

线性代数

6
◎ 蒋长锦 编著

辅导和题解

XIANXING DAISHU
FUDAO HE TIJIE

中国科学技术大学出版社

线性代数辅导和题解

蒋长锦 编著



中国科学技术大学出版社

合肥

内 容 简 介

本书共分 8 章: 行列式, 矩阵运算, 向量空间, 线性方程组, 矩阵特征值和特征向量, 线性空间和线性变换, 欧氏空间, 实二次型; 附录给出中国科学技术大学教材《线性代数简明教程》习题的参考答案. 每章内容的安排为: 内容提要, 典型题例, 基础练习, 提高训练等. 本书可作为理科(非数学系), 工科和经济学科本科生线性代数课程的学习辅导读物; 可供硕士研究生入学应试线性代数内容的复习及强化训练之用, 也可供有关教师及科技工作者参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数辅导和题解/蒋长锦编著. —合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005.12

ISBN 7-312-01847-5

I. 线… II. 蒋… III. 线性代数—高等学校—教学参考资料 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 110787 号

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026)

合肥现代印务有限公司印刷

全国新华书店经销

开本: 850×1168/32

印张: 10.625 字数: 280 千

2005 年 12 月第 1 版

2005 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—5000 册

ISBN 7-312-01847-5/O · 316 定价: 16.00 元

前 言

随着电子计算机技术的飞速发展和广泛应用，既可处理连续问题又可处理离散问题的线性代数的理论与方法，已成为科技人员必备的数学基础知识。线性代数成为一门重要的基础课程。

线性代数概念的抽象性、表现形式的多样性和灵活性，决定了线性代数具有独特理论体系和处理问题特有规律和方法，初学者往往感到不易抓住重点。有些学生感觉概念、理论似乎已经懂了，但做起习题来却常常无从下手，困难重重。

作者多年来教授线性代数这门课程，深刻体会到要学好线性代数，除了要加深对基本概念、基本理论的理解之外，还应做一定数量的习题。通过独立思考和反复练习，在实践的过程中，不断加深理解，提高分析问题和解决问题的能力。培养科学思维 and 创新能力。作者编写本书，旨在揭示线性代数处理问题的基本规律，帮助读者用较少的时间掌握线性代数的基本内容、基本规律和基本方法，通过对大量典型例题的分析和求解，揭示了线性代数的解题方法与技巧，使学生可以举一反三，触类旁通，提高分析问题和解决问题的能力，提高学习效率。

本书共分8章：行列式，矩阵运算，向量空间，线性方程组，矩阵特征值和特征向量，线性空间和线性变换，欧氏空间，实二次型。每章皆由以下部分组成：

(1) 内容提要：是对本章基本概念、基本理论及基本方法的简要归纳，提纲挈领，举其大要，便于读者复习。使读者对该章的基本内容及要点一览无余。

(2) 典型题例：根据该章特点选择有代表性的典型例题进行分析和求解，揭示解题方法与技巧。例题的题型有检验基本概念的单项选择题，填空题，计算题和证明题等。掌握解题步骤和解题技巧，特别是在解题过程中，加深对基本概念和基本理论的理解，提高分析问题和解决问题的能力。

(3) 基础练习：读者在这些习题的训练中，可以增强解决问题的能力，检验自己对所学知识和解题方法与技巧的掌握程度。

(4) 提高训练：这部分习题难度略深，内容可能涉及前后各章。目的在于使读者能够将前后知识融会贯通，提高推理以及应试能力。

此外，本书还以附录形式给出了中国科学技术大学教材《线性代数简明教程》(陈龙玄，钟立敏编，中国科学技术大学出版社出版)习题的参考答案。它既可作为该教材的教学辅导，也是对习题类型与难度的一个拓展。

