李松文 编

平面图形的翻折与旋转

北京师范大学出版社

平面图形的翻折与旋转

李松文 编

北京师范大学出版社

平面图形的翻折与旋转
李松文 编
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京通县印刷厂印刷
*
开本: 787×1092 1/32 印张: 4.75 字数: 98 千
1986年11月第1版 1986年11月第1次印刷
印数: 1—4,000
统一书号: 7243·439 定价: 0.72元

前　言

《平面图形的翻折与旋转》是配合高中学生学习立体几何的课外读物，一个空间图形通过平面图形的翻折与旋转而得到，通过图形中诸元素的变与不变的特点，来研究空间图形与平面图形之间的联系和空间图形的一些重要性质，从而帮助学生树立空间概念和培养空间想象能力.

这里所谈的平面图形，主要指平面几何和解析几何中最基本的图形，将这些图形按照给定的条件进行翻折或旋转后，就变为空间图形了，从而沟通了平面几何、立体几何、解析几何之间的联系，使学生较灵活地运用基本概念、定理和法则等来研究空间图形的基本性质.

由于本人水平有限，其中必有不少错误和不妥之处，请批评、指正.

编者

目　录

§1　从立体几何和平面几何的联系谈起

平面图形是由同一平面内的点、线所构成的图形，平面几何主要研究平面图形的形状、大小和位置关系；空间图形是由空间的点、线、面所构成的图形，立体几何主要研究空间图形的性质、形状、画法及其应用。

立体几何的研究是在平面几何的基础上进行的，空间图形一般是由平面图形的翻折、剪拼、旋转等变化而得到，平面图形是空间图形的一部分，也可把平面图形视为空间图形的特殊情况，这就使得平面图形和空间图形，平面几何和立体几何有着内在的联系，但又有本质的区别．

（一）　某些空间图形中的问题转化为平面图形中来研究

请读者考虑以下两个问题：

问题1　在正四面体$ABCD$的表面P处（P不在正面体的顶点）有一只蚂蚁要绕四面体一周，每个面都恰好爬过一次，最后回到P处，问蚂蚁怎么走法使得爬行的路线最短（图1-1）？

问题2　在长方体$ABCD—A_1B_1C_1D_1$的A点有一只蜘蛛，C_1处有一只苍蝇，蜘蛛要尽快地到达C_1点捕获苍蝇，它应沿哪条路线爬，使得路程最短？最短路程是多少？（图1-2，假定棱AB、AD、AA_1的长分别是a、b、c，且 $a>$

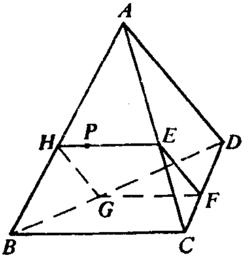


图1-1

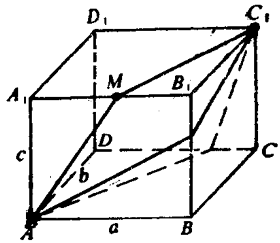


图1-2

$b>c$）

上述两个问题都是寻找点与点之间的最短距离问题，问题1是从P点出发经过正四面体的四个面又回到P点；问题2是在长方体的面上寻找A点到C_1点的最短距离，怎么解决呢？

这就不难想到在平面图形中的一条重要性质，即在所有连结两点的线中，线段最短．于是就需要将空间图形中的问题转化到平面图形中去解决较为方便．

在问题1中，假如过P点的$HEFGH$的路线最短，按上述路线将四面体剪开铺平，如图1－3．

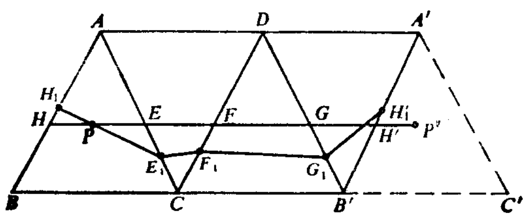


图1-3

其中正$\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle CDB'$，$\triangle DB'A'$是正四面体的四个面．为使转化为两点间的距离问题，就再多铺一次$\triangle ABC$到$\triangle A'B'C'$，P点和P'点的连线，线段PP'的长度就是最短距离．

