GAODENGDAISHU

高等代数

原永久 郭元春 牛凤文

吉林大学
出版社

高等代数

原永久　郭元春　牛凤文

吉林大学出版社

高 等 代 数

原永久　郭元春　牛凤文

责任编辑、责任校对：赵洪波　　封面设计：孙群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市东中华路37号）　吉林省劳动彩印厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　1998年9月第1版
印张：9　　1998年9月第1次印刷
字数：222千字　　印数：1—500册

ISBN 7-5601-2167-5/O·235　　定价：11.00元

前　言

本教材是在谢邦杰、牛凤文、董乃昌合编的《线性代数》(吉林大学出版社，1988 年版)的基础上改编而成的. 取材时充分考虑后继课程的需要和随时注意向学生渗透近代数学的思想是整个编写过程中所遵循的两条原则.

由于一元多项式几乎在数学系的所有课程中都有着不同程度的应用，而中学所学的知识远远满足不了这种需要，故本教材对一元多项式的论述有所加强.

非数学专业一般已不再设置近世代数课. 为了弥补这一缺憾，本教材增设了“群论”一章.

利用矩阵的分块乘法会巧妙、简洁地处理某些问题，本教材十分注重应用这一方法. 由于列满秩矩阵与行满秩矩阵有单边逆，在某些问题中可以代替可逆矩阵，故本教材较详细地讨论了这两种矩阵的性质.

概念的高度抽象性而导致应用上的极其广泛性是现代数学的显著特点，让学生理解这种特点无疑是数学每一学科的任务之一. 本教材无论是在概念的引入，材料的处理及习题的配置上都注意了这一点，例如对“欧氏空间”和“U 空间”这两个问题的处理上就改变了过去那种分别论述的做法，而把二者置于一个统一的概念之下进行讨论. 在讨论正交变换和对称变换之前引入共轭变换，在共轭变换之前引入对偶映射，以及在引入正交矩阵和对称矩阵之前提出规范矩阵等，也是这方面的例子.

众所周知，矩阵的各种标准形都有着深刻的几何背景，而背景往往是理论产生和发展的源头，在处理矩阵的 Jordan 标准形和实对称矩阵的标准形时，我们尤其注重了这种背景. 突

出了线性变换和对称的双线性函数. 我们之所以这样做，旨在对学生接受近代数学的思想有所补益. 设置“对偶空间”一节提出对偶映射的概念也是出于这样一种考虑.

由于本教材强化了对“映射”及“线性变换”的论述，加上数学分析课程中对 ε-δ 方法的严格训练，就为后继课的学习打下了坚实的基础，教学实践已证明学生在接受诸如“n 维流形”、“L_2-空间”及“线性泛函”等概念时，一般都能感到顺理成章，而较为轻松自然. 特别是在学习模论时，更能很快地触摸到问题的本质. 而就思想方法和思维方式而言，也为研究生阶段的学习做了一些必要的准备.

全书共分九章，前四章由原永久执笔，第五、六、七章由郭元春执笔，后两章由牛凤文执笔，最后由原永久统稿.

虽然做到了尽可能的努力，但不到之处仍在所难免. 编者诚恳希望使用本教材的广大师生和关心本教材的同事们随时予以指正.

原永久

1998 年 7 月 1 日于长春

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　一元多项式……（1）
§1　数域 ……（1）
§2　带余除法定则与整除性 ……（4）
§3　因式分解 ……（12）
§4　多项式函数 ……（16）
§5　有理数域上的多项式 ……（20）
第二章　行列式……（25）
§1　置换 ……（25）
§2　n 阶行列式的定义和基本性质 ……（34）
§3　Laplace 定理 ……（45）
§4　行列式计算举例 ……（52）
§5　解线性方程组的 Cramer 规则 ……（63）
第三章　矩阵……（69）
§1　矩阵及其运算 ……（69）
§2　矩阵的分块乘法和初等变换 ……（81）
§3　正方矩阵的行列式 ……（98）
第四章　矩阵的秩数……（107）
§1　n 元数列的线性关系 ……（107）
§2　矩阵的秩数 ……（113）
§3　线性方程组 ……（124）
第五章　向量空间和线性映射……（139）
§1　向量空间 ……（139）
§2　基底，维数和子空间 ……（151）
§3　有限维向量空间的线性变换 ……（167）

§4 对偶空间 …… (172)
第六章 内积空间 …… (178)
§1 欧氏空间与 U 空间 …… (178)
§2 共轭映射 …… (192)
第七章 方阵的标准形式 …… (197)
§1 特征值与特征向量 …… (197)
§2 矩阵及其最小多项式 …… (210)
§3 特征矩阵与 Jordan 标准形式 …… (220)
第八章 二次型 …… (235)
§1 双线性函数与二次型 …… (235)
§2 化二次型为标准型的方法 …… (243)
§3 正定矩阵与恒定型 …… (253)
第九章 群论初步 …… (261)
§1 变换群与置换群 …… (261)
§2 抽象群 …… (268)
§3 商群 …… (272)
§4 群的同态与同构 …… (276)

第一章　一元多项式

多项式是代数学最基本的研究对象之一，在后继课的学习中会时常遇到. 本章介绍一元多项式的一些基本理论，这些理论可认为是中学所学知识的加深与系统化.

