掌握理论与概念，在每节后面给出了自我检测题。并在附录中给出了自我检测题的答案。

本书由郑州大学多年从事理论力学教学的副教授孟广达同志审阅全部初稿，在此表示感谢。

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者批评、指正。

编　者

1994.3

目　　录

第一章　质点力学

§1　质点运动学

一．基本要求

1. 深刻理解质点、刚体、参照系、运动方程、位矢、位移、速度、加速度等基本概念。

2. 能根据速度加速度的定义，导出它们在几种坐标中的分量表达式，并能熟记这些公式。

3. 熟练掌握质点运动学的两类问题的求解方法。即：已知运动和几何关系，建立运动学方程，通过求导求得速度和加速度。反之已知质点的速度和加速度以及初始条件，通过积分求出运动学方程。

在学习理论力学时一定要注意对基本概念的理解，要弄懂公式中每一项的物理含义和公式的推证，以及公式的应用，不要死背公式。

二．基本理论

1. 基本概念

机械运动 —— 物体之间相对位置随时间 t 的不断变化称为机械运动。

质点 —— 具有质量而不考虑它的大小和形状的物体称为质点。

刚体 —— 物体上任意两点之间的距离，不随时间、不因力的作用而发生变化的物体称为刚体。

参考物 —— 由于运动的相对性，要描述质点的运动必须首先选定某一不变形的物体作为参考，作为参考的物体称为参考物。

参照系 —— 在参考物上固连三条伸向宇宙相交于一点(交点在参考体上)的不共面的直线所构成的刚性框架，这种抽象化的参考框架称为参照系。因此参照系理解为与参考体相固连的整个空间。

坐标系 —— 为了定量地描述质点的运动在参照系上建立适当的坐标系，坐标系与参照系固连，这时可以把坐标系看成是参照系的数学抽象。

位矢(位置矢量) —— 质点在空间的位置可以用一个矢量来确定(如图 1.1.1)，即从参考系一定点 O 指向质点 P 的矢量，$\boldsymbol{r} = OP$，称为位置矢量。

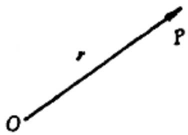

图 1.1.1

运动学方程 —— 矢量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ 描述了质点在空间的位置随时间的变化规律，称为质点运动学方程。运动学方程在各坐标中的表示式：直角坐标系运动学方程为

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

极坐标系运动学方程为

$$r = r(t)$$
$$\theta = \theta(t)$$

柱坐标系运动学方程为

$$r = r(t)$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$z = z(t)$$

球坐标系运动学方程为

$$r = r(t)$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

若已知质点的运动轨迹，则弧坐标所表示的运动学方程为

$$s = s(t)$$

轨道方程 —— 由坐标表示的运动学方程中消去时间变量 t，所得到的各坐标之间的关系式，该关系式即是质点的轨道方程。

轨迹 —— 在运动过程中质点在空间所经过的全部位置点的集合称为该质点的运动轨迹。

2. 速度和加速度

位移 —— 质点在 Δt 时间间隔内位置的移动。它是一个矢量，从起点指向终点。(如图 1.1.2)

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

$\Delta \boldsymbol{r}$：即 Δt 时间内的位移。

速度 —— 位矢 $\boldsymbol{r}(t)$ 对时间 t 的一次导数，描述了质点的运动状态，它是一个矢量.其方向与 $d\boldsymbol{r}$ 的方向相同，即沿轨道切向。

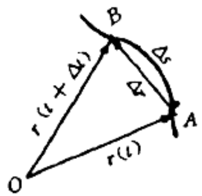

图 1.1.2

即：$\boldsymbol{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}$

速率 $v = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$　　s：是弧长

加速度 —— 速度 $\boldsymbol{v}$ 对时间 t 的变化率称为加速度。

即：$\boldsymbol{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$

3. 速度、加速度的分量表示式

速度和加速度在各坐标系中的分量表示式如下所示：

a） 矢量法：运动学方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$

速度 $$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}}$$

加速度 $$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\ddot{\boldsymbol{r}}$$

b） 直角坐标法：运动学方程 $x=x(t)\quad y=y(t)\quad z=z(t)$

速度
$$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$$
$$v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}$$
$$v_z=\frac{dz}{dt}=\dot{z}$$
$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$
$$\cos(\alpha)=v_x/v$$
$$\cos(\beta)=v_y/v$$
$$\cos(\gamma)=v_z/v$$