不难证明，$PH=P'H'$，$PP'\parallel BB'$．

显然，过P点的其余路线，如图中折线$H_1E_1—E_1F_1—F_1G_1—G_1H_1'$都大于$HH'$．

因为$HE\parallel BC$，$EF\parallel AD$，$FG\parallel CB$,$GH'\parallel DA'$，于是在图1－1的正四面体中，过P点的最短路线就可作出，即

过P作$HE\parallel BC$交AB于H，交AC于E；过E作$EF\parallel AD$，交CD于F；过F作$FG\parallel CB'$,交$B'D$于G，连GH，就是所求．其最短路线就是正四面体棱长的2倍．

在问题2中，在长方体的面上从A出发到C_1的最短距离，只要在从A经过两个面到C_1就可以了，在图1－2中，如$AM—MC_1$是经面ABB_1A_1和面$A_1B_1C_1D_1$，于是就可能有下面的六种情况：

从A出发经面ABB_1A_1和BCC_1B_1或$A_1B_1C_1D_1$到达C_1；

从A出发经面$ABCD$和BCC_1B_1或DCC_1D_1到达C_1；

从A出发经面ADD_1A_1和$A_1B_1C_1D_1$或DCC_1D_1到达C_1．

根据长方体的对称性，实际上只要研究三种情况就够了，即从A出发经面ABB_1A_1和$A_1B_1C_1D_1$，从A出发经面$ABCD$和BCC_1B_1，从A出发经面ADD_1A_1和DCC_1D_1三种情况．

怎样求最短路程呢？

下面做出上述三种情况的展开图：图1－4（1）（2）（3）．

这样在图1－4（1）（2）（3）中，分别求AC_1，其中最小

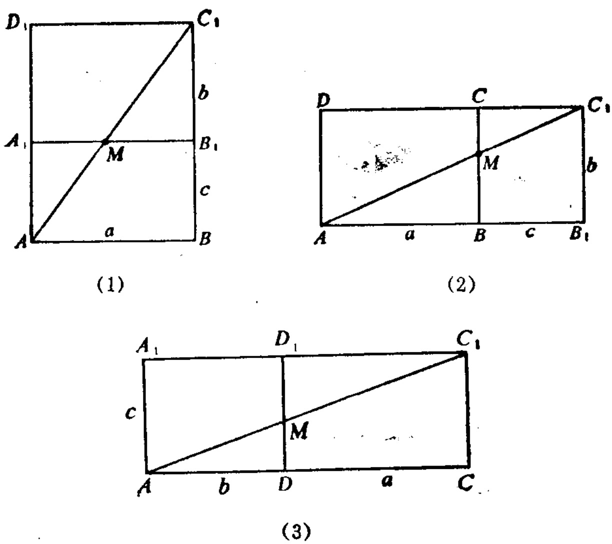


图1-4

者就是最短路程.

在图1-4(1)中，$AC_1=\sqrt{a^2+(b+c)^2}$，

在图1-4(2)中，$AC_1=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$，

在图1-4(3)中，$AC_1=\sqrt{(a+b)^2+c^2}$.

由$a>b>c$，可得$ab>ac>bc$.

从而可得，

$$\sqrt{(a+b)^2+c^2}>\sqrt{(a+c)^2+b^2}>\sqrt{a^2+(b+c)^2}.$$

故知，从A出发经面ABB_1A_1和$A_1B_1C_1D_1$或从A出发经面$ABCD$和DCC_1D_1的路程最短. 其最短路程为
$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc}$.

那么，怎样在空间图形即图1-2中画出路线呢?这就要在

图 1－4（1）中确定M点的位置.

$$\because \quad \frac{MB_1}{AB}=\frac{C_1B_1}{C_1B} \quad \therefore \quad \frac{MB_1}{a}=\frac{b}{b+c},$$

$$\therefore \quad MB_1=\frac{ab}{b+c},$$

故在图 1－2 中，在A_1B_1上截取$B_1M=\dfrac{ab}{b+c}$，就可求得M点，连AM和MC_1，则路线AM-MC_1就是蜘蛛爬行的最短路程.

从上面两个问题，可以看到某些空间图形中的问题，当转化到平面图形上时，研究起来就很方便，也便于解决问题.