§1　数　　域

在研究问题时，常常需要明确规定所考虑的数的范围. 这样做的好处在于我们可以不必考虑那些与该问题无关的数，并且同样可保证我们的各种讨论得以施行. 由于本课程所涉及的数的运算一般仅是加、减、乘、除四则运算，为此，我们要先介绍数域这一概念.

定义 1　设 P 是一些数所组成的一个集合，而且 P 不只含一个数，如果对于 P 中任意二数 a，b(可以取 $a=b$)恒有 $a\pm b\in P$，$a\cdot b\in P$ 而且当 $b\neq 0$ 时还有 $\frac{a}{b}\in P$，则 P 就叫做一个**数域**. 换句话说，如果数集 P 不只含一个数且对于加法、减法、乘法、除法(0 不能做除数)四个运算封闭，则 P 就是一个数域.

例如，所有的有理数所做成的集合就是一个数域，叫做有理数域；所有实数的集合和所有复数的集合也都是数域，分别叫做实数域和复数域.

例 1　所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{2}$ (α，β 是有理数)的实数所组成的集合 P 是一个数域.

易知 P 不只含一个数，在这个集合 P 中任取二数

$$a=\alpha_1+\beta_1\sqrt{2},\qquad b=\alpha_2+\beta_2\sqrt{2},$$

则有

$$a+b=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)\sqrt{2},$$
$$a-b=(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)\sqrt{2},$$
$$ab=(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)\sqrt{2}.$$

按假设，α_1，α_2，β_1，β_2 均为有理数，故$(\alpha_1+\alpha_2)$、$(\beta_1+\beta_2)$、$(\alpha_1-\alpha_2)$、$(\beta_1-\beta_2)$、$(\alpha_1\alpha_2+2\beta_1\beta_2)$、$(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$均为有理数，所以就有

$$a+b\in P,\qquad a-b\in P,\qquad ab\in P.$$

最后还要说明当 $b\neq 0$ 时，还有$\frac{a}{b}\in P$. 当 $b\neq 0$ 时，α_2，β_2 至少有一个不等于 0，由于 $\sqrt{2}$ 是无理数，故 $\alpha_2\pm\beta_2\sqrt{2}\neq 0$，从而有

$$\alpha_2^2-2\beta_2^2=(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})\neq 0,$$

于是便有

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{\alpha_1+\beta_1\sqrt{2}}{\alpha_2+\beta_2\sqrt{2}}\\&=\frac{(\alpha_1+\beta_1\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}{(\alpha_2+\beta_2\sqrt{2})(\alpha_2-\beta_2\sqrt{2})}\\&=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

因 α_1、α_2、β_1、β_2 均为有理数，且 $\alpha_2^2-2\beta_2^2\neq 0$，故若令

$$\alpha_3=\frac{\alpha_1\alpha_2-2\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2},\qquad \beta_3=\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2-2\beta_2^2},$$

则 α_3，β_3 均为有理数，且$\frac{a}{b}=\alpha_3+\beta_3\sqrt{2}$，所以还有$\frac{a}{b}\in P$. 这就验证了 P 是一个数域.

例 2 所有偶数的集合不是数域.

因为 2 是偶数，但是$\frac{2}{2}=1$，而 1 不是偶数，因此集合对除法运算不封闭，故不是数域.

命题 任意一个数域 P 必含 0 与 1.

证明 在 P 中任取一个数 a，由数域的定义知 $a-a\in P$，即 $0\in P$. 进一步，由于 P 中不只含一个数，故 P 不可能只含 0，因而在 P 中必存在一个数 $b\neq 0$，于是由数域的定义有 $\frac{b}{b}\in P$，即 $1\in P$. 证毕.

加、减、乘、除这四个运算通常称为有理运算. 根据数域的定义，我们知道数域中的数经过有理运算后所得出的数仍然在这个数域中，而在本课程中讨论问题时，所涉及到数的运算也常常只有有理运算，故可认为我们的讨论总是在取定的某一数域中进行.