加速度
$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}$$
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$
$$\cos(\alpha)=a_x/a$$
$$\cos(\beta)=a_y/a$$
$$\cos(\gamma)=a_z/a$$

c） 极坐标法：运动学方程 $r=r(t)\qquad \theta=\theta(t)$

速度
$$v_r=\frac{dr}{dt}=\dot{r}$$
$$v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=r\dot{\theta}$$

加速度　$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

d)　柱坐标法：运动学方程　$r = (t) \quad \theta = \theta(t) \quad z = z(t)$

速度　$v_r = \dot{r}$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$v_z = \dot{z}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2}$$

加速度　$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$a_z = \ddot{z}$$

$$a = \sqrt{a_r{}^2 + a_\theta{}^2 + a_z{}^2}$$

e)　自然坐标法：运动学方程　沿轨迹的运动方程 $s = f(t)$

速度　$v = \dfrac{ds}{dt}$　沿轨迹的切向

加速度　$a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_b = 0$$

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}$$

在解质点力学问题时有多种方法，常用的有矢量法，直角坐标法、极坐标法、自然坐标法。对同一个问题应用以上方法运算所得结果一致，但用不同的方法解题的难易程度大不一样，若选取合适的坐标系可使问题简化，易于求解。一般来讲，矢量法能同时表示出运动参数的大小和方向，运算简捷，因此在推导理论公式

时常采用矢量法。当质点运动的轨迹未知时一般采用直角坐标法。当质点运动轨迹已知时常采用自然法。极坐标法常用来解决平面曲线运动，对于有心运动一般采用极坐标法。有些问题也可综合应用不同方法求解，也可从一种方法转换到另一种方法。

三. 问题解答

1　运动方程与轨迹方程有什么区别?

答：点的运动方程是以数学式所表示的点的几何位置随时间 t 变化的规律，因此运动方程是时间 t 的单值、连续、可微函数。所以由运动方程可以确定每瞬时质点在空间的位置。而质点的轨迹方程是描写点在空间运动的路线，是一种几何方程。因此由运动方程中消去参数 t 就可得轨迹方程。

例如：图(1.1.3) 椭圆规的曲柄 oc 可绕定轴 o 转动，其端点 c 与规尺 AB 的中点以铰链相连结，而规尺 AB 的两端 A, B 分别在相互垂直的滑槽中运动。已知：$OC = AC = BC = l$, $MC = a$, $\psi = \omega t$. 试求规尺上点 M 的运动方程和轨迹方程。

解：要求 M 点的轨迹，必须先写出 M 点的运动方程，然后从运动方程中消去时间 t 得轨迹方程。要写出 M 点的运动方程就应选定坐标系，再把 M 点放在任意位置上。为此，取坐标 Oxy，则 M 点的运动方程为

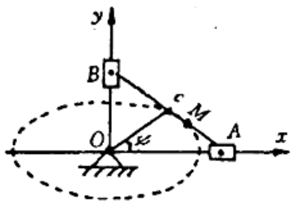

图　1.1.3

$$x = (OC + CM)\cos\psi = (l + a)\cos(\omega t) \quad ①$$

$$y = AM\sin\psi = (l - a)\sin(\omega t) \quad ②$$

由 ①② 式消去时间 t，得轨迹方程

$$\frac{x^2}{(l+a)^2}+\frac{y^2}{(l-a)^2}=1 \qquad ③$$

③式是一个椭圆方程，所以 M 点的运动轨迹是长轴与 x 轴重合，短轴与 y 轴重合的椭圆。

2 在用极坐标描述质点的运动时，会遇到单位矢量求导的问题，而单位矢量对 t 求导有的等于零，有的不为零为什么？

答：所谓单位矢量其大小都为1个单位，大小都不随时间 t 变化，而方向有的不随时间 t 变化，如与参照系固连在一起的直角坐标系的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，它们的大小、方向都是固定不变的，是恒矢量，所以它们对 t 求导为零，即 $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=0$. 可是极坐标与自然坐标的单位矢量它们的方向随时间 t 变化，所以它们对 t 求导均不为零。

在极坐标中，质点 M 的位置由两个独立变量 r 和 θ 确定如图(1.1.4)