另外，在空间图形中，当所研究的对象归结为同一平面时，这实际上就变成了一个平面几何中的问题，请看下面的问题 3.

问题 3　图 1－5，棱长为12cm的正方体被平面$\triangle ABC$所截，其中$BB'=CC'=9$ cm，试求

（1）$\triangle ABC$的面积；　（2）被平面ABC所截的截面面积.

分析：（1）欲求$\triangle ABC$的面积，根据已知条件可求出AB,AC,BC三边的长，

$\because$　$BB'=CC'=9$，求得

$AB=AC=15,$

$\because$　$BB' \perp\!\!\!= CC'$，

$\therefore$　$BCC'B'$为▱，

$BC=B'C'=12\sqrt{2}$，

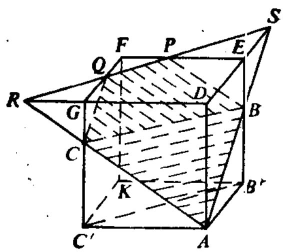


图1-5

由已求得的三边，利用海伦公式

$S_{\triangle}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 可求得$\triangle ABC$的面积为 $18\sqrt{34}\ (cm^2)$.

（2）欲求被平面ABC所截的截面面积，关键是要先作出这个截面，AB，AC与DE，DG的延长线分别交于S，R，连RS分别交EF、FG于P、Q，则截面$ABPQC$为所求（图1－5）.

$\because$ $S_{多边形ABPQC}=S_{\triangle ABC}+S_{四边形BPQC}$，需研究四边形$BPQC$的形状，

在$\triangle SEB$与$\triangle SDA$中，$EB\parallel DA$， $\therefore$ $\frac{SE}{SD}=\frac{EB}{DA}$.

即$\frac{SE}{SE+12}=\frac{12-9}{12}$，故$SE=4$，$SB=5$，

同理可求$RG=4$，$RC=5$，

在$\triangle SPE$与$\triangle SRD$中，$PE\parallel RD$， $\therefore$ $\frac{PE}{RD}=\frac{SE}{SD}$，

即$\frac{PE}{4+12}=\frac{4}{4+12}$， 故$PE=4$， $SP=4\sqrt{2}$，

同理可求$QG=4$，$RQ=4\sqrt{2}$，

$\therefore$ $SR=\sqrt{SD^2+RD^2}=16\sqrt{2}$，

$PQ=16\sqrt{2}-2\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$，

又 $PB=\sqrt{BE^2+PE^2}=5$，$QC=5$，

在$\triangle ABC$与$\triangle ASR$中，$\frac{AB}{SB}=\frac{15}{5}$，$\frac{AC}{RC}=\frac{15}{5}$

$\therefore$ $\frac{AB}{SB}=\frac{AC}{RC}$，$\therefore$ $BC\parallel SR$.

故四边形$BPQC$为等腰梯形.

$\therefore$ 梯形的高为 $\sqrt{PB^2-\left(\frac{BC-PQ}{2}\right)^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{17}$，

$$S_{梯形BPQC}=\frac{1}{2}(8\sqrt{2}+12\sqrt{2})\cdot\sqrt{17}=$$

$$=10\sqrt{34}(\mathrm{cm}^2)$$

故 $S_{截面ABPQC}=S_{\triangle ABC}+S_{梯形BPQC}=18\sqrt{34}+10\sqrt{34}$

$=28\sqrt{34}(\mathrm{cm}^2)$.

此问题虽是一个立体几何问题，但在确定截面后，解决此问题时，用到的是平面几何的一些重要性质，如：平行线段成比例；勾股定理；等腰梯形的判定；三角形的面积；梯形的面积，以及平面图形面积的分割等.

（二）立体几何和平面几何中某些问题解决的思想方法相类似

例1 点 A、B 在直线 MN 的同侧（图 1－6），在 MN 上求一点 P，使 $PA+PB$ 为最小.

解：作点 A 关于直线 MN 的对称点 A'，连 $A'B$ 交 MN 于 P 点，P 就是所求的点，此时 $PA+PB$ 为最小.