本书可作为理科(非数学系)、工科、经济学科本科生

及电大、职大学生学习线性代数课程的辅导读物；可供报考硕士研究生的考生考前复习和强化训练之用；也可供有关教师及科技工作者参考。

作者感谢李洪梅、蒋智同志为本书的录排付出的辛勤劳动。

限于作者水平，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者提出批评指教。

作 者

2005 年 8 月于中国科学技术大学

符号说明

$A, B, C,$	矩阵
O	零矩阵
$I(I_n)$	单位矩阵(n 阶单位矩阵)
$\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$	对角元为 $d_1, d_2, \dots, d_n$ 的对角矩阵
$P(i, j)$	交换单位矩阵第 i, j 行得到的初等矩阵
$P(i(k))$	非零数 k 乘单位矩阵第 i 行得到的初等阵
$P(i, j(k))$	单位矩阵第 j 行 k 倍加到第 i 行得到的初等矩阵
$\det A$	方阵 A 的行列式
$D_n, D_n = a_{ij} $	n 阶行列式
$\text{rank} A$	矩阵 A 的秩
$\text{tr} A$	方阵 A 的迹
A' 或 A^T (A^H 或 A^+)	矩阵 A 的转置(共轭转置)
A^*	方阵 A 的伴随矩阵
$A \sim B$	矩阵 A 与 B 相似
$A \simeq B$	矩阵 A 与 B 相合
$A \equiv B$	矩阵 A 与 B 等价(相抵)
θ 或 0	零向量或线性空间的零元素
$a, b, c,$	向量
e_i	第 i 个分量为 1 其余分量为 0 的向量
$ a $ (或 $\ a\ $)	向量 a 的长度
(a, b)	向量 a 与 b 的内积
R, C	实数, 复数集合
F	数域 F

R^n, C^n	实, 复 n 维向量(数组)集合(空间)
F^n	数域 F 上 n 维向量(数组)集合(空间)
$R^{m \times n}, C^{m \times n}$	实, 复 $m \times n$ 矩阵集合
$F^{m \times n}$	数域 F 上 $m \times n$ 矩阵的集合
$P[x]$	一元实系数多项式集合
$P_n[x]$	次数不超过 n 的一元实系数多项式集合
$W_1 \cap W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的交
$W_1 \cup W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的和
$\text{span}\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$	由向量 $a_1, a_2, \dots, a_r$ 生成的子空间
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	线性变换

目 次

第 1 章	行列式	1
1.1	内容提要	1
1.1.1	行列式的定义	1
1.1.2	行列式的性质	2
1.1.3	行列式的展开定理	3
1.1.4	特殊行列式	4
1.2	典型题例	7
1.2.1	利用性质计算行列式	8
1.2.2	行列式的降阶	14
1.2.3	行列式的加边	15
1.2.4	利用递推	17
1.2.5	利用数学归纳法	19
1.2.6	利用矩阵乘法	21
1.3	基础练习	22
1.3.1	基础练习题	22
1.3.2	答案与提示	26
1.4	提高训练	27
1.4.1	提高训练题	27
1.4.2	答案与提示	29
第 2 章	矩阵运算	33
2.1	内容提要	33
2.1.1	矩阵的概念	33
2.1.2	矩阵运算	34
2.1.3	逆矩阵	37
2.1.4	初等变换与初等矩阵	38

2.1.5	分块矩阵	39
2.2	典型例题	42
2.2.1	矩阵运算	42
2.2.2	矩阵求逆	44
2.2.3	解矩阵方程	49
2.2.4	特殊矩阵	52
2.2.5	四分块矩阵	54
2.3	基础练习	56
2.3.1	基础练习题	56
2.3.2	答案与提示	60
2.4	提高训练	64
2.4.1	提高训练题	64
2.4.2	答案与提示	68
第3章	向量空间	72
3.1	内容提要	72
3.1.1	n 维向量及其线性运算	72
3.1.2	向量组的线性相关性	73
3.1.3	向量组的最大无关组与秩	75
3.1.4	矩阵的秩	75
3.1.5	向量空间	77
3.1.6	基, 维数, 坐标	78
3.1.7	过渡矩阵	78
3.2	典型题解	79
3.2.1	向量空间的判定	79
3.2.2	向量组的线性相关性	80
3.2.3	求向量组的最大无关组与秩	82
3.2.4	基, 维数, 坐标	86
3.2.5	过渡矩阵和坐标变换	87
3.2.6	向量组和矩阵秩的证明	91

