高中理科学习解疑丛书

数学学习解疑

张　环　金文清　刘庆生　编

学术期刊出版社

高中理科学习解疑丛书

数学学习解疑

张　环　金文清　刘庆生　编

学术期刊出版社

数学学习解疑

张　环　金文清　刘庆生　编

学术期刊出版社出版

(北京海淀区学院南路 86 号)

新华书店北京发行所发行

中国财政经济出版社照排中心排版　北京密云胶印厂印刷

787×1092 毫米 32 开本　7.1 印张

1988 年 3 月第 1 版　1988 年 3 月第 1 次印刷

印数：1—50500

ISBN 7-80045-014-7／G·1

定　价:　1.50 元

编者的话

数学是中学的一门主要课程。教好和学好数学是教师和学生的一项重要任务，为了帮助大家更好地完成这项任务，我们编了《数学学习解疑》一书。

本书立足于现行的高中数学教学大纲，以基本概念、基础知识和基本方法为主，同时在某些问题上作了适当的引申和提高。本书所用的材料，一些是我们平时积累的资料，一些是取自《数学通报》上的有关文章。取材丰富，阐述翔实。

本书的内容包括现行高中数学教材的代数、三角、立体几何和解析几何等四大部分，按113个问题分别进行阐述，同时还有一定数量的典型例题解答。

本书以释疑解难和富有启发性为其特点，而区别于以往的习题集或复习资料。我们希望本书能成为青年教师和学生在学习数学中的有力助手。

本书经吕学礼、方明一、傅若男、王敬庚审阅和修改，在此表示感谢。

由于编者水平有限，经验不足，书中难免有不妥甚至错误之处，希望广大读者提出批评和建议。

1987年10月

目　录

第一部分　代　数

第二部分　三　　角

第三部分 立体几何

第四部分　解析几何

第一部分 代 数

1.怎样理解“映射”概念?

在高中数学课本里,映射的定义是:“给定两个集合 X 和 Y,若按照某种对应法则 f,对集合 X 中任一元素 x 在 Y 中有唯一的元素 y 和它对应,称 f 是从 X 到 Y 的一个映射,y 叫做 x 在 f 作用下的象,x 是 y 的原象。用记号写出 $f: X \to Y$, $x \to y=f(x)$。(有的书上用 $\mapsto$ 表示元素之间的对应关系)

在理解映射这个概念时,应注意以下几点:

(1) 从映射的定义可知,映射是由此到彼,具有方向性的概念。从 X 到 Y 的映射 f 要求从 X 中射出的每一个元素 x,都要在 Y 中有唯一的象 y,但不是 Y 中的每一个元素都要成为 X 中每一个元素的象,而且,一个象的原象也不一定是一个。也就是说,一个元素 y 可以和一个或几个元素 x 相对应。虽然由 X 到 Y 的映射存在,然而从 Y 到 X 的映射不一定存在,即使存在,一般来说,它也不同于从 X 到 Y 的映射。因此,对于任何映射,都必须指明起止集合。

(2) 两种重要的映射:

定义 1: 设 f 是由集合 X 到集合 Y 的一个映射,如果 f 把集合 X 中不同的元素射在集合 Y 中有不同的象,那么,映射 f 就叫做从集合 X 到集合 Y 的单射。

定义 2: 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射,如果集合

Y 中的每一个元素都是集合X 中某个元素的象，那么，映射f 叫做从集合X 到Y 的满射。简言之，满射即射满：$f(x)=Y$。

从集合 X 到集合 Y 的映射f 有以下几种可能：

① 是单射而不是满射；如图 1；

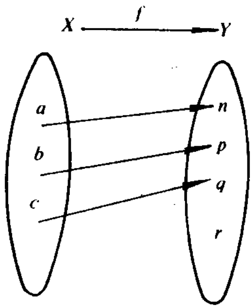

图 1

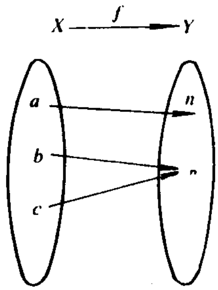

图 2

② 是满射而不是单射；如图 2；

③ 既不是单射也不是满射；如图 3；

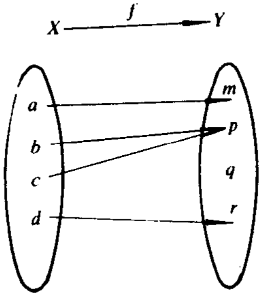

图 3

(3) 若一个映射f,既是单射,又是满射,则映射f叫做一一映射。

映射,单射,满射,一一映射四个概念之间的关系是:

$$\{\{满射\}\cup\{单射\}\}\subset\{映射\}$$

$$\{\{满射\}\cap\{单射\}\}=\{一一映射\}$$

2. 映射与函数的关系是什么?

映射是函数的拓扩。函数概念中的定义域和值域都是由数组成的集合,而对应法则也是建立在这两个数集上的。

映射概念中的定义域和值域则不限于是数值。映射又常称为映照,对应,变换,算子等。两个映射f_1和f_2相等(相同)是指它们的定义域相同,而且对定义域中任何元素x,有$f_1(x)=f_2(x)$。

3. 从集合A到集合B的"一一映射"与从集合B到集合A的"一一映射"是一样的吗?