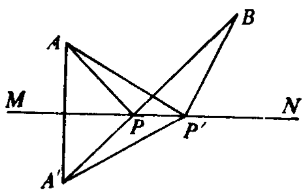


图1-6

事实上，若在 MN 上任取一点 P'（异于 P 点），连 $P'B$、$P'A$，$P'A'$，在 $\triangle P'A'B$ 中，则 $P'A'+P'B>A'B$，

$\because$ $P'A=P'A$，$A'B=PA+PB$

$\therefore$ $P'A+P'B>PA+PB$，即 $PA+PB$ 为最小.

例 2　在平面M的同侧有P、Q两点，试在平面M上求一点S，使$SP+SQ$为最小.

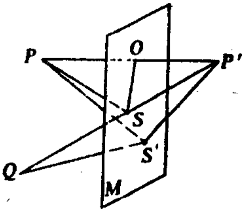


图1-7

解：作点P关于平面M的对称点P'，连$P'Q$交平面M于一点S，则S点为所求的点，此时$SP+SQ$为最小(图 1－7).

事实上，连OS，　$\because$　$PP'\perp$平面M，$OP=OP'$，

$\therefore$　$\triangle OPS\cong\triangle OP'S$，

$\therefore$　$SP=SP'$.

若在平面M上任取一点S'，同理可证$S'P=S'P'$. 在$\triangle S'P'Q$中，$S'Q+S'P'>QP'$，　$\because$　$S'P'=S'P$，$SP'=SP$，$QP'=QS+SP'$，　$\therefore$　$S'P+S'Q>SP+SQ$，即$SP+SQ$为最小.

从上面的例 1 和例 2 可以看出，例 1 是一个平面几何问题，例 2 是一个立体几何问题，两个例题在解题的思想方法上都完全类似，所不同的是将例 1 中的直线MN换成例 2 的平面M了。

为进一步认识在解题思想方法上的类似，再看下面例题.

例 3　自平面外一点向这平面引一垂线和若干条斜线：

(1) 垂线比任何一条斜线都短；

(2) 射影相等的斜线长度相等，射影较长的斜线也较长；相等斜线的射影长度相等，斜线较长

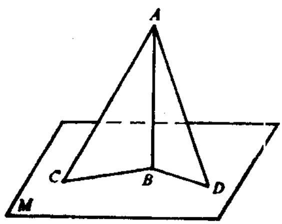


图1-8

的射影也较长.

证明：(1)如图1-8，设A为平面M外的一点，$AB\perp$平面M，AC、AD为任意两条斜线，B为垂足，C、D为斜足，那么BC和BD分别是AC和AD在平面M内的射影.

$\because$ $AB\perp$平面M，

$\therefore$ $AB\perp BC$，$AB\perp BD$.

$\therefore$ AC及AD分别是直角三角形ABC和ABD的斜边.

$\therefore$ $AB<AC$，$AB<AD$.

$\therefore$ AB是过点A向平面M所引线中最短的一条.

(2) 由勾股定理可知：

$$AC^2=AB^2+BC^2,\qquad AD^2=AB^2+BD^2.$$

比较上面两个等式，

如果$BC=BD$，则有$AC=AD$，

如果$BC>BD$，则有$AC>AD$，

如果$AC=AD$，则有$BC=BD$，

如果$AC>AD$，则有$BC>BD$.

从此例可以看出，若将平面M换成直线l，就成为平面几何中的问题了，而且在证题的思想方法上是完全类似的.

我们研究问题时，经常采用由特殊到一般的方法，平面图形是空间图形的一部分，也可把平面图形视作空间图形的特殊情况，由上面例1可看成是例2的特殊情况，而当平面蜕化为直线时，就是例1，而当例1中的直线扩展到平面时，就可变为例2，这就体现了立体几何和平面几何之间的内在联系.

但是，空间图形和平面图形仍有本质的区别，在平面图形成立的一些性质决不能不加证明就搬到立体几何中来使用.

