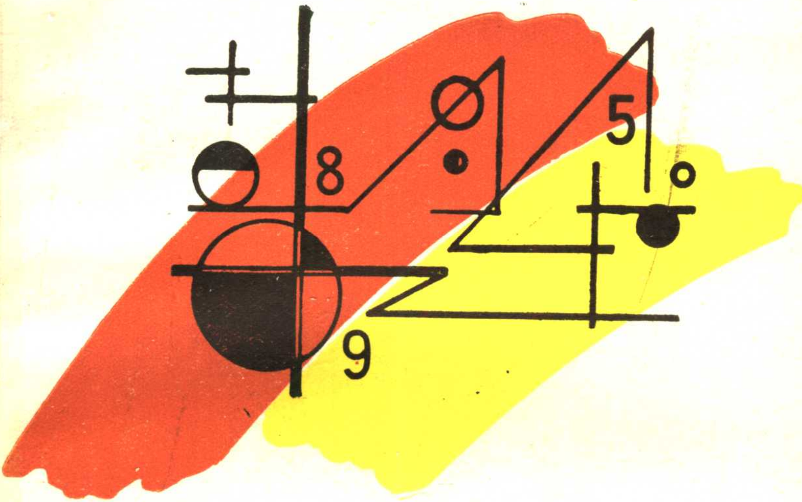
中学生课外阅读丛书



北京市海淀区教师进修学校　主编

初二代数几何

下册

机械工业出版社

中学生课外阅读丛书

初二代数几何

下册

北京市海淀区教师进修学校 主编

机械工业出版社

本书围绕初二年级所学数学知识的重点、难点、关键点展开，涉及的内容有代数的一元二次方程解法、判别式、韦达定理，几何中的基本作图、对称、四边形、面积、勾股定理等内容。

本书弥补了因时间限制而课内讲授不足的问题，并适当拓宽了知识面，对知识的历史背景、发展方向、蕴含的思想、体现的方法以及巧用活用等方面作了必要的补充。它对帮助学生巩固课内知识、开阔视野、提高能力会有较大作用。此外，本书还注意了选材及文字的科学性及趣味性。

本书可供初、高中各年级学生，中、小学各学科教师、中学生家长和具有中等文化水平的青年职工以及自学青年阅读。

中学生课外阅读丛书

初二代数几何

下　册

北京市海淀区教师进修学校　主编

●

责任编辑：吴曾评　　责任校对：刘志文

责任印制：张俊民　　版式设计：罗文莉

●

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

机械工业出版社发行·新华书店经销

●

开本787×1092 1/32·印张5 1/8·字数110千字

1989年8月北京第一版·1989年8月北京第一次印刷

印数00.001—1,690·定价：2.35元

●

ISBN 7-111-00998-3/G·51

序

知识的获得，能力的增长，智力的开拓和水平的提高，往往得益于课外，这是很多科学家、作家和文艺工作者的切身体会。因为课内的讲授只能是分析、理解知识的内容和知识的结构，而要形成各种能力，则要靠大量的课外阅读。这就是本套丛书编写的目的之一。其次，这套丛书包括了从初中一年级起直至高中三年级的16个学科，它能使读者切实地掌握各学科的基础知识，培养、提高读者把握各学科的基本技能和技巧，有利于将来的工作，有利于初高中升学考试。这也是编写本套丛书的意图。中学是基础学习的阶段，如果能奠定坚实的知识基础，培养观察、想像、思维、动手等各方面的能力，对提高全民族文化素质也是有益的。这也是我们编写这套丛书的意愿。

这套丛书共16个学科，57册。其中，政治两册，初、高中语文各六册，初中数学六册、高中数学四册，初、高中英语各三册，初中物理两册、高中物理三册，初中化学一册，高中化学三册，初中中国地理，初中世界地理、高中地理各一册，中国历史、世界历史各两册，生物、动物、植物、生理卫生各一册，音乐、体育、美术各两册，计算机一册。

这套丛书充分体现了知识性、科学性和趣味性，内容充实，行文简洁，形式活泼，语言生动，读者从中可以得到爱国主义、国际主义、辨证唯物主义、历史唯物主义和美学教育。这套丛书除语文外，都是按照教学大纲和教材的要求，以解决学习中的难点、重点为主线；介绍了本学科古今中外

著名的专家学者，以及他们的故事轶闻；设计了多种形式的实验、练习以及解题的多种方法等等。语文中各种文体的文章也是按照教学大纲对每个年级每个学期的知识要求而选择的，内容丰富生动，情节曲折动人，并附有注释及分析。其中大部分文章是名家的新作，具有积极的思想内容和完美的艺术形式。

