第二册

(初中二年级)

数学竞赛阶梯训练

教育出版社

数学竞赛阶梯训练

第　二　册

（初中二年级）

浙 江 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

数学竞赛阶梯训练．第 2 册/岑申主编．—杭州：浙江教育出版社，1999.9（2001.4 重印）

ISBN 7－5338－3211－6

Ⅰ．数...　Ⅱ．岑...　Ⅲ．数学课-初中-课外读物　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 17894 号

责任编辑：吴明华

美术编辑：王大川

数学竞赛阶梯训练

第二册

（初中二年级）

浙江教育出版社出版发行（杭州市体育场路 347 号　邮编 310006）

杭新印务有限公司印刷

开本 787×1092　1/32　印张7.25　字数 163000

1999 年 1 月第 1 版　　2001 年 4 月第 4 次印刷

ISBN 7－5338－3211－6/G·3189　　定价：7.00 元

顾　　问	戴再平		
主　　编	岑　申	王而冶	
副主编	金才华	朱承信	许芬英
本册编写者	蒋通森	沃苏青	解启法
	潘连方	金美琴	林妙祖
	王盛裕	蒋兴根	孙明达
	张　和	马洪炎	
责任编辑	吴明华		

前　言

经验表明，学科竞赛活动，只要指导思想正确，有计划有组织地进行，对于促进教学工作，发现和培养优秀人才，提高教师的业务水平都有积极意义。

当前，我国基础教育战线正大力推进实施素质教育。在新的形势下，为使教育进一步适应经济、社会发展的需要，必须赋予素质教育更深刻的内涵，即把培养学生的创新意识和创造能力放在核心地位。在这方面，学科竞赛可以也应该发挥更好的作用。

这一套初中数学竞赛辅助用书，目的是为师生组织、参加全国及浙江省初中数学竞赛提供参考。编排体系大致与省编教材保持一致。知识内容一般不超越已学内容的范围，但在方法、能力上有所提高，在知识的实际应用方面略有加强，从而体现出在普及基础上提高的原则。为便于练习，每讲后都安排了一定量的“练习”，每章后又安排了一定量的“习题”，读者可根据自身实际，有选择地使用。全书共分四册，前三册分别供初一至初三各年级数学兴趣小组使用，第四册为综合性训练内容。

在强调学科竞赛的积极作用的同时，我们也不赞成把竞赛搞得过滥、过热，不赞成搞大运动量的强化训练。我们主张教师指导与学生自学相结合，科学合理安排竞赛数学的教学。

本书在 1999 年 1 月第 1 版出书后，受到了广大师生的热烈

欢迎，现又根据大家意见作了适当修改补充，更加突出了数学应用意识和创新能力的培养。

浙江省教育学会中学数学教学分会

2000年8月

目　　录

第一章　三　角　形

第一讲　全等三角形

判定两个三角形全等和利用全等三角形性质证明线段相等、角相等以及进行有关计算，是全等三角形的两类基本问题．在解题时我们应当根据已知条件，凭借直观图形，努力找出图中的全等三角形．当图形中没有现成的全等三角形时，我们可以通过添线、图形变换（平移、对称、旋转等）构造出所需要的全等三角形．

例 1　如图 1－1，BE，CF 是 $\triangle ABC$ 的高线，点 P，Q 分别在 BE，CF 的延长线上，$BP=AC$，$CQ=AB$．求证：$AP\perp AQ$．

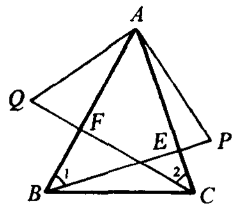


图 1－1

分析　要证明 $AP\perp AQ$，只要证明 $\angle QAP=90°$．由于 $\angle AFC=90°$，则 $\angle Q+\angle QAF=90°$，于是只要证明 $\angle Q=\angle BAP$．因此考虑能否在图中找出以 $\angle Q$，$\angle BAP$ 为对应角的全等三角形．

在 $\triangle QAC$ 和 $\triangle PAB$ 中，由 $BP=AC$，$CQ=AB$，$\angle 1=\angle 2$，

故　$\triangle QAC\cong\triangle PAB$．

（证明略）

例 2　如图 1－2，以 $\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 为边向三角形

外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$,CE 分别交 BG,AB 于 P,Q.

求证:$CE\perp GB$.

证明 在正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$ 中,

∵ $\angle BAE=\angle CAG=90°$,

∴ $\angle BAE+\angle BAC=\angle CAG+\angle BAC$,

即 $\angle CAE=\angle GAB$.

又 $AE=AB$,$AC=AG$,

∴ $\triangle EAC\cong\triangle BAG$.

∴ $\angle 1=\angle 2$.

∵ $\angle EQA=\angle BQP$,

∴ $\angle BPQ=\angle BAE=90°$,

∴ $CE\perp GB$.

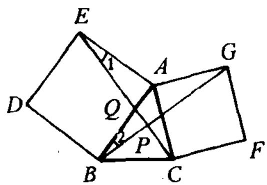


图 1-2

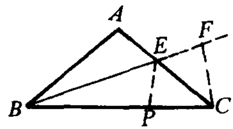


图 1-3

例 3 如图 1-3,$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle A=100°$,作$\angle B$的平分线交 AC 于 E.求证:$BC=AE+EB$.