如：在平面几何中，过直线外一点，作这直线的平行线有且只有一条；在立体几何中，过平面外一点，作这平面的平行线有无穷多条．在平面几何中，三个角是直角的四边形就是矩形，而在立体几何中，三个角是直角的空间四边形就不一定是矩形．

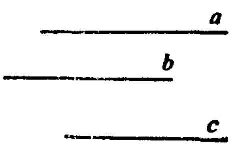
为使学生树立空间概念，把平面几何中的主重性质和立体几何中的主要性质加以对比，搞清楚联系，分清异同，对于深入的掌握空间图形的性质是有好处的．

对比如下：

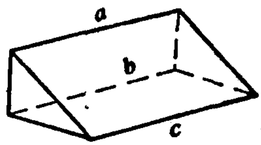
1． 在平面几何和立体几何中都成立的一些性质：

（1） 平行于同一直线的两直线互相平行；

即若$a \parallel c$，$b \parallel c \Rightarrow a \parallel b$。(图1-9)



(甲)



(乙)

图1-9

（2） 如果一个角的两边和另一个角两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等．

即在$\angle AOB$和$\angle A'O'B'$中，$OA \parallel O'A'$，$OB \parallel O'B'$，并且方向相同$\Rightarrow \angle AOB = \angle A'O'B'$．(图1-10)

2． 如果把平面图形中的点、直线拓广到空间图形里的直线、平面就会得到一些类似的命题．

（1） 基本图形的对照

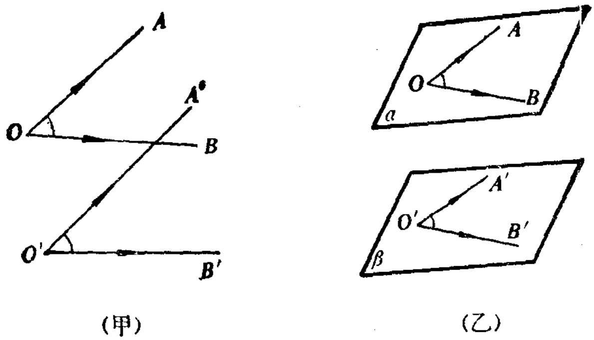


图1-10

①把直线与平面对照

平面图形	直线	射线	相交线	垂线	平行线
空间图形	平面	半平面	相交平面	垂直平面	平行平面

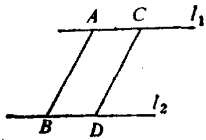
②把角与二面角对照

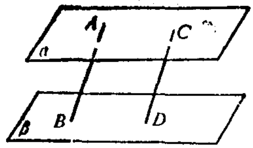
平面图形	角	角顶	边(射线)	直角	角的相等
空间图形	二面角	二面角的棱	面(半平面)	直二面角	二面角的相等

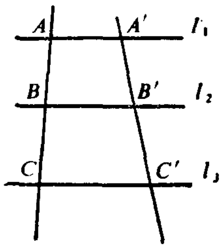
③把三面角、多面角与三角形、多边形对照

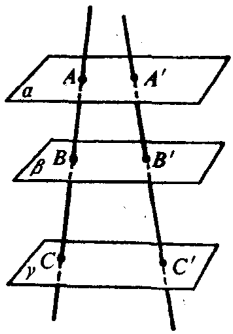
平面图形	三角形	三角形的边	三角形的内角	三角形的顶点
空间图形	三面角	三面角的面	三面角的二面角	三面角的棱
平面图形	凸多边形	三角形全等	两边之和大于第三边	任一边大于其它两边之差
空间图形	凸多面角	三面角全等	两个面角之和大于第三个面角	任一面角大于其它两个面角之差

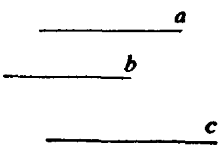
（2） 类似的性质的对比

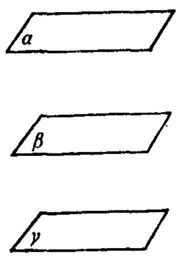
<table>
<tr><th>平面图形的性质</th><th>空间图形的性质</th></tr>
<tr><td>


若$l_1//l_2$，$AB//CD$
$\Rightarrow AB=CD$
</td><td>


若$\alpha//\beta$，$AB//CD$
$\Rightarrow AB=CD$
</td></tr>
<tr><td>


若$l_1//l_2//l_3\Rightarrow$
$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$
</td><td>


若$\alpha//\beta//\gamma\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$
</td></tr>
<tr><td>


若$a//c$，$b//c\Rightarrow a//b$
</td><td>


若$\alpha//\gamma$，$\beta//\gamma\Rightarrow\alpha//\beta$
</td></tr>
</table>