这套丛书的编写者，都是北京市海淀区有较高业务水平、有较丰富教学经验、有较强的写作能力的教师，其中大多数是中学的高级和一级教师，还有特级教师。编写班子阵容强大、实力雄厚，希望能为开辟学生的第二课堂做一些有益的工作。但限于时间和水平，书中内容有不当之处，敬请读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

1988年2月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　言

望我中华子孙个个成龙，是人们共同的心愿。有良好的愿望是必要的，但是，如果拿不出实现愿望的正确办法，愿望只好落空。因此，育人的方法措施，是至关重要的问题。

从智育的角度看存在两个问题：一个是学习内容问题，一个是学习方法问题，即学些什么和怎样去学的问题。

回顾我们区近年来的教学实践，在内容方面，经历了三个阶段：一、仅抓课本；二、在掌握课本知识的基础上，举办一些专题讲座；三、适当提供一些“微量元素”。在方法方面，不仅应注意课堂教学和课外作业的正规作战，而且还应适当利用闲暇时间，通过轻松教育辅助同学开阔视野。

编写本书的意图在于给同学们提供数学中的“微量元素”。它包括史、法、用、高、新等方面的内容。史，指古今中外一些数学大家的事迹和其它有启发性的数学史料；法，指重要数学思想和数学方法；用，指数学在生产和生活中的巧妙应用；高，指用高观点认识中学数学；新，指当今数学发展的新动向。这些内容，对开阔视野、激发学习数学的兴趣、更深入地理解课内知识，从根本处掌握数学思想和方法、提高数学思维能力都将大有裨益。它们具有数量不多而作用巨大的特点，把它们比喻为营养学中的“微量元素”不是很恰当吗？

本丛书的数学部分每册都由独立成篇的一些文章组成，文字力求通俗易懂而又具有趣味性，以便于利用零星闲暇时间阅读，读时，一次未必读很多，只要持之以恒，自能体会到其功效的。

本册由章昌宁、翁立强、嵇燕竹、陈泰山、张振威、夏廷玺、宋天仆、李毓佩编写。

目　　录

一、漫谈一元二次方程及其解法

二次方程出现的历史很悠久，它的最早记载是公元前2000年左右的巴比伦文献，记载这些文献的文字是刻写在粘土做的书板上的，这些泥板是在胶泥还软的时候刻上字，然后经焙烧制成的。在发现的50万块书板中，约有300块已被鉴定为载有数字表和一批数学问题的纯数学书板，有的书板反映了巴比伦算术已经演化成为一种高度发展的用文字叙述的代数学。他们既能用相当于代入一般公式的方法，又能用配方法来解二次方程，还讨论了某些三次方程和双二次(四次)方程。古埃及的纸草文书曾涉及到最简的二次方程，相当于$ax^2=b$类型的方程。印度用缩写文字和一些记号来描述运算，对问题和解答都用半符号方式书写，但是只写出运算步骤，没有接着说明理由或者给出证明；他们认识到了二次方程有两个根，包括负根和无理根；他们用熟悉的配方法统一于二次方程的代数解，这种方法常被称为印度方法。印度数学家婆斯加罗（1125—1141年）的著作里曾提出一个有趣的“荷花问题”。

荷花问题

湖平浪静出新莲，五寸婷婷露笑颜。
孰意风狂玉枝倒，忍看花色没波涟。
渔翁秋后寻根源，根距残花二尺边。
借问群英贤学子，水深多少在当年。

这是一个二次方程的应用问题，解得水深 $3\frac{3}{4}$ 尺。

我国是四大文明古国之一，有着光辉灿烂的文化。我国古代的数学形成了一套完全是自己独创出来的方式和方法，其成果堪与世界各先进文明古国媲美。《周髀算经》和《九章算术》大约成书在公元前1世纪前后，是两部古老的、伟大的数学著作，不仅在我国，而且对世界数学的影响也是很大的。苏联、日本、联邦德国、英国等国都翻译了《九章算术》。《九章算术》中，有不少问题涉及到了二次方程，其中就有一个相当于$x^2+ax=b$型的二次方程，是通过求正根来解决问题的。《九章算术》中还有一个"引葭赴岸"的最古老的二次方程问题，原文是："今有方池一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与水齐。问水深葭长各几何？""引葭赴岸"问题与前面提到的印度的"荷花问题"极为相似，但从时间上，我国至少要早1000年以上，我们分析推测，可能是在佛教盛行期间(约公元3世纪～9世纪)，中印两国文化接触频繁，"引葭赴岸"问题传到了印度。《九章算术》中还有一题："今有邑方不知大小，各开中门，出北门二十步有木，出南门一十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问邑方几何？"根据书中的说法，可列出一元二次方程，用现在的符号表示为：$x^2+(20+14)x-2\times20\times1775=0$。这个题目的特点是把代数与相似三角形联系在一起了，利用相似直角三角形的性质，列出一个二次方程来求解，这是我国数学特色之一。至于怎么解此方程，书中只提到"开方除之"，没作其他解释或说明，最后给出结果，答曰："二百五十步"。