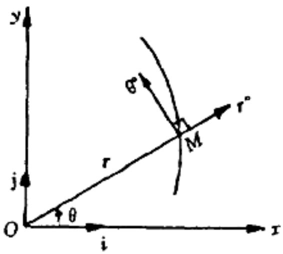

图 1.1.4

点 M 的运动方程是：

$r=r(t)$

$\theta=\theta(t)$

位置矢量 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{r}^\circ$

其中，$\boldsymbol{r}^\circ$ 为径向单位矢量。

将 $\boldsymbol{r}^\circ$ 顺着 θ 增加的方向转 90° 即为横向单位矢量 $\boldsymbol{\theta}^\circ$。

图(1.1.4) 可以得出

$\cos\theta \boldsymbol{i}+\sin\theta \boldsymbol{j}$

$n\theta \boldsymbol{i}+\cos\theta \boldsymbol{j}$

定不动的坐

导数为零，则：

$) \dot\theta \boldsymbol{i}+(\cos\theta)\dot\theta \boldsymbol{j}$

$$= \theta(-\sin\theta \boldsymbol{i} + \cos\theta \boldsymbol{j})$$
$$= \theta \boldsymbol{\theta}^0$$
$$\boldsymbol{\theta}^0 = \frac{d\boldsymbol{\theta}^0}{dt} = -(\cos\theta)\,\theta \boldsymbol{i} - (\sin\theta)\,\theta \boldsymbol{j}$$
$$= -\theta(\cos\theta \boldsymbol{i} + \sin\theta \boldsymbol{j})$$
$$= -\theta \boldsymbol{r}^0$$

由此可以得出这样的结论:单位矢量的导数与其自身垂直,这是一个普遍结论。

这可以证明如下:

设 $\boldsymbol{A}^0$ 为一单位矢量,$\frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt}$ 为单位矢量的导数

因为　$\boldsymbol{A}^0 \cdot \boldsymbol{A}^0 = 1$

上式对 t 求导得　$2\boldsymbol{A}^0 \cdot \frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt} = 0$

此式表明 $\boldsymbol{A}^0$ 与 $\frac{d\boldsymbol{A}^0}{dt}$ 互相垂直。

3.　$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 与 $\frac{dr}{dt}$ 有无区别?$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ 与 $\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$ 有无区别?$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 与 $\frac{dv}{dt}$ 有无区别?因为 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ 是否 $\frac{dr}{dt} = v$?

答:有区别。$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 是表示质点的位矢 $\boldsymbol{r}$ 的变化率,是质点的速度,是矢量。而 $\frac{dr}{dt}$ 仅表示矢径 r 的大小的变化率,是标量,在曲线运动中 $\frac{dr}{dt}$ 是 $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 沿径向方向的速度分量 v_r。$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ 沿横向还有一个速度分量 v_θ。

$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ 表示速度的大小,$\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$ 表示矢径 $\boldsymbol{r}$ 大小的变化率。即矢量求导的绝对值 $\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$ 并不等于矢量绝对值的求导($\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$)。

$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}$ 是速度矢量对时间的导数,是质点的加速度,它包含了

速度大小和方向的全部变化，即全加速度，是矢量。而$\frac{dv}{dt}=a_\tau$只表示速度大小的变化率，是$a=\frac{dv}{dt}$在切线方向的分量，它不反映速度在方向上的变化。它是代数值。

$\frac{dr}{dt}$是矢径r的大小的变化率，是$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$沿径向的分量。而$v$是速率，是速度的大小，是$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$在切线上的投影，$v=\frac{ds}{dt}\neq\frac{dr}{dt}$.

4　矢量导数的分量和矢量分量的导数相等吗？

答：不等，例如在平面极坐标中，质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\boldsymbol{r}^\circ+r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{\theta}^\circ$$

而　$$\boldsymbol{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{r}^\circ+(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}^\circ$$

说明矢量导数的分量和矢量分量的导数不等。

5　质点在下述情况中作何种运动？

① $a_\tau\equiv 0, a_n\equiv 0$

② $a_\tau\neq 0, a_n\equiv 0$

③ $a_\tau\equiv 0, a_n\neq 0$

④ $a_\tau\neq 0, a_n\neq 0$

⑤ $a\equiv 0$

答：①　质点作匀速直线运动

②　变速直线运动

③　匀速曲线运动，此时包括匀速圆周运动，但不一定作匀速圆周运动，这是因为$a_t\equiv 0$，即$v=$常数，质点只有法向加速度$a_n=\frac{V^2}{\rho}$. 而a_n不一定是常数，所以曲线率半径ρ也不一定是常量，故轨迹不一定是圆。当$a_n=$常量时，这时质点才作匀速率圆周运动。

④　变速曲线运动

⑤ 与①同

6 下列结论是否正确?并说明理由。

① $v=0$,则 a 必定等于零。

② $a=0$,则 v 必定等于零。

③ 当 $\boldsymbol{a}$ 是恒矢量时,质点必定作匀加速直线运动。

④ 若 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 始终垂直,则 v 必定为常量。

⑤ $|\Delta \boldsymbol{r}|=\Delta r$, $|\Delta \boldsymbol{v}|=\Delta v$

⑥ 只有当点的轨迹为直线时,$\boldsymbol{v}$ 才可能与 $\boldsymbol{a}$ 平行。

答:① 不正确。例如抛体运动,当质点在最高点时其速度为零,而加速度 $a=g$,不等于零。再如质点由静止开始运动,此时 $v=0$,而 a 必不等于零。

② 不正确。如等速直线运动,$a=0$ 而 $v\neq 0$.

