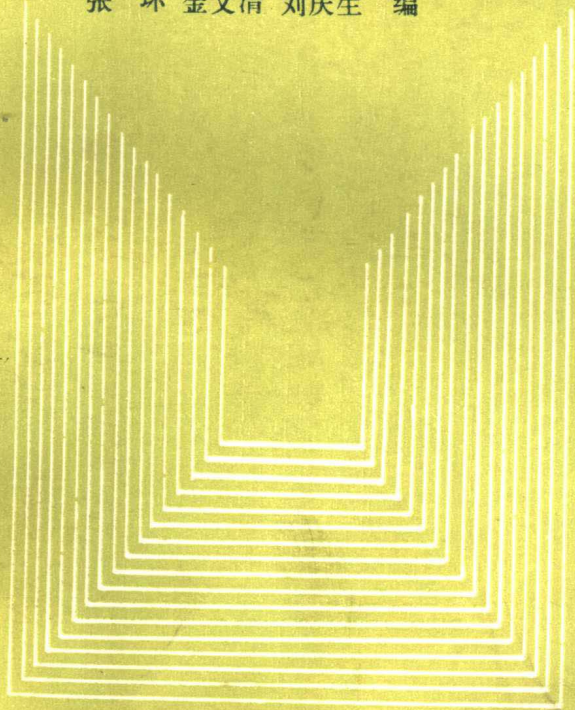


高中理科学习解疑丛书

# 数学学习解疑

张 环 金文清 刘庆生 编



学术期刊出版社

高中理科学学习解疑丛书

# 数 学 学 习 解 疑

张 环 金文清 刘庆生 编

学术期刊出版社

数学学习解疑

张 环 金文清 刘庆生 编

学术期刊出版社出版

(北京海淀区学院南路 86 号)

新华书店北京发行所发行

中国财政经济出版社照排中心排版 北京密云胶印厂印刷

787×1092 毫米 32 开本 7.1 印张

1988 年 3 月第 1 版 1988 年 3 月第 1 次印刷

印数: 1-50500

ISBN 7-80045-014-7/G·1

---

定 价: 1.50 元

## 编者的话

数学是中学的一门主要课程。教好和学好数学是教师和学生的一项重要任务，为了帮助大家更好地完成这项任务，我们编了《数学学习解疑》一书。

本书立足于现行的高中数学教学大纲，以基本概念、基础知识和基本方法为主，同时在某些问题上作了适当的引申和提高。本书所用的材料，一些是我们平时积累的资料，一些是取自《数学通报》上的有关文章。取材丰富，阐述翔实。

本书的内容包括现行高中数学教材的代数、三角、立体几何和解析几何等四大部分，按 113 个问题分别进行阐述，同时还有一定数量的典型例题解答。

本书以释疑解难和富有启发性为其特点，而区别于以往的习题集或复习资料。我们希望本书能成为青年教师和学生在学习数学中的有力助手。

本书经吕学礼、方明一、傅若男、王敬庚审阅和修改，在此表示感谢。

由于编者水平有限，经验不足，书中难免有不妥甚至错误之处，希望广大读者提出批评和建议。

1987 年 10 月

# 目 录

## 第一部分 代 数

1. 怎样理解“映射”概念? ..... ( 1 )
2. 映射与函数的关系是什么? ..... ( 3 )
3. 从集合  $A$  到集合  $B$  的“一一映射”与从集合  
     $B$  到集合  $A$  的“一一映射”是一样的吗? ..... ( 3 )
4. 一函数与其反函数有哪些方面的联系? ..... ( 4 )
5. 怎样求一个函数的反函数? ..... ( 5 )
6. 求函数的定义域应从何处入手? ..... ( 7 )
7. 利用“配方法”求函数的值域应注意什么问  
    题? ..... ( 8 )
8. 怎样求形如  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ( $c \neq 0, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ )  
    的函数的值域? ..... ( 11 )
9. 利用一元二次方程根的判别式, 如何求函  
    数的值域? ..... ( 12 )
10. 能用一元二次方程根的判别式求函数  
     $y = x + \sqrt{x-1}$  的值域吗? ..... ( 14 )
11. 一函数既是奇函数又是偶函数有什么特点? ... ( 15 )