习　题

1. 所有形如 $\alpha+\beta\sqrt{5}$（α，β 为有理数）的实数的集合是否是一个数域？

2. 所有形如 $\alpha+\beta\mathrm{i}$（α，β 为有理数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$）的复数的集合是否是一个数域？当 α，β 只为整数时，又如何？

3. 证明任意数域必包含所有的有理数.（由此可知有理数域是一个最小的数域）

4. 验证所有形如

$$\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m},\qquad b_m\neq 0$$

的数组成一个数域，其中 m，n 是任意非负整数，a_i，b_j（$i=0,1,\cdots,n$；$j=0,1,\cdots,m$）是整数.

5. 问：数域的每个子集是否一定是数域？一个数集的每个

真子集都不是数域，此集合是否一定不是数域？试举例说明之.

6. 两数域 P_1，P_2 交集 $P_1 \cap P_2$ 是不是数域？

§2 带余除法定则与整除性

如上节所说的，在对多项式的讨论中，我们总是假定其系数均取自一个预先给定的数域 Ω. 我们这里讨论的是一元多项式，即只有一个符号 x 的多项式.

定义 1 形式表达式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \tag{1}$$

称为数域 Ω 上的**一元多项式**，其中 $a_i(i=0,1,2,\cdots)$ 为属于数域 Ω 中的数，且仅有有限个数非 0.

在多项式(1)中 a_ix^i 称为 **i 次项**. a_i 称为 **i 次项系数**. 系数全为 0 的多项式称为**零多项式**，我们也用 0 来表示. 对于非零的多项式，必存在 n，使得 $a_n \neq 0$，而当 $k>n$ 时恒有 $a_k=0$，这时可将其表示为

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

而称 a_nx^n 为其**首项**，a_n 为**首项系数**，n 称为其**次数**.

不难看到，零次多项式即为非 0 常数做成的多项式. 且显然我们没有为零多项式规定次数，故凡涉及多项式的次数时，零多项式总是不在考虑之列.

以后，我们常用 $f(x)$，$g(x)$，…或 f，g，…等来表示多项式. 用 $\deg f(x)$ 表示 $f(x)$ 的次数.

定义 2 如果在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，同次项的系数全相等，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 就称为**相等**，记为 $f(x)=g(x)$.

我们把数域 Ω 上的所有一元多项式构成的集合记为 $\Omega[x]$. 设 $f(x)$，$g(x) \in \Omega[x]$，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$f(x) = a_0 + a_1x + ax^2 + \cdots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots,$$

则易见

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$$
$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots$$
$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$$
$$c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_ib_0 = \sum_{j+k=i} a_jb_k$$

亦均为 $\Omega[x]$中的多项式.

定义 3 上面的三个多项式分别称为多项式 $f(x)$与 $g(x)$的**和**，**差**与**积**，且依次记为 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，与 $f(x)g(x)$.

多项式的这三个运算满足下面一些规律：

1. **加法交换律**：
$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x),$$
2. **加法结合律**：
$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+((g(x)+h(x)),$$
3. **乘法交换律**：
$$f(x)g(x) = g(x)f(x),$$
4. **乘法结合律**：
$$(f(x)g(x))h(x) = f(x)(g(x)h(x)),$$
5. **乘法对加法的分配律**：
$$f(x)(g(x) + h(x)) = f(x)g(x) + f(x)h(x),$$

上面的 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$都是 $\Omega[x]$中的多项式.

这些规律由定义 3 都能很容易地推导出来，下面只给出乘法结合律的证明，其余各条的证明留给读者作练习.

$f(x)$，$g(x)$，仍如前所设，再设 $h(x)\in\Omega[x]$，
$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots.$$

显然，$f(x)g(x)$的s次项的系数为$\sum_{i+j=s} a_i b_j$，从而$(f(x)g(x))h(x)$的t次项系数为

$$\sum_{s+k=t}\Big(\sum_{i+j=s} a_i b_j\Big)c_k = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k.$$

类似地，由于$g(x)h(x)$的r次项系数为$\sum_{j+k=r} b_j c_k$，可知$f(x)(g(x)h(x))$的t次项系数为

$$\sum_{i+r=t} a_i\Big(\sum_{j+k=r} b_j c_k\Big) = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k.$$

上面的t可以是任何非负整数. 这表明$(f(x)g(x))h(x)$与$f(x)(g(x)h(x))$的同次项系数全相等，因此，由定义2得

$$f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x).$$

除此之外，多项式的乘法还满足下面常用的

6. **消去律**：设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in\Omega[x]$，如果$f(x)g(x)=f(x)h(x)$且$f(x)\neq 0$，那么$g(x)=h(x)$.