③ 不正确,这要决定初速度 v_0 的方向,若 v_0与 a 方向一致,则质点作匀加速直线运动。若 v_0 与 a 方向相反,则质点作减速直线运动。若 v_0 与 a 有一夹角,则质点作平面曲线运动,如斜抛运动。

④ 正确。因为 $\boldsymbol{v}$ 沿轨迹切向,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 垂直则 $\boldsymbol{a}$ 必定沿轨迹法向,亦即 $\boldsymbol{a}$ 在切向分量等于零,所以 v 必定为常量。

⑤ 不正确。$|\Delta \boldsymbol{r}|$ 是位移量,是矢径 $\boldsymbol{r}$ 增量的大小,而 Δr 是矢径长度的增量。从图(1.1.5)可以明显看出两者不等。同样道理 $|\Delta \boldsymbol{v}|\neq \Delta v$.

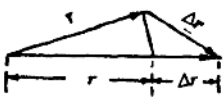

图 1.1.5

⑥ 不正确。当点作曲线运动时在拐点处 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,不过这是瞬时的。

四. 解题指导与例题

1. 解题思路

质点运动学基本上分成两大类：

(a) 已知运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，求速度 $\boldsymbol{v}$ 和加速度 $\boldsymbol{a}$，这类问题又分两种情况，一种题目直接告诉运动方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，另一种由质点的具体运动分析才能找出 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，对于后一种情况必需把质点放在任意位置上，然后再由几何关系找出质点的位置与时间 t 之间的关系。对于这第一大类问题只要把 $\boldsymbol{r}(t)$ 对 t 分别求一阶、二阶导数即可求出 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}$.

(b) 已知速度 $\boldsymbol{v}$ 或加速度 $\boldsymbol{a}$，以及初始条件 $t_0,\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{V}_0$，求运动规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，对于这类问题利用分离变量积分来解。

如：$\boldsymbol{v}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}(t)dt+\boldsymbol{v}_0$

$$\boldsymbol{r}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(t)dt+\boldsymbol{r}_0$$

积分时一般不用矢量式而用分量式

如：$\boldsymbol{v}(t)=\int_{t_0}^{t}a_x(t)dt\boldsymbol{i}+\int_{t_0}^{t}a_y(t)dt\boldsymbol{j}+\int_{t_0}^{t}a_z(t)dt\boldsymbol{k}+\boldsymbol{v}_0$

$$\boldsymbol{r}(t)=\int_{t_0}^{t}v_x(t)dt\boldsymbol{i}+\int_{t_0}^{t}v_y(t)dt\boldsymbol{j}+\int_{t_0}^{t}v_z(t)dt\boldsymbol{k}+\boldsymbol{r}_0$$

具体作题时的思路：

① 分析题意，由已知量和未知量分析确定属于那类问题。

② 确定研究对象：选质点为研究对象，若是第一类问题应把研究的质点放在任意位置上，若是第二类问题应找出初始条件即 $t_0,\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{v}_0$.

③ 选参照系建立坐标，坐标的选择是任意的，坐标原点的选择也是任意的。需要选什么坐标根据具体情况而定。所选坐标要便于计算。

④ 求导或积分解出结果进行讨论。

2. 解题时应注意的几个问题：

① 找研究对象时应选能把已知量与未知量连系一起的质点

作为研究对象。

② 在运算时式子中的速度及加速度分量写成$\dot{x}$，$\ddot{x}$ 或$\frac{dx}{dt}$，$\frac{d^2x}{dt^2}$改变力学中写法 v_x，a_x 等习惯。

③ 对于随时间变化的角度，要从相对参照系方向固定不变的直线（固定线）开始，向着运动直线（动线），用箭头表示出角度的正方向如图（1.1.6）中极角 θ 的正方向与单摆摆角 θ 的正方向。

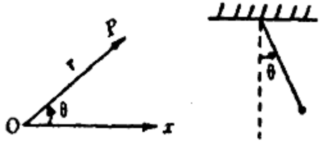

图 1.1.6

④ 严格区分矢量 $\boldsymbol{v}$，矢量的模 v（恒正），矢量的分量 v_x（可正可负）三种符号，不可混淆。书写矢量和单位矢量时切不可忘记矢量符号（$\rightharpoonup$）。写对时间 t 的导数时切不可忘记符号上面的点点。

