高等学校教学参考书

电磁场与电磁波

（第3版）

教学指导书

赵家升　杨显清　王　园

高等教育出版社

高等学校教学参考书

《电磁场与电磁波》（第3版）教学指导书

赵家升　杨显清　王　园

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“九五”教育部重点教材《电磁场与电磁波》(第 3 版)(谢处方、饶克谨编,赵家升、袁敬闳修订,高等教育出版社 1999 年 6 月出版)的配套教材。

本书第一部分“绪论”阐述电磁场与电磁波课程的性质和任务，本课程与高等数学、大学物理的衔接关系，以及课程学时分配建议。第二部分按《电磁场与电磁波》(第 3 版)的章节顺序，给出每章的“基本内容概述”、“教学基本要求及重点、难点”、“典型例题解析”及“习题解答”。书末附有本科生自测试题和硕士研究生入学试题。

本书可供高等学校电子信息类专业的教师和学生使用，作为“电磁场与电磁波”课程的教学参考书和学习指导书；也适合报考硕士研究生的读者复习时参考。

图书在版编目(CIP)数据

《电磁场与电磁波》(第 3 版)教学指导书/赵家升，杨显清，王园．—3 版．—北京：高等教育出版社，2003.12 (2004 重印)

ISBN 7-04-013022-X

Ⅰ.电... Ⅱ.①赵... ②杨...③王... Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料②电磁波-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 099488 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 12 月第 1 版
印　　张	18.75	印　　次	2004 年 7 月第 2 次印刷
字　　数	350 000	定　　价	23.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　　言

“电磁场与电磁波”是高等学校电子信息类专业的一门技术基础课，它所涵盖的内容是合格的电子信息类专业本科学生所应具备的知识结构的重要组成部分。

“电磁场与电磁波”课程历来被认为是一门教师难教、学生难学的课程。为了对改善这种情况有所帮助，我们编写了这本与《电磁场与电磁波》(第3版)(谢处方、饶克谨编，赵家升、袁敬闳修订，高等教育出版社1999年6月出版)配套的教学指导书。希望能帮助教师正确理解和掌握各章的教学基本要求，处理好课程教学中的重点和难点。也希望帮助学生正确理解和掌握“电磁场与电磁波”的基本内容，提高分析问题和解决问题的能力。

全书共分九章：矢量分析、电磁场中的基本物理量和基本实验定律、静电场分析、静态场边值问题的解法、恒定磁场分析、时变电磁场、正弦平面电磁波、导行电磁波和电磁波辐射。每一章均由四部分组成：

一、基本内容概述

对本章内容作简要归纳，给出重要的公式和结论。

二、教学基本要求及重点、难点

根据课程教学大纲，提出本章必须牢固掌握的内容和一般了解的内容。对重点、难点作简要讨论。

三、典型例题解析

详细分析和解答大量的例题，意在使读者加深对基本理论的掌握，拓宽解题思路，提高解题技巧。

四、习题解答

对每章的习题作了全解。

在这里顺便指出，学习“电磁场与电磁波”课程，解题是重要的学习环节之一，也是学习过程中的难点所在。通过解题，能巩固和加深对基本理论的理解，培养理论联系实际的能力，掌握分析和计算的技巧。希望读者先要自己解题，再看习题解答。

本书第1~5章由杨显清副教授编写，第6~7章由赵家升教授编写，第8~9章由王园副教授编写，全书由赵家升审核定稿。

在编写本书过程中，总结了编者在电子科技大学从事“电磁场与电磁波”

课程教学几十年的经验，也吸取了电子科技大学微波工程系电磁场教研室同仁的经验，还参阅了近年来国内外的相关教材和参考书，得到了不少启发，在此一并致以谢意。

书中若有不妥或错误之处，敬请读者指正。

编　者

2003年8月于电子科技大学

策划编辑　刘激扬
责任编辑　曲文利
封面设计　李卫青
责任绘图　黄建英
版式设计　王艳红
责任校对　存　怡
责任印制　孔　源

郑重声明

目　录

绪　论

一、"电磁场与电磁波"课程的性质和任务

"电磁场与电磁波"是高等学校电子信息类及电气信息类专业本科生必修的一门技术基础课。课程所包含的内容是合格的电子、电气信息类专业本科学生应具备的知识结构的重要组成部分。近代科学技术的发展过程表明，电磁场与电磁波基本理论又是一些交叉学科的生长点和新兴边缘学科发展的基础。因此，学好本课程不仅为学习专业课准备了必要的基础知识，而且将在完善自身素质，增强适应能力和创造能力方面长远地发挥作用。

