6

线性代数辅导和题解

◎ 蒋长锦　编著

XIANXING DAISHU FUDAO HE TIJIE

中国科学技术大学出版社

线性代数辅导和题解

蒋长锦　编著

中国科学技术大学出版社
合　肥

内 容 简 介

本书共分 8 章：行列式，矩阵运算，向量空间，线性方程组，矩阵特征值和特征向量，线性空间和线性变换，欧氏空间，实二次型；附录给出中国科学技术大学教材《线性代数简明教程》习题的参考答案．每章内容的安排为：内容提要，典型题例，基础练习，提高训练等．本书可作为理科(非数学系)，工科和经济学科本科生线性代数课程的学习辅导读物；可供硕士研究生入学应试线性代数内容的复习及强化训练之用，也可供有关教师及科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数辅导和题解/蒋长锦编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2005.12

ISBN 7-312-01847-5

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 蒋…　Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 110787 号

中国科学技术大学出版社出版发行

（安徽省合肥市金寨路 96 号，230026）

合肥现代印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本：850×1168/32　　印张：10.625　　字数：280 千

2005 年 12 月第 1 版　　2005 年 12 月第 1 次印刷

印数：1—5000 册

ISBN 7-312-01847-5/O・316　　定价：16.00 元

前　言

随着电子计算机技术的飞速发展和广泛应用，既可处理连续问题又可处理离散问题的线性代数的理论与方法，已成为科技人员必备的数学基础知识. 线性代数成为一门重要的基础课程.

线性代数概念的抽象性、表现形式的多样性和灵活性，决定了线性代数具有独特理论体系和处理问题特有规律和方法，初学者往往感到不易抓住重点. 有些学生感觉概念、理论似乎已经懂了，但做起习题来却常常无从下手，困难重重.

作者多年来教授线性代数这门课程，深刻体会到要学好线性代数，除了要加深对基本概念、基本理论的理解之外，还应做一定数量的习题. 通过独立思考和反复练习，在实践的过程中，不断加深理解，提高分析问题和解决问题的能力. 培养科学思维和创新能力. 作者编写本书，旨在揭示线性代数处理问题的基本规律，帮助读者用较少的时间掌握线性代数的基本内容、基本规律和基本方法，通过对大量典型例题的分析和求解，揭示了线性代数的解题方法与技巧，使学生可以举一反三，触类旁通，提高分析问题和解决问题的能力，提高学习效率.

本书共分8章：行列式，矩阵运算，向量空间，线性方程组，矩阵特征值和特征向量，线性空间和线性变换，欧氏空间,实二次型．每章皆由以下部分组成：

(1) 内容提要：是对本章基本概念、基本理论及基本方法的简要归纳，提纲挈领，举其大要，便于读者复习．使读者对该章的基本内容及要点一览无余．

(2) 典型题例：根据该章特点选择有代表性的典型例题进行分析和求解，揭示解题方法与技巧．例题的题型有检验基本概念的单项选择题,填空题,计算题和证明题等．掌握解题步骤和解题技巧，特别是在解题过程中，加深对基本概念和基本理论的理解，提高分析问题和解决问题的能力．

(3) 基础练习：读者在这些习题的训练中，可以增强解决问题的能力，检验自己对所学知识和解题方法与技巧的掌握程度．

(4) 提高训练：这部分习题难度略深，内容可能涉及前后各章．目的在于使读者能够将前后知识融会贯通，提高推理以及应试能力．

此外，本书还以附录形式给出了中国科学技术大学教材《线性代数简明教程》(陈龙玄，钟立敏编，中国科学技术大学出版社出版)习题的参考答案．它既可作为该教材的教学辅导，也是对习题类型与难度的一个拓展．

本书可作为理科(非数学系)、工科、经济学科本科生

及电大、职大学生学习线性代数课程的辅导读物；可供报考硕士研究生的考生考前复习和强化训练之用；也可供有关教师及科技工作者参考.

作者感谢李洪梅、蒋智同志为本书的录排付出的辛勤劳动.

限于作者水平，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者提出批评指教.