⑤ y' 与$\dot{y}$ 含意不同（$y'=\frac{dy(x)}{dx}$，$\dot{y}=\frac{dy(t)}{dt}$），$\ddot{\theta}$ 与$\dot{\theta}^2$ 的含意也不同（$\ddot{\theta}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$，$\dot{\theta}^2=\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}$）。

3. 例题

例 1. 如图（1.1.7）所示，杆 OA 绕 O 点作定轴转动。小环 C 同时活套在 OA 杆和半径为 R 的固定圆环上，此固定圆环与 OA 杆在同一平面内并且通过 O 点，其圆心在 O_1 点。已知 OA 杆与 $\overline{OO_1}$ 线的夹角 $\theta=\theta(t)$，求小环 C 在任一时刻的速率和加速度的大小。

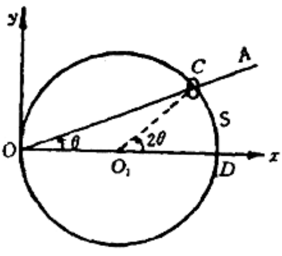

图 1.1.7

解:选固定圆环为参照系,选小环为质点,将质点小环放在任意位置C点。建立坐标,由几何关系可写出小环的运动方程然后对t求导即可求得小环C的速度与加速度。

下面我们分别采用不同的坐标系来分别研究这一问题。

(a) 直角坐标系

建立如图(1.1.7)所示的直角坐标系Oxy,该坐标是固定在参照系上。由几何关系则得

$$x = R + R\cos 2\theta \qquad ①$$

$$y = R\sin 2\theta \qquad ②$$

式子中x和y通过θ角随时间的变化而变化,所以①②两式即质点C的运动方程。

①②两式对t求导得

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -2R(\sin 2\theta)\cdot\theta \qquad ③$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = 2R(\cos 2\theta)\cdot\theta \qquad ④$$

∴ 速率 $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2R\theta$

③④两式再对t求导得

$$a_x = \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -2R(\sin 2\theta)\cdot\ddot{\theta} - 4R(\cos 2\theta)\theta^2$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = 2R(\cos 2\theta)\cdot\ddot{\theta} - 4R(\sin 2\theta)\theta^2$$

则加速度大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + 4\theta^4}$$

(b) 极坐标系

如图(1.1.7)取o为极点,ox为极轴,$oC = r$为极径,$\angle xoA = \theta$为极角

则运动方程为 $r = \overline{OC} = 2R\cos\theta \qquad \theta = \theta(t)$ ①

$$v_r = \dot{r} = -2R\sin\theta\theta \qquad ②$$

$$v_\theta = r \cdot \dot{\theta} = 2R\cos\theta\dot{\theta} \quad ③$$

所以速率 $v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = 2R\dot{\theta}$

加速度的极坐标分量为

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -2R(\cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + \sin\theta\,\ddot{\theta}) - 2R\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$a_\theta = r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2R(\cos\theta \cdot \ddot{\theta}) + 2(-2R\sin\theta \cdot \dot{\theta})\dot{\theta}$$

所以加速度大小为　$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 2R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}^4}$

(c) 自然坐标

如图(1.1.7)所示取弧坐标原点为 D 取大圆环为弧坐标，顺着 θ 角方向取弧坐标正向

则运动方程为　$s = \overset{\frown}{DC} = 2R\theta$

其速率为　$v = \frac{ds}{dt} = 2R\dot{\theta}$　方向沿轨道切线正方向。

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2R\,\ddot{\theta}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = 4R\dot{\theta}^2$$

故加速度 $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 2R\sqrt{\ddot{\theta}^2 + 4\dot{\theta}^4}$

从此题可以看出，虽用不同的坐标其结果是一致的，所以它们对描述质点的运动是等价的。但也清楚看到采用不同的坐标，演算难易程度大不一样。对该题用自然法最简单。因此作题时选用恰当的坐标可以减少很多麻烦。

例 2　一质点作平面运动，其速率为常量 v_0，径向速度亦为常量 $v_r = b$，$(0 < b < v_0)$ 求质点运动的轨迹方程，设 $t = 0$ 时 $r = r_0$，$\theta_0 = 0$

解法一　该题是属于已知速度求运动方程然后从运动方程中消去 t 得轨迹方程。

由已知条件得

$$\dot{r} = b \quad ①$$