3.3	基础练习	94
3.3.1	基础练习题	94
3.3.2	答案与提示	98
3.4	提高训练	101
3.4.1	提高训练题	101
3.4.2	答案与提示	104
第 4 章	线性方程组	107
4.1	内容提要	107
4.1.1	线性方程组的解	107
4.1.2	克莱姆 (Cramer) 法则	108
4.1.3	消元法和方程组的解	109
4.1.4	方程组解的结构	110
4.2	典型题解	111
4.2.1	克莱姆(Cramer)法则	111
4.2.2	消元法解方程组	113
4.2.3	方程组有解条件	116
4.2.4	方程组的通解	118
4.2.5	含参数方程组的求解	121
4.3	基础练习	127
4.3.1	基础练习题	127
4.3.2	答案与提示	131
4.4	提高训练	134
4.4.1	提高训练题	134
4.4.2	答案与提示	137
第 5 章	矩阵特征值和特征向量	143
5.1	内容提要	143
5.1.1	特征值和特征向量	143
5.1.2	特征值和特征向量计算	144
5.1.3	特征值和特征向量性质	145

5.1.4	矩阵的相似	145
5.1.5	方阵相似对角化	146
5.2	典型题例	148
5.2.1	特征值和特征向量.....	148
5.2.2	Hamilton-Cayley 定理及其应用	152
5.2.3	矩阵的相似	154
5.2.4	方阵相似对角化	156
5.3	基础练习	161
5.3.1	基础练习题	161
5.3.2	答案与提示	163
5.4	提高训练	165
5.4.1	提高训练题	165
5.4.2	答案与提示	167
第 6 章	线性空间和线性变换	169
6.1	内容提要	169
6.1.1	线性空间的定义	169
6.1.2	基、维数和坐标	171
6.1.3	线性空间的同构	172
6.1.4	线性变换	173
6.1.5	线性变换及其矩阵表示.....	174
6.1.6	线性变换的运算	175
6.2	典型题例	176
6.2.1	线性空间的判定	176
6.2.2	向量组线性相关性.....	178
6.2.3	基、维数和坐标计算.....	179
6.2.4	线性变换及其矩阵表示.....	181
6.2.5	线性变换的运算	186
6.3	基础练习	188
6.3.1	基础练习题	188

6.3.2	答案与提示	191
6.4	提高训练	194
6.4.1	提高训练题	194
6.4.2	答案与提示	196
第 7 章	欧氏空间	200
7.1	内容提要	200
7.1.1	欧氏空间和内积	200
7.1.2	向量的长度和夹角	201
7.1.3	标准正交基	202
7.1.4	正交变换和正交矩阵	203
7.1.5	对称变换和对称矩阵	204
7.1.6	酉空间概述	205
7.1.7	酉阵和厄阵的对角化	207
7.2	典型题解	208
7.2.1	欧氏空间的概念	208
7.2.2	向量的长度和夹角	210
7.2.3	标准正交基	211
7.2.4	正交矩阵	215
7.2.5	实对称矩阵和正交相似对角化	216
7.3	基础练习	220
7.3.1	基础练习题	220
7.3.2	答案与提示	222
7.4	提高训练	224
7.4.1	提高练习题	224
7.4.2	答案与提示	225
第 8 章	实二次型	230
8.1	内容提要	230
8.1.1	实二次型及其表示	230
8.1.2	化实二次型为标准形	230

8.1.3	惯性定理和规范形.....	233
8.1.4	定正二次型和定正矩阵.....	233
8.2	典型题解	235
8.2.1	二次型的矩阵表示及秩.....	235
8.2.2	主轴化方法	236
8.2.3	配平方法	239
8.2.4	初等变换方法	241
8.2.5	定正二次型和定正矩阵.....	243
8.2.6	定正二次型的判断.....	244
8.3	基础练习	245
8.3.1	基础练习题	245
8.3.2	答案与提示	248
8.4	提高训练	253
8.4.1	提高练习题	253
8.4.2	答案与提示	257