通过本课程的学习，应掌握宏观电磁场与电磁波的基本理论，对一些基本的电磁场与电磁波问题能进行定性分析和定量计算。

二、本课程与"高等数学"、"大学物理"的衔接关系

"高等数学"和"大学物理"应该是先修课程。矢量代数、矢量微积分、微分方程与特殊函数是必备的数学基础。"大学物理"的电磁学部分是必备的物理基础。

三、本课程的学时分配建议

本课程以 60 学时较为适宜，分配如下：

1. 矢量分析：4 学时
2. 电磁场中的基本物理量和基本实验定律：4 学时
3. 静电场分析：6 学时
4. 静态场边值问题的解法：4 学时
5. 恒定磁场分析：8 学时
6. 时变电磁场：6 学时
7. 正弦平面电磁波：12 学时
8. 导行电磁波：10 学时
9. 电磁波辐射：6 学时

第1章 矢量分析

1.1 基本内容概述

矢量分析是研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具之一。本章着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律。

1. 标量场与矢量场

标量场可用一个标量函数来描述

$$u = u(\boldsymbol{r}) \tag{1.1}$$

标量场的等值面方程为

$$u(\boldsymbol{r}) = C\ (C\text{ 为常数}) \tag{1.2}$$

矢量场可用一个矢量函数来描述

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_x A_x(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}_y A_y(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}_z A_z(\boldsymbol{r}) \tag{1.3}$$

矢量场的矢量线微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x(\boldsymbol{r})} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y(\boldsymbol{r})} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z(\boldsymbol{r})} \tag{1.4}$$

2. 矢量场的散度

矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$穿出闭合面 S 的通量为

$$\Psi = \oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.5}$$

矢量场的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 是一个标量，在直角坐标中散度的表达式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.6}$$

散度定理：矢量场的散度在体积 τ 上的体积分等于矢量场在限定该体积的闭合曲面 S 上的面积分，即

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.7}$$

散度定理是矢量场中的体积分与面积分之间的一个变换关系，在电磁理论中非

常有用。

3. 矢量场的旋度

矢量场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 沿闭合路径 C 的环流为 $\oint_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$。

矢量场的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 是一个矢量，直角坐标中旋度的表达式为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}=$$

$$\boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \tag{1.8}$$

斯托克斯定理：矢量场的旋度在曲面 S 上的面积分等于矢量场在限定该曲面的闭合路径 C 的线积分，即

$$\int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.9}$$

斯托克斯定理是矢量场中的面积分与线积分之间的一个变换关系，在电磁理论中也很有用。

4. 标量场的方向导数与梯度

在直角坐标系中方向导数的计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.10}$$

式中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦。

标量场的梯度 ∇u 是一个矢量，在直角坐标中，梯度的表达式为

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.11}$$

5. 亥姆霍兹定理

在有限的区域 τ 内，任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件(即限定区域 τ 的闭合面 S 上的矢量场的分布)惟一地确定，这就是亥姆霍兹定理。

根据矢量场的散度和旋度可将矢量场分为无散场、无旋场和有散有旋场。

无旋场

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=0 \tag{1.12}$$

无旋场可以表示为一个标量场的梯度，即

$$\boldsymbol{F}=-\nabla u \tag{1.13}$$

无散场

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0 \tag{1.14}$$

无散场可以表示为一个矢量位函数的旋度，即

$$\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.15}$$

有散有旋场

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{F} = g \\ \nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} \end{cases} \tag{1.16}$$

可将矢量场 $\boldsymbol{F}$ 表示为一个无散场 $\boldsymbol{F}_s$ 和一个无旋场 $\boldsymbol{F}_l$ 的叠加，即

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_s + \boldsymbol{F}_l \tag{1.17}$$

因而，可定义一个标量位函数 u 和矢量位函数 $\boldsymbol{A}$，使得

$$\boldsymbol{F} = -\nabla u + \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.18}$$

1.2 教学基本要求及重点、难点

1. 教学基本要求

理解标量场与矢量场的概念，了解标量场的等值面和矢量场的矢量线的概念。

矢量场的散度和旋度、标量场的梯度是矢量分析中最基本的重要概念，应深刻理解，掌握散度、旋度和梯度的计算公式和方法。

散度定理和斯托克斯定理是矢量分析中的两个重要定理，应熟练掌握和应用。

理解亥姆霍兹定理的重要意义。

2. 重点、难点讨论

(1) 矢量场散度和旋度描述矢量场的不同性质，主要的区别在于：

① 一个矢量场的旋度是一个矢量函数，而一个矢量场的散度是一个标量函数。

② 旋度描述的是矢量场中各点的场量与漩涡源的关系，而散度描述的是矢量场中各点的场量与散度源的关系。

③ 如果矢量场所在的空间中，$\nabla \times \boldsymbol{A} \equiv 0$，则这种场中不可能存在漩涡源，因而称之为无旋场；如果矢量场所在的空间中，$\nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv 0$，则这种场中不可能存在散度源，因而称之为无散场。