12. 研究函数的单调性要抓住什么问题? ..... ( 16 )
13. 在中学数学中, 如何画函数的草图? ..... ( 17 )
14. 实数域和复数域之间有哪些相同和不同? ..... ( 22 )
15. 平方和为零的两个复数有什么特点? ..... ( 24 )
16. 复数的模与实数的绝对值有什么区别与联系? ..... ( 25 )
17. 一个复数的  $n$  次方根有什么特点? ..... ( 26 )
18. 复数的模与共轭复数的关系是什么? ..... ( 28 )
19. 怎样判别复系数一元二次方程的根? ..... ( 30 )
20. 怎样用式子  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , 求模  $|z_1 + z_2|$  的最大值或最小值? ..... ( 32 )
21. 怎样用复数表示平面图形? ..... ( 36 )
22. 学习充分条件、必要条件、充分必要条件应注意什么问题? ..... ( 37 )
23. 两个未知数或三个未知数都为正数的条件是什么? ..... ( 38 )
24. 怎样借助于连续函数零点法解无理不等式? ... ( 39 )
25. 利用函数图象解不等式的思路是什么? ..... ( 41 )
26. 怎样解不等式  $b < |f(x)| < a$  ( $0 < b < a$ )? ..... ( 43 )
27. 怎样解不等式  $|f(x)| < |\varphi(x)|$ ? ..... ( 45 )
28. 若  $a < b < c < d$ , 或  $|x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$  的最小值是什么? ..... ( 46 )
29. 怎样理解符号“ $<$ ”或“ $>$ ”? ..... ( 49 )
30. 利用不等式求极值时, “ $>$ ”或“ $<$ ”的

- 作用是什么?..... ( 49 )
31. 一个数列给出前  $n$  项, 若这个数列有通项  
公式, 为什么数列的通项不唯一?..... ( 53 )
32. 已知数列的前  $n$  项和, 怎样求数列的通项  
公式?..... ( 55 )
33. 怎样求等差数列前  $n$  项和的最大值或  
最小值?..... ( 56 )
34. 等差数列的通项公式  $a_n = a_1 + (n+1)d$   
是关于  $n$  的一次函数吗?..... ( 58 )
35. 公比为正的等比数列一定是递增数列吗?..... ( 59 )
36. 公比  $|q| < 1$  的无穷等比数列都是递减的吗? ... ( 59 )
37. 怎样求等比数列的前  $n$  项和?..... ( 60 )
38. 在有穷等差数列或等比数列中, 怎样利  
用已知条件设“元”?..... ( 61 )
39. 等差数列、等比数列的两个基本联系  
是什么?..... ( 63 )
40. 怎样正确理解用“ $\varepsilon-N$ ”语言叙述的数  
列极限的定义?..... ( 64 )
41. 在什么条件下可以使用数列极限的四则运  
算法则?..... ( 65 )
42. 数列的极限与函数的极限有什么不同?..... ( 68 )
43. 在“排列与组合中”, 正确使用乘法原理  
和加法原理的关键是什么?..... ( 68 )
44. 如何用分类的方法, 把给出的阿拉伯数字  
排列成具有某种特点的自然数组合?..... ( 69 )
45. 在“排列”中, 元素相间排列与元素不相  
邻排列有什么不同?..... ( 72 )

46. 在“组合”中，不同集合的元素能混合取出进行组合吗？…………… ( 74 )
47. 怎样分析“排列与组合”中的“分书”问题？…… ( 75 )
48. 怎样分析“排列与组合”中的“分堆”问题？…… ( 78 )
49. 证明组合恒等式有哪些主要途径？…………… ( 81 )
50. 数学归纳法的理论基础是什么？…………… ( 86 )
51. 怎样正确使用数学归纳法？…………… ( 88 )
52. 用数学归纳法证明与自然数有关的不严格不等式时，归纳假设的基础是什么？…………… ( 92 )

## 第二部分 三 角

53. 怎样确定半角所在的象限？…………… ( 95 )
54. 用“五点法”画函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0$ ,  $\omega > 0$ ) 的图象时，五个点应该怎样选取？… ( 97 )
55. 正切函数  $y = \operatorname{tg} x$  在其定义域上是递增的吗？…………… ( 98 )
56. 学习函数的周期性应注意什么问题？…………… ( 99 )
57. 怎样确定函数  $y = \frac{a\sin x + b}{c\sin x + d}$  ( $c \neq 0$ ,  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ) 的值域？…………… ( 101 )
58. 函数  $y = a\sin^2 x + b\sin x + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象是抛物线吗？…………… ( 102 )
59. 三角函数值相等的角之间有什么关系？…………… ( 105 )
60. 三角方程的增根与代数方程的增根有什么不同？…………… ( 107 )