对于一元二次方程，是我国最早创立了一般解法。《九

章算术》中已隐含了求数值解法；三国时已出现了一般解法。而印度在7世纪以后，阿拉伯人在9世纪以后，才有二次方程的一般解法。

在第3世纪，我国三国时期的数学家赵爽(字君卿)在注《周髀算经》时，提出了相当于$x^2-bx+c=0$型的二次方程的一般解法是$x=\frac{b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$，这是世界上最早的二次方程求根公式的记录。之后，我国古代数学家张建丘、杨辉，天文学家僧一行等对一元二次方程的一般解法都有研究。

到了9世纪，在阿拉伯数学家和天文学家花拉子密所写的《代数》一书里，第一次出现了现在的二次方程的计算公式(首项系数是1的)$x=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$。花拉子密是阿拉伯最有影响的数学家，在公元842～847年曾出使波斯以北，置东西方商业要冲的西突厥北部可萨国(位于苏联黑海以北)。根据历史学家们分析，可萨国人通中国话，朝廷礼仪都同中国一样，并从他的著作风格看，与我国数学著作的特色都很相似，这些线索说明花拉子密不可能不受中国数学的影响。在这之后约700年中，人们一直认为为当$b^2-4ac<0$时方程无解，一直到16世纪有了虚数概念后，这个认识才得以纠正。

在无数的二次方程中有一个方程是$x^2+x-1=0$，它不是人们主观臆造出来的，而是从实际问题中得到的。例如已知线段$AB=1$，点P将AB分成两部分，使较长的部分为全线段和较短部分的比例中项，问P点应在什么位置上？我们可设较长部分$AP=x$，则较短部分$PB=1-x$，根据题

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

意有$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$，这样就得到了方程$x^2+x-1=0$，取其正根得$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，我们知道了$P$点应在距线段$AB$的一个端点$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$个单位处。点$P$还可通过几何作图的方法求得，这种分割的方法在平面几何里称之为“黄金分割”。黄金分割在几何作图，在建筑设计上，在美学和艺术上都有着广泛的应用。初中平面几何里，作圆内接正十边形就可归结为黄金分割。中外数学家对黄金分割的用途进行了很多研究，它又在当代“优选法”中发挥了重要作用，优选法中有一个方法就是“黄金分割”法，又称0.618法，这个0.618就是方程$x^2+x-1=0$的正根$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的近似值。优选法在配比配方、改革工艺条件以及仪器仪表调试等许多方面都有着广泛的应用，对充分利用原有设备，解决质量关键，挖掘潜力，降低消耗等方面都起到了积极的作用。可见二次方程来自实践又服务于实践。

解一元二次方程一般常采用下面的几种方法：开平方法、配方法、公式法和因式分解法。

由$x^2=a\ (a\geqslant 0)$，知x是a的平方根，只要对a进行开平方运算，就可得到$x=\pm\sqrt{a}$。直接开平方法的根据就是求一个非负数的平方根。所以当一元二次方程的一边是一个含有未知数的式子的平方，另一边是一个非负常数时，可以用直接开平方法来解。

象$4y^2=9$，$(2x-3)^2=5$这类方程，你会毫不犹豫地用开平方法解出，不过象$(3x+4)^2=(2x-3)^2$，$(2x-1)^2$

$=9(3x+2)^2$这类方程能不能用开平方法解呢？我猜你平时是用因式分解法解这类题的，对我所提的问题未曾考虑过，我猜得对吗？现在我们一起来分析这个问题。

我们观察到，$(3x+4)^2=(2x-3)^2$的左边和右边都是含有未知数的式子的平方，但它的右边，不管x是什么样的实数，总有$(2x-3)^2\geqslant 0$，这就是说$(2x-3)^2$这个代数式的值永远是一个非负数，所以这个方程是可以用开平方法解的。上面所提的问题，你现在肯定能回答了。

例1 解方程$(2x-1)^2=9(3x+2)^2$

解 $2x-1=\pm 3(3x+2)$

即

$$2x-1=9x+6 \quad 或 \quad 2x-1=-9x-6$$

$$\therefore \quad x_1=-1 \qquad x_2=-\frac{5}{11}$$

我们根据平方根的概念很容易掌握用开平方法解$(x+b)^2=a(a\geqslant 0)$这类一元二次方程了，那么，能不能用开平方法解$x^2+6x+7=0$，$3x^2+8x-3=0$这类方程呢？由于$(x+b)^2=a$这种形式是可以变形为一元二次方程的一般形式，故一般形式也可化为$(x+b)^2=a$型，实际上，大家都知道是可以通过配方而达到目的的。