④ 在旋度公式(1.8)中，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的场分量 A_x、A_y、A_z 分别只对方向与其垂直的坐标变量求偏导数，所以矢量场的旋度描述的是场分量在与其垂直的方向上的变化规律；而在散度公式(1.6)中，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的场分量 A_x、A_y、A_z 分

别只对 x、y、z 求偏导数，所以矢量场的散度描述的是场分量沿着各自方向上的变化规律。

(2) 亥姆霍兹定理总结了矢量场的基本性质，矢量场由它的散度和旋度惟一地确定，矢量的散度和矢量的旋度各对应矢量场的一种源。所以，分析矢量场总是从研究它的散度和旋度着手，散度方程和旋度方程组成了矢量场的基本方程(微分形式)。也可以从矢量场沿闭合面的通量和沿闭合路径的环流着手，得到基本方程的积分形式。

(3) 一个标量场的性质可由它的梯度来描述，即 $u(\boldsymbol{r})=\int \nabla u\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+C$。标量场的梯度具有如下性质：

① 标量场 $u(\boldsymbol{r})$的梯度是一个矢量场，并且 $\nabla\times\nabla u\equiv 0$。

② 标量场 $u(\boldsymbol{r})$中，在给定点沿任意方向 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数等于梯度在该方向上的投影，即$\dfrac{\partial u}{\partial l}=\boldsymbol{e}_l\cdot\nabla u$。

③ 标量场 $u(\boldsymbol{r})$中每一点的梯度，垂直于过该点的等值面，且指向 $u(\boldsymbol{r})$ 增加的方向。

1.3 典型例题解析

例 1.1 已知 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z')$，$R=|\boldsymbol{R}|$。求证：(1) $\nabla R=\dfrac{\boldsymbol{R}}{R}$；(2) $\nabla f(R)=-\nabla' f(R)$。

其中：∇是对 x、y、z 运算，∇'是对 x'、y'、z'运算。

证明 (1)将 $R=|\boldsymbol{R}|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$代入式(1.11)，得

$$\nabla R=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

(2) 由式(1.11)，得到

$$\begin{aligned}\nabla f(R)=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial f(R)}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial f(R)}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial f(R)}{\partial z}=\\ \boldsymbol{e}_x\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\frac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\frac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\frac{\partial R}{\partial z}=\\ \frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\nabla R=\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\frac{\boldsymbol{R}}{R}\end{aligned}$$

同理

$$\nabla' f(R)=\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\nabla' R=\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\frac{-\boldsymbol{e}_x(x-x')-\boldsymbol{e}_y(y-y')-\boldsymbol{e}_z(z-z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=$$

$$-\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

故得

$$\nabla f(R) = -\nabla' f(R)$$

此式表明，在处理相对坐标的函数的梯度运算时，算子 ∇ 与算子 ∇' 可以互换，但必须改变算子前面的正负号。

例 1.2 设点电荷 q 位于坐标原点，在周围空间任一点 $\boldsymbol{M}(x,y,z)$处产生的电位为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

式中 ε 为介电常数，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y y + \boldsymbol{e}_z z$，$r = |\boldsymbol{r}|$，试求电位 φ 的梯度。

解 由上题可得

$$\nabla\varphi = \nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\nabla r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$$

而点电荷 q 产生的电场强度 $\boldsymbol{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}$，故有

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$$

此式表明，点电荷的电场强度等于电位梯度的负值。

例 1.3 已知 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x(x-x') + \boldsymbol{e}_y(y-y') + \boldsymbol{e}_z(z-z')$，$R = |\boldsymbol{R}|$。求矢量 $\boldsymbol{D} = \dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}$在 $R\neq 0$ 处的散度。

解 根据散度的运算公式(1.6)，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x'}{R^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y'}{R^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z'}{R^3}\right) =$$

$$\frac{3}{R^3} + (x-x')\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right) + (y-y')\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R^3}\right) + (z-z')\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R^3}\right) =$$

$$\frac{3}{R^3} - \frac{3(x-x')^2}{R^5} - \frac{3(y-y')^2}{R^5} - \frac{3(z-z')^2}{R^5} = 0$$