作　者

2005 年 8 月于中国科学技术大学

符 号 说 明

$A, B, C,$	矩阵
O	零矩阵
$I(I_n)$	单位矩阵(n 阶单位矩阵)
$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$	对角元为 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的对角矩阵
$P(i,j)$	交换单位矩阵第 i，j 行得到的初等矩阵
$P(i(k))$	非零数 k 乘单位矩阵第 i 行得到的初等阵
$P(i,j(k))$	单位矩阵第 j 行 k 倍加到第 i 行得到的初等矩阵
$\det A$	方阵 A 的行列式
$D_n, D_n=\lvert a_{ij}\rvert$	n 阶行列式
$\mathrm{rank}A$	矩阵 A 的秩
$\mathrm{tr}A$	方阵 A 的迹
A'或 A^T(A^H 或 A^+)	矩阵 A 的转置(共轭转置)
A^*	方阵 A 的伴随矩阵
$A\sim B$	矩阵 A 与 B 相似
$A\simeq B$	矩阵 A 与 B 相合
$A\cong B$	矩阵 A 与 B 等价(相抵)
$\boldsymbol{\theta}$ 或 $\mathbf{0}$	零向量或线性空间的零元素
$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},$	向量
$\boldsymbol{e}_i$	第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的向量
$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$(或 $\lVert\boldsymbol{a}\rVert$)	向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积
R ,C	实数，复数集合
F	数域 F

R^n, C^n	实，复 n 维向量(数组)集合(空间)
F^n	数域 F 上 n 维向量(数组)集合(空间)
$R^{m\times n}, C^{m\times n}$	实，复 $m\times n$ 矩阵集合
$F^{m\times n}$	数域 F 上 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathrm{P}[x]$	一元实系数多项式集合
$\mathrm{P}_n[x]$	次数不超过 n 的一元实系数多项式集合
$W_1 \cap W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的交
$W_1 \cup W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的和
$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$	由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 生成的子空间
$\mathscr{A}, \mathscr{B}$	线性变换

目　　次

第1章　行　列　式

1.1　内容提要

1.1.1　行列式的定义

排列及其逆序数　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，称为一个 **n 元排列**.

在一个排列中，如果有一个大的数排在一个小的数之前，则称这两个数构成该排列的一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的逆序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

排列(1，2，…，n)具有自然顺序，称为**自然排列**.

在一个 n 元排列中，互换某两个数的位置，其余数不动，称为排列的一次**对换**.

任一排列，经一次对换，必改变其奇偶性.

任一 n 元排列总可经若干次对换后成为自然排列，且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

说明：为定义行列式使用的排列，仅考虑不同正整数的排列，这些正整数可以是连续的,也可以是不连续的. 为了书写和阅读的方便，在排列的正整数和正整数之间可以使用空格，逗号，竖线（|）等作为分隔符.

n 阶行列式的定义　n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 是由 n 个数

$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$, 通过下式所确定的一个数.

$$D_n(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

在行列式中，我们把横排的数组称为行，竖排的数组称为列，而称 a_{ij} 的第一个下标 i 为行指标，第二个下标 j 为列指标. a_{ij} 是行列式中位于第 i 行第 j 列的元素. 符号 $\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$ 表示对所有 n 元排列求和，因此，n 阶行列式是有 $n!$ 个项的代数和. 和式中每一项是由取自行列式中所有的不同行和不同列的 n 个元素的乘积冠以一定正负号所得：当把这 n 个元素的行指标排成自然排列后，如相应的列指标的排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$, 为偶排列，则冠以正号，反之，则冠以负号.

1.1.2 行列式的性质

按行列式的定义计算行列式的值通常是不方便的. 利用行列式的性质计算行列式是一般的惯例.

性质 1 行列式的行列互换其值不变，即行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 互换行列式中任意两行(列)其值变号.

性质 3 若行列式中有两行(列)相同，则行列式为零.

性质 4 行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外. 或者说，

用数 k 乘行列式某行(列)的所有元素，等于用 k 乘行列式.

特别地，若 k=0，则有：若行列式中有某行(列)的元素全为零，则行列式为零.

性质 5 若行列式中有两行(列)成比例，则行列式为零.

性质 6 如果行列式某行(列)的元素都是两个数的和，则此行列式可以写成两个行列式的和.

性质 7 把行列式某行(列)的 k 倍加至行列式的另一行(列)，行列式的值不变.

利用性质 7 可以把行列式中某些元素化成零，因而是最常用的一个性质.

性质 8 (行列式的乘法规则) 设有两个 n 阶方阵 A，B，对应的行列式记为 $\det A$，$\det B$，$\det(AB)$则

$\det(AB) = \det A \det B$.

1.1.3 行列式的展开定理

在 n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 中,划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素后，由余下来的元素构成的 n-1 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}. 而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**.

行列式展开定理 n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 的值等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

即按第 i 行展开

$$D_n(a_{ij})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},\quad i=1,2,\cdots,n;$$

按第 j 列展开

$$D_n(a_{ij})=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

推论 n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 的任一行(列)的各元素与另一行