我们的回答是:不一定。如果一个映射$f: A\to B$是一一映射,那么,根据一一映射的定义,也一定存在从B到A的一一映射$f^{-1}: B\to A$。但这两个一一映射一般是不同的。举一个简单的例子:从集合R到集合R的一一映射$f: x\to y=3x$,而$f^{-1}: y\to x=\frac{y}{3}$,显然f和$f^{-1}$是不同的。又如,集合$X=[3,+\infty)$,集合$Y=[0,+\infty)$,$f: x\to y=\sqrt{x-3}$是从集合$X$到集合$Y$的一一映射,从集合$Y$到集合$X$也存在一一映射$f^{-1}: y\to x=y^2+3\ (y\geqslant 0)$,而$f$与$f^{-1}$是完全不同的。特别地,从集合$R$到集合$R$的一一映射$f: x\to y=x$,则$f^{-1}$和$f$显然是相同的。

有人把一一映射简单说成:“对于A中任一元素,B中有唯一元素与它对应;对于B中任一元素,A中也有唯一元素与它对应。则这个对应法则叫做一一映射”,这种说法是不对的,其错误就在于把从A到B的一一映射与从B到A的一一映射混为一谈,一般说来,f和f^{-1}是两个不同的映射。

还有人把一一映射理解为一对一的映射,这也是不对的,因为一一映射不仅要求一个对一个(一对一),而且要求不同的元素其原象也不同。

4. 一函数与其反函数有哪些方面的联系?

(1) 定义域和值域:一函数的定义域和值域,分别为其反函数的值域和定义域。

(2) 奇偶性:如果一个函数为奇函数,则它的反函数仍为奇函数。偶函数在定义域上不存在反函数。

(3) 单调性:如果一个函数在定义域或在定义域的某个子区间上是单调递增(或递减)的函数,它的反函数在其相应的区间上也是单调递增(或递减)的函数。即函数和它的反函数的单调性是一致的。

(4) 图象:一函数$y=f(x)$的图象与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图象在同一坐标系中关于直线$y=x$是对称的。

函数$y=f(x)$的反函数,有时记作$y=f^{-1}(x)$,有时记作$x=f^{-1}(y)$。

由反函数的定义可知:$x=f^{-1}(y)$是函数$y=f(x)$的反函数,并有如下基本关系:$y=f[f^{-1}(y)]$,$x=f^{-1}[f(x)]$,对于$x=f^{-1}(y)$,y是自变量,x是y的函数;而对于$y=f(x)$,x是自变量,y是x的函数。若在同一坐标系中画图,则图象是重合的。

由于 $y=f(x)$ 和 $x=y^{-1}(y)$，在同一坐标系中画出的图形是重合的，研究起来很不方便，所以就按通常习惯，用 x 表示自变量，用 y 表示函数，写成 $y=f^{-1}(x)$。但有时用 $x=f^{-1}(y)$ 进行研究也较方便。

5．怎样求一个函数的反函数？

我们知道，一个函数具有反函数的充分必要条件是确定该函数的映射是一一映射。由于任意一个函数在其自身的单调区间上都是一一映射，所以，在函数的单调区间上就可以求函数的反函数。

中学数学涉及的函数，主要是基本初等函数，通常研究两个非空数集间用解析式表达的函数关系。对于这样的函数，只要把 $y=f(x)$ 看成一个关于 x 的方程，解出 $x=f^{-1}(y)$，再将字母 x,y 互换，即得到反函数 $y=f^{-1}(x)$。

若函数在整个定义域上是单调的，则函数在其定义域上存在反函数。

例 1: 求函数 $y=\lg(4x-1)$ 的反函数。

解: $\because$ 该对数的底 $a=10>1$，$\therefore$ $\lg(4x-1)$ 在定义域 $(\frac{1}{4},+\infty)$ 上是单调递增的，故在定义域 $(\frac{1}{4},+\infty)$ 上存在反函数。

$\because\quad y=\lg(4x-1)\qquad\therefore\quad 10^{y}=4x-1$

$\therefore\quad x=\frac{1}{4}(10^{y}+1)$

将 x,y 字母互换，得 $y=\frac{1}{4}(10^{x}+1)$

$\therefore$ 函数 $y=\lg(4x-1)$ 的反函数是 $y=\frac{1}{4}(10^{x}+1)$。

例 2：求函数 $y=2\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的反函数。

解：函数 y 在定义域 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 上是单调递减的。所以函数在定义域上存在反函数。

变形得：
$$\frac{y}{2}=\arcsin\frac{1}{x}$$

两边取正弦得：
$$\frac{1}{x}=\sin\frac{y}{2}$$

将 x,y 字母互换得：
$$y=\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

$\therefore$ 函数 $y=2\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的反函数为：

$$y=\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}},\quad x\in[-\pi,0)\cup[0,\pi)。$$

若函数在定义域上不是单调的，但在定义域的某一子区间上是单调的。则可以在该单调区间上求反函数，这时对所求出的反函数必须注明单调区间。

例 3：求函数 $y=x^2+1\ (x<0)$ 的反函数。

解：$\because$ 函数 $y=x^2+1$ 当 $x<0$ 时是单调递减的，

$\therefore$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上存在反函数。

将所给函数变形为 $x^2=y-1$，

$\because\ x<0\quad\therefore\ x=-\sqrt{y-1}$

将 x，y 字母互换得：$y=-\sqrt{x-1}\quad(x>1)$

$\therefore$ 函数 $y=x^2+1\ (x<0)$ 的反函数为：

$$y=-\sqrt{x-1}\quad(x>1)$$