|                                                                    |       |
|--------------------------------------------------------------------|-------|
| 61. 三角方程的失根与代数方程的失根有什么区别? .....                                    | (108) |
| 62. 怎样判定某些含有参数的三角方程是否有解? .....                                     | (110) |
| 63. 反三角函数的主值区间是怎样确定的? .....                                        | (113) |
| 64. 正弦函数 $y = \sin x$ 在每一单调区间的反函数是什么? .....                        | (114) |
| 65. 函数 $y = \arcsin x$ , $y = \arctg x$ , $y = x$ 的图象有几个公共点? ..... | (116) |
| 66. 辅助角公式的作用是什么? .....                                             | (117) |
| 67. 正切函数、余切函数的和差化积有什么特点? .....                                     | (119) |
| 68. 在三角变换中, 如何使用“1”? .....                                         | (120) |
| 69. 怎样使用两角和的正切公式? .....                                            | (124) |
| 70. 在三角形中, 内角的正切与余切的关系式是什么? 怎样使用? .....                            | (125) |
| 71. 三角形中, 正弦定理, 余弦定理, 射影定理的等价性怎样体现? .....                          | (129) |

### 第三部分 立体几何

|                                 |       |
|---------------------------------|-------|
| 72. 三个平面两两相交, 其交线的位置关系如何? ..... | (132) |
| 73. 求异面直线间距离的一般方法是什么? .....     | (133) |
| 74. 怎样用射影法求异面直线间的距离? .....      | (136) |
| 75. 如何用求极值的方法求异面直线间的距离? .....   | (138) |
| 76. 怎样求平面外的点到平面的距离? .....       | (140) |

77. 怎样求二面角的平面角? ..... (143)
78. 二面角的平面角所在的平面有什么特点? ..... (150)
79. 怎样应用最小角定理? ..... (152)
80. 怎样用补形法解立体几何问题? ..... (154)
81. 怎样画平面图形绕轴旋转所得的立体图形? ... (157)
82. 圆锥轴截面是过顶点的最大截面吗? ..... (160)
83. 怎样分析立体几何中图形的组合问题? ..... (162)

#### 第四部分 解析几何

84. 怎样选择坐标系? ..... (166)
85. 怎样用解析法证题? ..... (168)
86. 在解析几何中, 怎样解平面图形的对称  
问题? ..... (169)
87. 平面内到两个定点的距离的和等于常数的  
点的轨迹一定是椭圆吗? ..... (173)
88. 怎样解决圆锥曲线的弦的中点的有  
关问题? ..... (175)
89. 怎样求切点弦的方程? ..... (181)
90. 研究双曲线的切线应注意什么问题? ..... (182)
91. 为什么双曲线上任一点的切线介于两渐近  
线之间的线段被该切点平分? ..... (185)
92. 如何定义圆锥曲线的直径和共轭直径? ..... (187)
93. 椭圆是由圆压缩而成的吗? ..... (189)
94. 怎样应用韦达定理求直线被二次曲线所截  
的弦长及弦的中点坐标? ..... (192)
95. 用极坐标方程  $\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$  ( $e, p$  为

- 常量) 所表示的圆锥曲线的中心或顶点  
在什么位置? ..... (195)
96. 怎样掌握好直角坐标系的变换? ..... (200)
97. 极坐标的旋转公式是什么? ..... (203)
98. 怎样讨论无  $xy$  项的二元二次方程所代表的  
曲线形状及位置? ..... (204)
99. 由曲线的普通方程化为参数方程时, 怎样  
选取以参数表示的函数关系? ..... (206)
100. 参数方程  $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$   
( $t$  为参数) 所表示的直线上任意两点间距  
离是  $|t_1 - t_2|$  吗? ..... (208)
101. 怎样应用直线的参数方程解题? ..... (210)
102. 怎样证明动曲线过定点? ..... (214)

## 第一部分 代 数

### 1. 怎样理解“映射”概念?

在高中数学课本里,映射的定义是:“给定两个集合  $X$  和  $Y$ ,若按照某种对应法则  $f$ ,对集合  $X$  中任一元素  $x$  在  $Y$  中有唯一的元素  $y$  和它对应,称  $f$  是从  $X$  到  $Y$  的一个映射, $y$  叫做  $x$  在  $f$  作用下的象, $x$  是  $y$  的原象。用记号写出  $f: X \rightarrow Y$ ,  $x \rightarrow y = f(x)$ 。(有的书上用  $\mapsto$  表示元素之间的对应关系)

在理解映射这个概念时,应注意以下几点:

(1) 从映射的定义可知,映射是由此到彼,具有方向性的概念。从  $X$  到  $Y$  的映射  $f$  要求从  $X$  中射出的每一个元素  $x$ ,都要在  $Y$  中有唯一的象  $y$ ,但不是  $Y$  中的每一个元素都要成为  $X$  中每一个元素的象,而且,一个象的原象也不一定是一个。也就是说,一个元素  $y$  可以和一个或几个元素  $x$  相对应。虽然由  $X$  到  $Y$  的映射存在,然而从  $Y$  到  $X$  的映射不一定存在,即使存在,一般来说,它也不同于从  $X$  到  $Y$  的映射。因此,对于任何映射,都必须指明起止集合。

