中学数理化读物

数学习题集

(行列式部分)

北京出版社

中学数理化读物

数 学 习 题 集

（行列式部分）

严 以 诚

北 京 出 版 社

中学数理化读物

数 学 习 题 集

（行列式部分）

严 以 诚

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京崇文门外东兴隆街 51 号）

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

*

787×1092 毫米 32 开本 1.625 印张 32,000 字

1981 年 9 月第 1 版　1981 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—157,000

书号：7071·747　定价：0.14 元

编者的话

从1978年秋季开始试行的全日制十年制学校数学大纲，在高二上学期的数学课程中，增加了行列式与线性方程组的教学内容。为了便利中学数学教师教学，帮助广大中学生和自学青年学习这部分内容，我们请严以诚同志编写了这本小册子。

本书收入涉及代数、三角、平面几何、解析几何等知识的各种类型的例题32道，内容较全面。为配合学生学习，还安排了练习与习题，书后附有答案与提示。

严以诚同志是从事数学教学多年的老教师，有丰富的教学经验，对行列式与线性方程组有较深的研究。不幸的是，书稿完成后，未及出版，严以诚同志就因病去世。今天，我们出版这本书，也是表示对严以诚同志的怀念。

1981 年 3 月

目　　录

一、例　　题

例 1. 求证： $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\frac{\pi}{12} \\ \cos^2\frac{\pi}{12} & 1 \end{vmatrix} = \frac{15}{16}$.

证：

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\frac{\pi}{12} \\ \cos^2\frac{\pi}{12} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \sin^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{12}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

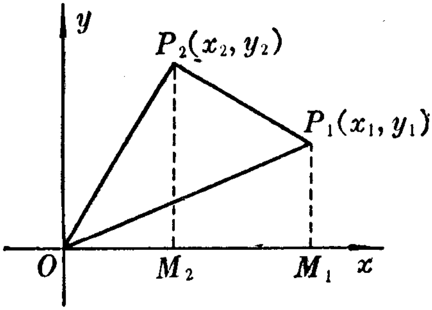
$$= 1 - \frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{15}{16}.$$

例 2. 设三角形的一个顶点在原点，其他两个顶点为 $p_1(x_1, y_1)$ 和 $p_2(x_2, y_2)$。试证它的面积为

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

证：如图



$$
\begin{aligned}
S &= S_{OM_2P_2} + S_{M_2M_1P_1P_2} - S_{OM_1P_1} \\
&= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) - \frac{1}{2}x_1y_1 \\
&= \frac{1}{2}(x_2y_2 + x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 - x_1y_1) \\
&= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1).
\end{aligned}
$$

即 $S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

例 3. 利用行列式的性质，计算：

$$
\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix}.
$$

解：

$$
\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 46 \end{vmatrix}
\left(\begin{array}{l}\text{第一列各元素减去第二列}\\ \text{对应元素；第三列各元素}\\ \text{减去第二列对应元素.}\end{array}\right)
$$

$$
= \begin{vmatrix} 3 & 26 & -4 \\ -6 & 31 & -4 \\ 9 & 54 & -8 \end{vmatrix}
$$

$$=-3\times4\times\begin{vmatrix}1&26&1\\-2&31&1\\3&54&2\end{vmatrix}\left(\begin{array}{l}\text{第二行各元素减去第一行各}\\\text{对应元素，第三行各元素减}\\\text{去 }2\times\text{第一行各对应元素.}\end{array}\right)$$

$$=-3\times4\times\begin{vmatrix}1&26&1\\-3&5&0\\1&2&0\end{vmatrix}$$

$$=-12\begin{vmatrix}-3&5\\1&2\end{vmatrix}=132.$$

例 4. 证明下列行列式的值为 0.

(1) $\begin{vmatrix}14&16&18\\10&17&24\\15&18&21\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1&x&y+z\\1&y&z+x\\1&z&x+y\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}1&\omega&\omega^2\\\omega&\omega^2&1\\\omega^2&1&\omega\end{vmatrix}$ (ω 是 1 的立方虚根).