附 录 中国科大版《线性代数简明教程》(陈龙玄,

钟立敏 编)习题参考答案	262
第一章 行列式和线性方程组 (习题一).....	262
第二章 矩阵 (习题二).....	270
第三章 n 维线性空间 (习题三).....	281
第四章 线性变换 (习题四).....	293
第五章 欧氏空间 (习题五).....	305
第六章 实二次型 (习题六).....	316
第七章 若当(Jordan)标准形 (习题七).....	325

第 1 章 行 列 式

1.1 内容提要

1.1.1 行列式的定义

排列及其逆序数 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的有序数组 $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, 称为一个 n 元排列.

在一个排列中, 如果有一个大的数排在一个小的数之前, 则称这两个数构成该排列的一个逆序. 一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

排列 $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 的逆序数记为 $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$. 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

排列 $(1, 2, \dots, n)$ 具有自然顺序, 称为自然排列.

在一个 n 元排列中, 互换某两个数的位置, 其余数不动, 称为排列的一次对换.

任一排列, 经一次对换, 必改变其奇偶性.

任一 n 元排列总可经若干次对换后成为自然排列, 且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

说明: 为定义行列式使用的排列, 仅考虑不同正整数的排列, 这些正整数可以是连续的, 也可以是不连续的. 为了书写和阅读的方便, 在排列的正整数和正整数之间可以使用空格, 逗号, 竖线 (|) 等作为分隔符.

n 阶行列式的定义 n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 是由 n 个数

$a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 通过下式所确定的一个数.

$$D_n(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在行列式中, 我们把横排的数组称为行, 竖排的数组称为列, 而称 a_{ij} 的第一个下标 i 为行指标, 第二个下标 j 为列指标. a_{ij} 是行列式中位于第 i 行第 j 列的元素. 符号 $\sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 表示对所有 n 元

排列求和, 因此, n 阶行列式是有 $n!$ 个项的代数和. 和式中每一项是由取自行列式中所有的不同行和不同列的 n 个元素的乘积冠以一定正负号所得: 当把这 n 个元素的行指标排成自然排列后, 如相应的列指标的排列 $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, 为偶排列, 则冠以正号, 反之, 则冠以负号.

1.1.2 行列式的性质

按行列式的定义计算行列式的值通常是不方便的. 利用行列式的性质计算行列式是一般的惯例.

性质 1 行列式的行列互换其值不变, 即行列式与它的转置行列式相等.

性质 2 互换行列式中任意两行(列)其值变号.

性质 3 若行列式中有两行(列)相同, 则行列式为零.

性质 4 行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外. 或者说,

用数 k 乘行列式某行(列)的所有元素, 等于用 k 乘行列式.

特别地, 若 $k=0$, 则有: 若行列式中有某行(列)的元素全为零, 则行列式为零.

性质 5 若行列式中有两行(列)成比例, 则行列式为零.

性质 6 如果行列式某行(列)的元素都是两个数的和, 则此行列式可以写成两个行列式的和.

性质 7 把行列式某行(列)的 k 倍加至行列式的另一行(列), 行列式的值不变.

利用性质 7 可以把行列式中某些元素化成零, 因而是最常用的一个性质.

性质 8 (行列式的乘法规则) 设有两个 n 阶方阵 A, B , 对应的行列式记为 $\det A, \det B, \det(AB)$ 则

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

1.1.3 行列式的展开定理

在 n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 中, 划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的所有元素后, 由余下来的元素构成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} . 而称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

行列式展开定理 n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 的值等于它的任意一行(列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

即按第 i 行展开

$$D_n(a_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, \quad i=1, 2, \dots, n;$$

按第 j 列展开

$$D_n(a_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

推论 n 阶行列式 $D_n(a_{ij})$ 的任一行(列)的各元素与另一行