因为由$f(x)g(x)=f(x)h(x)$可得

$$f(x)(g(x)-h(x)) = 0.$$

断言必有$g(x)-h(x)=0$. 因若不然，由$g(x)-h(x)$及$f(x)$非0，可设二者首项分别为$a_m x^m$及$b_n x^n$. 从而知上式左边的首项为$a_m b_n x^{m+n}$，不可能是0多项式. 这样，由$g(x)-h(x)=0$易得

$$g(x) = h(x).$$

本章的讨论都要在$\Omega[x]$中进行，这里的Ω是一取定的数域. 凡是多项式都指$\Omega[x]$中的多项式而言，对此以后就不每次都重复说明了.

除了加、减、乘三种运算外，还有一个除法运算，与前三种运算不同的是，$\Omega[x]$对它不封闭. 因此，我们可以说$\Omega[x]$有加、减、乘三种运算，但不能说$\Omega[x]$有除法运算. 对于除法，我们有更重要的

定理 1 对任意二多项式 $f(x)$及 $g(x)\neq 0$，恒有唯一的多项式 $q(x)$及 $r(x)$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x), \tag{2}$$

其中或者 $r(x)=0$，或者 $\deg r(x)<\deg g(x)$.

证明 先证存在性. 若 $f(x)=0$ 或 $\deg f(x)<\deg g(x)$，则可取 $q(x)=0$，$r(x)=f(x)$. 下面假定 $\deg f(x)\geqslant\deg g(x)$. 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$

其中 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$，并且 $n\geqslant m$. 令

$$f_1(x)=f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x),$$

则有

$$f(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)+f_1(x),$$

并且 $f_1(x)=0$，或者 $\deg f_1(x)<\deg f(x)$. 如果 $f_1(x)\neq 0$ 并且$\deg f_1(x)\geqslant\deg g(x)$. 则可用类似的方法把 $f_1(x)$表成上式右边的形式. 这样一直进行下去，即可知存在满足定理要求的 $q(x)$及 $r(x)$使(2)式成立.

再证唯一性. 假若还有 $q_1(x)$及 $r_1(x)$使

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$

而且 $r_1(x)$或者为 0 或者 $\deg r_1(x)<\deg g(x)$，则与(2)式相减并移项便得

$$(q_1(x)-q(x))g(x)=r(x)-r_1(x).$$

由于 $g(x)\neq 0$，而右边或为 0，或其次数小于 $g(x)$的次数，故必有 $q_1(x)-q(x)=0$. 从而 $r(x)-r_1(x)=0$，即得 $q_1(x)=q(x)$，$r_1(x)=r(x)$. 证毕.

定理 1 中的 $f(x)$叫做**被除式**，$g(x)$叫做**除式**，$q(x)$与

$r(x)$分别叫做 $f(x)$被 $g(x)$除所得的**商式**和**余式**.

定义 3 当表达式(2)中的余式 $r(x)=0$ 时，则称 $g(x)$**整除** $f(x)$，记为 $g(x)|f(x)$. 称 $g(x)$为 $f(x)$的一个**因式**，称 $f(x)$为 $g(x)$的一个**倍式**.

由定义可看出，任意多项式一定能整除它自身及零多项式；零次多项式，也就是非 0 常数能整除任意多项式. 除此之外，关于整除性，下面的几条性质也是常用的，这些性质的严格证明，我们把它留给读者.

1. 若 $f|g$，$g|h$，则 $f|h$.

2. 若 $h|f$，$h|g$，则 $h|(f\pm g)$.

3. 若 $h|f$，则 $h|fg$.

4. 若 $h|f_i(i=1,2,\cdots,t)$，则 $h|(f_1g_1\pm\cdots\pm f_tg_t)$.

5. $cf|f$，$0\neq c\in\Omega$.

6. $f|g$，$g|f$ 的充分必要条件是 $f=cg$，其中 c 为 Ω 中某非零常数.

从以上的性质可看出，多项式 $f(x)$与它的任意非零常数倍 $cf(x)$有相同的因式和相同的倍式.

定义 4 设 $f(x)$，$g(x)$不全为 0，如果 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个公因式，而 $f(x)$与 $g(x)$的任何公因式均为 $d(x)$的因式，则说 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个**最高公因式**.

如上所说，若 $d(x)$是 $f(x)$和 $g(x)$的一个最高公因式，则对任意的非零常数 $c\in\Omega$，$cd(x)$也是 $f(x)$与 $g(x)$的最高公因式，且由性质 6 知 $f(x)$与 $g(x)$的任何最高公因式必有这样的形式.