例 1.4 已知 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_x(x-x') + \boldsymbol{e}_y(y-y') + \boldsymbol{e}_z(z-z')$，$R = |\boldsymbol{R}|$。求矢量 $\boldsymbol{D} = \dfrac{\boldsymbol{R}}{R^3}$在 $R\neq 0$ 处的旋度。

解 根据旋度的运算公式 $\nabla\times(u\boldsymbol{A}) = u\nabla\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\times\nabla u$，有

$$\nabla\times\boldsymbol{D} = \frac{1}{R^3}\nabla\times\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}\times\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)$$

而

$$\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{1}{R^3}\right)\nabla R = -\frac{3}{R^4}\frac{\boldsymbol{R}}{R} = -\frac{3\boldsymbol{R}}{R^5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - x' & y - y' & z - z' \end{vmatrix} = 0$$

故得

$$\nabla \times \boldsymbol{D} = 0 - \boldsymbol{R} \times \left(-\frac{3\boldsymbol{R}}{R^5} \right) = 0$$

1.4 习题解答

1.1 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3$$

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x 5 - \boldsymbol{e}_z 2$$

求：(1)$\boldsymbol{a}_A$；(2)$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$；(3)$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$；(4)$\theta_{AB}$；(5)$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量；(6)$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$；(7)$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$和$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$；(8)$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$。

解 (1) $\boldsymbol{a}_A = \dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \dfrac{\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \boldsymbol{e}_x \dfrac{1}{\sqrt{14}} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{2}{\sqrt{14}} - \boldsymbol{e}_z \dfrac{3}{\sqrt{14}}$

(2) $|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}| = |(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3) - (-\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z)| = |\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 6 - \boldsymbol{e}_z 4| = \sqrt{53}$

(3) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3) \cdot (-\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z) = -11$

(4) 由 $\cos\theta_{AB} = \dfrac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{14} \times \sqrt{17}} = -\dfrac{11}{\sqrt{238}}$，得

$$\theta_{AB} = \arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}} \right) = 135.5°$$

(5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量

$$A_B = |\boldsymbol{A}| \cos\theta_{AB} = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}$$

(6) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_x 4 - \boldsymbol{e}_y 13 - \boldsymbol{e}_z 10$

(7) 由于 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_x 8 + \boldsymbol{e}_y 5 + \boldsymbol{e}_z 20$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{e}_x 10 - \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z 4$$

所以 $$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y2-\boldsymbol{e}_z3)\cdot(\boldsymbol{e}_x8+\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z20)=-42$$
$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(-\boldsymbol{e}_x10-\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z4)\cdot(\boldsymbol{e}_x5-\boldsymbol{e}_z2)=-42$$

(8) $$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -10 & -1 & -4\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y40+\boldsymbol{e}_z5$$
$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x55-\boldsymbol{e}_y44-\boldsymbol{e}_z11$$

1.2 三角形的三个顶点为 $P_1(0,1,-2)$，$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$。(1)判断$\triangle P_1P_2P_3$是否为一直角三角形；(2)求三角形的面积。

解 (1) 三个顶点 $P_1(0,1,-2)$，$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$的位置矢量分别为
$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z2,\quad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_x4+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z3,\quad \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{e}_x6+\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z5$$
则 $$\boldsymbol{R}_{12}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{R}_{23}=\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z8$$
$$\boldsymbol{R}_{31}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z7$$
由此可见
$$\boldsymbol{R}_{12}\cdot\boldsymbol{R}_{23}=(\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z)\cdot(\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z8)=0$$
故$\triangle P_1P_2P_3$为一直角三角形。

(2) 三角形的面积
$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12}\times\boldsymbol{R}_{23}|=\frac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12}|\times|\boldsymbol{R}_{23}|=\frac{1}{2}\sqrt{17}\times\sqrt{69}=17.13$$

1.3 求 $P'(-3,1,4)$点到 $P(2,-2,3)$点的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向。

解 $$\boldsymbol{r}_{P'}=-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z4,\quad \boldsymbol{r}_P=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z3$$
则 $$\boldsymbol{R}_{P'P}=\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}_{P'}=\boldsymbol{e}_x5-\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z$$
且 $\boldsymbol{R}_{P'P}$与 x、y、z 轴的夹角分别为
$$\phi_x=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)=32.31°$$
$$\phi_y=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{35}}\right)=120.47°$$
$$\phi_z=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{R}_{P'P}}{|\boldsymbol{R}_{P'P}|}\right)=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{35}}\right)=99.73°$$

1.4 给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z6$，求它们之间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量。

解 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的夹角为
$$\theta_{AB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left(\frac{-31}{\sqrt{29}\times\sqrt{77}}\right)=131°$$