例2 用配方法解方程：$3x^2+8x-3=0$

解1
$$x^2+\frac{8}{3}x-1=0$$

$$x^2+\frac{8}{3}x=1$$

$$x^2+\frac{8}{3}x+\left(\frac{4}{3}\right)^2=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$x+\frac{4}{3}=\pm\frac{5}{3}$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{1}{3}\qquad x_2=-3$$

中学教材中通常讲的配方法是在二次项系数为1的情况下，方程两边各加上一次项系数一半的平方，从而使原方程化为$(x+b)^2=a$的形式。

还有没有其它的配方途径？通过上面例题的解2，给你介绍一种新的配方办法。

解2 把方程

$$3x^2+8x-3=0$$

的各项乘以二次项系数3，得

$$9x^2+24x-9=0$$

把常数项移到右边，得

$$9x^2+24x=9$$

在方程的两边各加上原方程的一次项系数一半的平方，得

$$9x^2+24x+4^2=9+4^2$$

$$(3x+4)^2=25$$

解这个方程，得

$$3x+4=\pm5$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{1}{3}\qquad x_2=-3$$

你掌握这个方法了吗？只要你注意到加黑点的几个字，就抓住了这种配方办法的关键，这也正好是与解1配方不同的地方。

请你用解2的办法解方程$2x^2+5x-1=0$，解出后与

下面的解答对照一下。

解 $4x^2+10x-2=0$

$4x^2+10x=2$

$$4x^2+10x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=2+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{33}{4}$$

$$2x+\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$2x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

由于原方程一次项系数是奇数，故用此法配方时，两边各加上的数一定是分数，如果加的是整数就可避开通分，方便计算。这种想法能否实现？你有何办法？仔细观察上面解答的第三、第四步，可知两边再乘以 4 就可达到目的，这就启发我们，可以在做第一步时，方程两边乘以二次项系数的 4 倍，不过配方时要注意，那时两边各加上的数是原方程一次项系数的平方，而不是这个系数一半的平方。具体解法如下：

把方程

$$2x^2+5x-1=0$$

的各项乘以 8，得

$$16x^2+40x-8=0$$

移项，得

$$16x^2+40x=8$$

配方，得

$$16x^2+40x+5^2=8+5^2$$

$$(4x+5)^2=33$$

解这个方程，得

$$4x+5=\pm\sqrt{33}$$

$$4x=-5\pm\sqrt{33}$$

$$\therefore \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

可见，配方的途径不只是一条，只要使含有未知数的代数式能成为一个完全平方式，怎么配都可以，但是它们的实质是相同的。

我们把用配方法解一元二次方程的各种配方方法的步骤归纳如下。

方法一

1．方程两边同除以二次项系数；

2．把常数项移到方程的右边；

3．方程两边各加上一次项系数一半的平方。

方法二

1．方程两边同乘以二次项系数；

2．把常数项移到方程的右边；

3．方程两边各加上原方程一次项系数一半的平方。

方法三

1．方程两边同乘以二次项系数的4倍；

2．把常数项移到方程的右边；

3．方程两边各加上原方程一次项系数的平方。

这三种方法虽然都可解二次方程$ax^2+bx+c=0$，但对

不同条件的方程使用不同方法求解时，在计算难易程度上是有区别的。通过实践、对比，可知当 $a=1$ 且 b 为偶数时，使用方法一；当 $a\neq 1$ 且 b 为偶数时，使用方法二；当 b 为奇数时，使用方法三比较方便。这么讲是否合适，你可以去试一试。

我们知道一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式是把一般形式经过配方而得到的。现在，我们用配方方法三来推导求根公式。

因为 $a\neq 0$，所以 $4a\neq 0$，根据方程的同解原理，把方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两边都乘以二次项的系数 a 的 4 倍，得

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

把常数项移到方程的右边，得

$$4a^2x^2+4abx=-4ac$$

在方程的两边各加上原方程的一次项系数 b 的平方，得

$$(2ax)^2+2\times 2ax\times b+b^2=b^2-4ac$$

即

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac$$

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，得

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

因为 $a\neq 0$，所以 $2a\neq 0$，方程两边都除以 $2a$，得

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

用方法二配方也同样可得求根公式，请你动手试一试。

有了求根公式，给我们解一元二次方程带来了很大的方

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com