定理 2(最高公因式存在定理) 如果 f，g 不全为 0，则它们必有一个最高公因式 d，且有多项式 φ，ψ 使得

$$d=\varphi f+\psi g.$$

证明 当 f，g 之一为 0，例如 $g=0$ 时，则 f 便是 f，g 的

一个最高公因式，且取 $\varphi=1$ 而 ψ 为任意多项式即可.

当 $f\neq 0$，$g\neq 0$ 时，可由辗转相除得

$$\begin{aligned} f &= q_1 g + r_1, & \deg r_1 < \deg g,\\ g &= q_2 r_1 + r_2, & \deg r_2 < \deg r_1,\\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & \deg r_3 < \deg r_2. \end{aligned}$$

这样继续下去，由于次数逐渐下降，故必到某步为止，可设为

$$\begin{aligned} r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, & \deg r_n < \deg r_{n-1},\\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n. \end{aligned}$$

现在来证明 r_n 便是 f 与 g 的一个最高公因式. 首先，由 $r_n \mid r_{n-1}$ 再看上面第 n 式，便知 $r_n \mid r_{n-2}$，如此从后往前继续看上去，看到第 2 式时，已有 $r_n \mid r_2$，$r_n \mid r_1$，故 $r_n \mid g$. 再看第 1 式，又知 $r_n \mid f$，故 r_n 是 f 与 g 的一个公因式. 其次，设 h 是 f 与 g 的任意一个公因式. 这回从前往后一步一步地看，类似于上面推导，从 $h \mid f$，$h \mid g$，得 $h \mid r_1$，再得 $h \mid r_2$，…，最后得 $h \mid r_n$. 故 r_n 是 f 与 g 的一个最高公因式. 现在从前面的第 1 式得

$$r_1 = f + (-q_1)g.$$

把此式代入第 2 式又得

$$r_2 = (-q_1)f + (1 + q_1 q_2)g.$$

如此继续下去，代到第 n 式便得

$$r_n = \varphi f + \psi g.$$

证毕.

以下我们用 (f, g) 表示 f，g 的首项系数为 1 的最高公因式.

定义 5 当 $(f, g)=1$ 时，称 f，g **互质**.

定理 3 多项式 f，g 互质的充要条件是有多项式 φ，ψ 使

$$\varphi f + \psi g = 1.$$

证明 必要性. 当 f，g 互质时，即它们的首项系数为 1 的最高公因式为 1 时，由定理 2 知有多项式 φ，ψ 使得

$$\varphi f + \psi g = 1$$

成立.

充分性. 若有多项式 φ, ψ 使得

$$\varphi f + \psi g = 1,$$

设$(f, g)=d$, 则 $d|f$, $d|g$, 由性质 4 知 $d|1$, 故 d 为常数多项式, 又因其首项系数为 1. 从而必有 $d=1$. 证毕.

系 1 若 $f|gh$, 且 f, g 互质, 则 $f|h$.

证明 由 f, g 互质知有 φ, ψ 使

$$\varphi f + \psi g = 1,$$

两端乘 h 得

$$\varphi fh + \psi gh = h,$$

再由 $f|\varphi fh$, $f|\psi gh$ 即知 $f|h$. 证毕.

系 2 若 $f_1|g$, $f_2|g$ 且 f_1, f_2 互质, 则 $f_1 f_2|g$.

证明 由 $f_1|g$ 与 $f_2|g$ 知有 h_1, h_2 使

$$g = h_1 f_1 = h_2 f_2.$$

由 f_1, f_2 互质知有 φ, ψ 使

$$\varphi f_1 + \psi f_2 = 1.$$

上式第一项乘以 $h_2 f_2$, 第二项乘以 $h_1 f_1$, 右边乘以 g 得

$$\varphi h_2 f_1 f_2 + \psi h_1 f_1 f_2 = g,$$

由此即知 $f_1 f_2|g$. 证毕.

以上关于公因式, 最高公因式, 互质等概念都是对两个多项式来说的. 同样可以定义若干个不全为 0 的多项式 f_1, f_2, …, f_n 的最高公因式. 而且容易验证, 若 d_{n-1} 为 f_1, f_2, …, f_{n-1} 的一个最高公因式, 则 d_{n-1} 与 f_n 的一个最高公因式就是 f_1, f_2, …, f_n 的一个最高公因式.

用数学归纳法容易证明: 如果 d 是 f_1, …, f_n 的一个最高公因式, 则必有 φ_1, …, φ_n 使得

$$d = \varphi_1 f_1 + \cdots + \varphi_n f_n.$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com