(2) 两种重要的映射:

**定义 1:** 设  $f$  是由集合  $X$  到集合  $Y$  的一个映射,如果  $f$  把集合  $X$  中不同的元素射在集合  $Y$  中有不同的象,那么,映射  $f$  就叫做从集合  $X$  到集合  $Y$  的单射。

**定义 2:** 设  $f$  是从集合  $X$  到集合  $Y$  的一个映射,如果集合

$Y$  中的每一个元素都是集合  $X$  中某个元素的象,那么,映射  $f$  叫做从集合  $X$  到  $Y$  的满射。简言之,满射即射满:  $f(X) = Y$ 。

从集合  $X$  到集合  $Y$  的映射  $f$  有以下几种可能:

① 是单射而不是满射;如图 1;

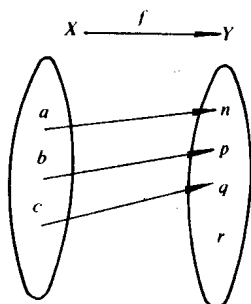


图 1

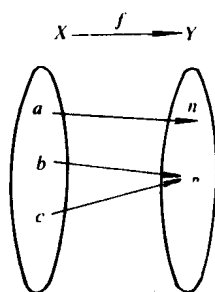


图 2

② 是满射而不是单射;如图 2;

③ 既不是单射也不是满射;如图 3;

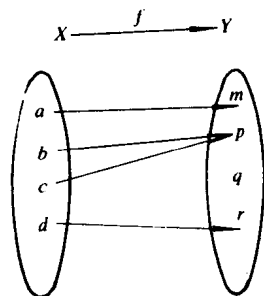


图 3

(3) 若一个映射 $f$ ,既是单射,又是满射,则映射 $f$ 叫做一一映射。

映射,单射,满射,一一映射四个概念之间的关系是:

$$\{ \{ \text{满射} \} \cup \{ \text{单射} \} \} \subset \{ \text{映射} \}$$

$$\{ \{ \text{满射} \} \cap \{ \text{单射} \} \} = \{ \text{一一映射} \}$$

## 2. 映射与函数的关系是什么?

映射是函数的拓扩。函数概念中的定义域和值域都是由数组成的集合,而对应法则也是建立在这两个数集上的。

映射概念中的定义域和值域则不限于是数值。映射又常称为映照,对应,变换,算子等。两个映射 $f_1$ 和 $f_2$ 相等(相同)是指它们的定义域相同,而且对定义域中任何元素 $x$ ,有 $f_1(x) = f_2(x)$ 。

## 3. 从集合 $A$ 到集合 $B$ 的“一一映射”与从集合 $B$ 到集合 $A$ 的“一一映射”是一样的吗?

我们的回答是:不一定。如果一个映射 $f: A \rightarrow B$ 是一一映射,那么,根据一一映射的定义,也一定存在从 $B$ 到 $A$ 的一一映射 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 。但这两个一一映射一般是不同的。举一个简单的例子:从集合 $R$ 到集合 $R$ 的一一映射 $f: x \rightarrow y = 3x$ ,而 $f^{-1}: y \rightarrow x = \frac{y}{3}$ ,显然 $f$ 和 $f^{-1}$ 是不同的。又如,集合 $X = [3, +\infty)$ ,集合 $Y = [0, +\infty)$ , $f: x \rightarrow y = \sqrt{x-3}$ 是从集合 $X$ 到集合 $Y$ 的一一映射,从集合 $Y$ 到集合 $X$ 也存在一一映射 $f^{-1}: y \rightarrow x = y^2 + 3 (y \geq 0)$ ,而 $f$ 与 $f^{-1}$ 是完全不同的。特别地,从集合 $R$ 到集合 $R$ 的一一映射 $f: x \rightarrow y = x$ ,则 $f^{-1}$ 和 $f$ 显然是相同的。

有人把一一映射简单说成：“对于 $A$ 中任一元素， $B$ 中有唯一元素与它对应；对于 $B$ 中任一元素， $A$ 中也有唯一元素与它对应。则这个对应法则叫做一一映射”，这种说法是不对的，其错误就在于把从 $A$ 到 $B$ 的一一映射与从 $B$ 到 $A$ 的一一映射混为一谈，一般说来， $f$ 和 $f^{-1}$ 是两个不同的映射。