解：(1) $\begin{vmatrix}14&16&18\\10&17&24\\15&18&21\end{vmatrix}$

$$=2\times3\begin{vmatrix}7&8&9\\10&17&24\\5&6&7\end{vmatrix}(\text{第一列}+\text{第三列})$$

$$=6\begin{vmatrix}16&8&9\\34&17&24\\12&6&7\end{vmatrix}\left(\begin{array}{l}\text{第一列各元素与第二列}\\\text{的对应元素成比例，故}\\\text{行列式的值为 0.}\end{array}\right)$$

$$=6\times0=0.$$

(2) $\begin{vmatrix}1&x&y+z\\1&y&z+x\\1&z&x+y\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x+y+z & y+z \\ 1 & y+z+x & z+x \\ 1 & z+x+y & x+y \end{vmatrix}$$

$=0$.（因第二列各元素与第一列的各对应元素成比例）

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega+\omega^2+1 & \omega^2 & 1 \\ \omega^2+1+\omega & 1 & \omega \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix}=0.$$

注：$x^3=1$ 有三个根：1、ω、ω^2，其中，$\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 或 $\omega=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$，且有性质：$\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$。

例 5. 证明：

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

证：

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

（第二列减第一列为第二列
第三列减第一列为第三列）

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^3.$$

例 6. 根据 169、273、546 能被 13 整除的特点，证明：

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} \text{能被 13 整除.}$$

证：
$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5\times100+4\times10+6 \\ 2 & 7 & 2\times100+7\times10+3 \\ 1 & 6 & 1\times100+6\times10+9 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 546 \\ 2 & 7 & 273 \\ 1 & 6 & 169 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 13\times42 \\ 2 & 7 & 13\times21 \\ 1 & 6 & 13\times13 \end{vmatrix}.$$

因这行列式第三列的元素能被 13 整除，所以这行列式的值能被 13 整除。

例 7. 用行列式的性质证明：

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & -b-c & bc \\ 1 & -c-a & ca \\ 1 & -a-b & ab \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

证：

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & -b-c & bc \\ 1 & -c-a & ca \\ 1 & -a-b & ab \end{vmatrix}$$ （第一列各元素乘以$(a+b+c)$加到第二列各相应的元素上。）

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

(2)

设 $$\Delta=\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\therefore\quad abc\Delta=\begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix}.$$

$$=abc\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\1 & b^2 & b^3\\1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}.$$

$$\therefore\quad \Delta=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\1 & b^2 & b^3\\1 & c^2 & c^3\end{vmatrix},$$

即

$$\begin{vmatrix}bc & a & a^2\\ca & b & b^2\\ab & c & c^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\1 & b^2 & b^3\\1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}.$$

例 8. 已知：

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\1 & b & b^3\\1 & c & c^3\end{vmatrix},$$

试分解为因式.

解： (第一行各元素减去第二行各对应元素；第二行各元素减去第三行各对应元素.)

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & a-b & a^3-b^3\\0 & b-c & b^3-c^3\\1 & c & c^3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a-b & a^3-b^3\\b-c & b^3-c^3\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & a^2+ab+b^2\\1 & b^2+bc+c^2\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)[(b^2+bc+c^2)-(a^2+ab+b^2)]$$

$$=(a-b)(b-c)[(c^2-a^2)+b(c-a)]$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

另解： 因以 b 代 a、c 代 b 及 a 代 c，得

$$\begin{vmatrix} 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \\ 1 & a & a^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & b & b^3 \\ 1 & a & a^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}.$$

故此行列式为 a 、 b 、 c 的四次轮换对称式，又当 $a=b$ 、$b=c$、$c=a$ 时，行列式的值为 0 ，故得

$$\Delta = k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

比较 a^3c 项的系数：$k=1$，

$\therefore\quad \Delta=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

例 9. 证明：

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & ab & ac \\ ab & (a+c)^2 & bc \\ ca & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3.$$

证：（第一列加第二列加第三列）

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} (b+c)(a+b+c) & ab & ac \\ (a+c)(a+b+c) & (a+c)^2 & bc \\ (a+b)(a+b+c) & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c & ab & ac \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

（第一行加第二行加第三行）

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 2(a+b+c) & (a+c)(a+b+c) \\ a+c & (a+c)^2 \\ a+b & bc \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} (a+b)(a+b+c) \\ bc \\ (a+b)^2 \end{matrix}\right|$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ a+c & (a+c)^2 & bc \\ a+b & bc & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$\left(\begin{matrix}\text{第二行减第一行}\times(a+c) \\ \text{第三行减第一行}\times(a+b)\end{matrix}\right)$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} 2 & a+c & a+b \\ -(a+c) & 0 & -a(a+b+c) \\ -(a+b) & -a(a+b+c) & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2[2a(a+b)(a+c)(a+b+c)-2a^2(a+b+c)^2]$$

$$=2a(a+b+c)^3[(a+b)(a+c)-a(a+b+c)]$$

$$=2abc(a+b+c)^3.$$

例 10. 解方程：

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+17 \end{vmatrix}=0.$$

从第二行减去第一行作为新行列式的第二行，从第三行减去第二行作为新行列式的第三行，则得

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ x+2 & 2x+4 & 6x+12 \end{vmatrix}=0.$$