还有人把一一映射理解为一对一的映射，这也是不对的，因为一一映射不仅要求一个对一个（一对一），而且要求不同的元素其原象也不同。

#### 4. 一函数与其反函数有哪些方面的联系？

(1) 定义域和值域：一函数的定义域和值域，分别为其反函数的值域和定义域。

(2) 奇偶性：如果一个函数为奇函数，则它的反函数仍为奇函数。偶函数在定义域上不存在反函数。

(3) 单调性：如果一个函数在定义域或在定义域的某个子区间上是单调递增（或递减）的函数，它的反函数在其相应的区间上也是单调递增（或递减）的函数。即函数和它的反函数的单调性是一致的。

(4) 图象：一函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 是对称的。

函数 $y=f(x)$ 的反函数，有时记作 $y=f^{-1}(x)$ ，有时记作 $x=f^{-1}(y)$ 。

由反函数的定义可知： $x=f^{-1}(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，并有如下基本关系： $y=f[f^{-1}(y)]$ ， $x=f^{-1}[f(x)]$ ，对于 $x=f^{-1}(y)$ ， $y$ 是自变量， $x$ 是 $y$ 的函数；而对于 $y=f(x)$ ， $x$ 是自变量， $y$ 是 $x$ 的函数。若在同一坐标系中画图，则图象是重合的。

由于  $y=f(x)$  和  $x=y^{-1}(y)$ , 在同一坐标系中画出的图形是重合的, 研究起来很不方便, 所以就按通常习惯, 用  $x$  表示自变量, 用  $y$  表示函数, 写成  $y=f^{-1}(x)$ 。但有时用  $x=f^{-1}(y)$  进行研究也较方便。

### 5. 怎样求一个函数的反函数?

我们知道, 一个函数具有反函数的充分必要条件是确定该函数的映射是一一映射。由于任意一个函数在其自身的单调区间上都是一一映射, 所以, 在函数的单调区间上就可以求函数的反函数。

中学数学涉及的函数, 主要是基本初等函数, 通常研究两个非空数集间用解析式表达的函数关系。对于这样的函数, 只要把  $y=f(x)$  看成一个关于  $x$  的方程, 解出  $x=f^{-1}(y)$ , 再将字母  $x, y$  互换, 即得到反函数  $y=f^{-1}(x)$ 。

若函数在整个定义域上是单调的, 则函数在其定义域上存在反函数。

**例 1:** 求函数  $y=\lg(4x-1)$  的反函数。

**解:**  $\because$  该对数的底  $a=10 > 1$ ,  $\therefore \lg(4x-1)$  在定义域  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  上是单调递增的, 故在定义域  $(\frac{1}{4}, +\infty)$  上存在反函数。

$$\because y=\lg(4x-1) \quad \therefore 10^y=4x-1$$

$$\therefore x=\frac{1}{4}(10^y+1)$$

将  $x, y$  字母互换, 得  $y=\frac{1}{4}(10^x+1)$

$\therefore$  函数  $y=\lg(4x-1)$  的反函数是  $y=\frac{1}{4}(10^x+1)$ 。



**例 2:** 求函数  $y = 2 \arcsin \frac{1}{x}$  的反函数。

**解:** 函数  $y$  在定义域  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  上是单调递减的。所以函数在定义域上存在反函数。

变形得: 
$$\frac{y}{2} = \arcsin \frac{1}{x}$$

两边取正弦得: 
$$\frac{1}{x} = \sin \frac{y}{2}$$

将  $x, y$  字母互换得: 
$$y = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

$\therefore$  函数  $y = 2 \arcsin \frac{1}{x}$  的反函数为:

$$y = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}, \quad x \in [-\pi, 0) \cup [0, \pi).$$

若函数在定义域上不是单调的,但在定义域的某一子区间上是单调的。则可以在该单调区间上求反函数,这时对所求出的反函数必须注明单调区间。

**例 3:** 求函数  $y = x^2 + 1$  ( $x < 0$ ) 的反函数。

**解:**  $\because$  函数  $y = x^2 + 1$  当  $x < 0$  时是单调递减的,

$\therefore$  在区间  $(-\infty, 0)$  上存在反函数。

将所给函数变形为  $x^2 = y - 1$ ,

$$\because x < 0 \quad \therefore x = -\sqrt{y-1}$$

将  $x, y$  字母互换得:  $y = -\sqrt{x-1}$  ( $x > 1$ )

$\therefore$  函数  $y = x^2 + 1$  ( $x < 0$ ) 的反函数为:

$$y = -\sqrt{x-1} \quad (x > 1)$$