$$(x+1)(x+2)\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

$$(x+1)(x+2)[(x+2)(6-2)-(2x+3)(6-1)$$
$$+(3x+4)(2-1)]=0,$$

$$\therefore\quad (x+1)(x+2)(3x+3)=0,$$

$$\therefore\quad x_1=-1,\ x_2=-1,\ x_3=-2.$$

例 11．求证：

$$\Delta=\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}(a-b) & \cos\frac{1}{2}(b-c) & \cos\frac{1}{2}(c-a) \\ \cos\frac{1}{2}(a+b) & \cos\frac{1}{2}(b+c) & \cos\frac{1}{2}(c+a) \\ \sin\frac{1}{2}(a+b) & \sin\frac{1}{2}(b+c) & \sin\frac{1}{2}(c+a) \end{vmatrix}$$

$$=-2\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(c-a).$$

分析：本题行列式的元素是三角函数，如从三角函数公式来考虑，看到$\cos\frac{1}{2}(a-b)$的子式是 $\sin a\cos b-\cos a\sin b$ 形状，可以化为$\sin(a-b)$，由此来证明这个式子。

证：

$$\Delta=\cos\frac{1}{2}(a-b)\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}(b+c) & \cos\frac{1}{2}(c+a) \\ \sin\frac{1}{2}(b+c) & \sin\frac{1}{2}(c+a) \end{vmatrix}$$

$$-\cos\frac{1}{2}(b-c)\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}(a+b) & \cos\frac{1}{2}(c+a) \\ \sin\frac{1}{2}(a+b) & \sin\frac{1}{2}(c+a) \end{vmatrix}$$

$$+\cos\frac{1}{2}(c-a)\begin{vmatrix}\cos\frac{1}{2}(a+b) & \cos\frac{1}{2}(b+c)\\ \sin\frac{1}{2}(a+b) & \sin\frac{1}{2}(b+c)\end{vmatrix}$$

$$=\cos\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a-b)+\cos\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(b-c)$$

$$+\cos\frac{1}{2}(c-a)\sin\frac{1}{2}(c-a)$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(b-c)+\sin(c-a)]$$

$$=\sin\frac{a-c}{2}\cos\frac{a-2b+c}{2}+\sin\frac{c-a}{2}\cos\frac{c-a}{2}$$

$$=\sin\frac{1}{2}(c-a)\left[\cos\frac{1}{2}(c-a)-\cos\frac{1}{2}(a-2b+c)\right]$$

$$=\sin\frac{1}{2}(c-a)\left[-2\sin\frac{1}{2}(c-b)\sin\frac{1}{2}(b-a)\right]$$

$$=-2\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(c-a).$$

例 12. 设 $A+B+C=\pi$，求证：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \operatorname{tg}A & \operatorname{tg}B & \operatorname{tg}C\\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C\end{vmatrix}=0.$$

证：

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \operatorname{tg}A & \operatorname{tg}B & \operatorname{tg}C\\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C\end{vmatrix}$$

(第二列－第一列，第三列－第一列.)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{tg} A & \operatorname{tg} B-\operatorname{tg} A & \operatorname{tg} C-\operatorname{tg} A \\ \sin 2A & \sin 2B-\sin 2A & \sin 2C-\sin 2A \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \operatorname{tg} B-\operatorname{tg} A & \operatorname{tg} C-\operatorname{tg} A \\ \sin 2B-\sin 2A & \sin 2C-\sin 2A \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\sin(B-A)}{\cos A\cos B} & \dfrac{\sin(C-A)}{\cos A\cos C} \\ 2\cos(B+A)\sin(B-A) & 2\cos(C+A)\sin(C-A) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{2\sin(B-A)\sin(C-A)}{\cos A\cos B\cos C}[\cos C\cos(C+A)-\cos B\cos(B+A)]$$

$$=\frac{2\sin(B-A)\sin(C-A)}{\cos A\cos B\cos C}[-\cos C\cos B+\cos B\cos C]$$

$=0$.

例 13. 若 a、b、c 为$\triangle ABC$ 的三边，试证：

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & \cos^2\dfrac{A}{2} \\ b & b^2 & \cos^2\dfrac{B}{2} \\ c & c^2 & \cos^2\dfrac{C}{2} \end{vmatrix}=0.$$

证：

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} a & a^2 & \dfrac{s(s-a)}{bc} \\ b & b^2 & \dfrac{s(s-b)}{ca} \\ c & c^2 & \dfrac{s(s-c)}{ab} \end{vmatrix}^*$$