分析 欲证 $BC=AE+EB$,一般有两种方法:一是把 BE 延长到 F,使 $EF=AE$,把问题转化为证 $BC=BF$;二是在 BC 上截取 BM,使 $BM=BE$,把问题转化为证 $CM=AE$.下面我们采用第一种方法证明,第二种方法同学们不妨自己试一试.

证明 延长 BE 到 F,使 $EF=AE$,连结 FC,则 $AE+EB=BF$.再在 BC 上截取 BP,使 $BP=BA$,连结 EP.

∵ BE 为$\angle ABC$ 的平分线，则$\angle ABE=\angle PBE$，

又 $AB=PB$，$BE=BE$，

∴ $\triangle ABE\cong\triangle PBE$，

∴ $AE=PE$.

又 $AE=EF$，

∴ $PE=FE$.

∵ $\angle A=100°$，$AB=AC$，

∴ $\angle ABC=\angle ACB=40°$，

∴ $\angle EBC=20°$，

由此可得 $\angle FEC=\angle AEB=\angle PEB=60°$，

∴ $\angle PEC=180°-(\angle PEB+\angle AEB)$

$=180°-120°$

$=60°$，

∴ $\angle FEC=\angle PEC$，

∴ $\triangle FEC\cong\triangle PEC$，

∴ $\angle FCE=\angle PCE=40°$，

∴ $\angle BCF=80°$.

∴ $\angle BFC=180°-(\angle FBC+\angle BCF)$

$=180°-(20°+80°)$

$=80°$，

∴ $\angle BCF=\angle BFC$，

∴ $BF=BC$（等角对等边），

∴ $BC=AE+EB$.

例 4 如图 1－4，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=\text{Rt}\angle$，$AB=AC$，$BD$ 是 AC 边上的中线，$AE\perp BD$ 于 E，AE 的延长线交 BC 于 F，连结 DF.

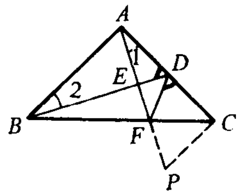


图 1－4

求证：$\angle ADB=\angle CDF$.

证明 过 C 作 AC 的垂线，交 AF 的延长线于 P.

在$\triangle ABD$中，由$\angle BAD=90°$，$AE\perp BD$，可得

$\angle 1=\angle 2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CAP$ 中，

$\angle BAD=\angle ACP=90°$，$\angle 2=\angle 1$，$AB=AC$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle ABD\cong \mathrm{Rt}\triangle CAP$，

$\therefore$ $\angle ADB=\angle P$.

又 $AD=CP$.

$\because$ BD 为 AC 的中线，即 $AD=CD$，

$\therefore$ $CP=CD$.

$\because$ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore$ $\angle ACB=45°$.

又 $\angle ACP=90°$，

则 $\angle PCF=45°$，

$\therefore$ $\angle PCF=\angle DCF$，

$\therefore$ $\triangle CFP\cong\triangle CFD$，

$\therefore$ $\angle P=\angle CDF$，

$\therefore$ $\angle ADB=\angle CDF$.

注意 以上两例都通过添线构造出新的全等三角形，从而得出证明中所需要的线段相等和角相等.

例 5 如图 1－5，在$\triangle ABC$中，D为 BC 中点，$AB=\frac{1}{2}BC$，E 为 BD 中点. 求证：$AC=2AE$.

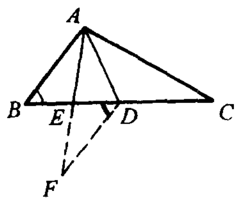


图 1－5

证明 延长 AE 到 F，

使 $EF=AE$，连结 DF.

$\because$ E 为 BD 中点，

$\therefore$ $BE=DE$，

而 $\angle AEB=\angle FED$，$AE=FE$，

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle FDE$.

$\therefore$ $AB=FD$， $\angle B=\angle FDE$.

$\because$ D 为 BC 中点，$AB=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore$ $AB=BD=DC$.

$\therefore$ $\angle BAD=\angle BDA$.

$\therefore$ $\angle BAD+\angle B=\angle BDA+\angle FDE$，

而 $\angle ADC=\angle B+\angle BAD$，

$\therefore$ $\angle ADF=\angle ADC$.

又 $FD=AB=BD=DC$，$AD=AD$，

$\therefore$ $\triangle ADF\cong\triangle ADC$，

$\therefore$ $AF=AC$，

$\therefore$ $AC=2AE$.

注意 证明一条线段是另一条线段的两倍，常用的方法有：(1) 加倍法. 作出较短线段的两倍的线段，然后证明它与较长线段相等；(2) 折半法. 作出较长线段一半的线段，证明它与较小的线段相等.

证明一个角是另一个角的两倍也可用类似的方法.

另外，延长三角形的中线，使延长部分等于原中线的长，是解决有关中线问题的常用方法.

例 6 求证：有两边及第三边上的中线对应相等的两个三角形全等.

已知：如图 1－6，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$AB=A'B'$，

$AC=A'C'$，AD 和 $A'D'$ 为 BC 和 $B'C'$ 上的中线，且 $AD=A'D'$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

证明 分别延长 $AD, A'D'$ 到 E, E'，使 $DE=AD, D'E'=A'D'$，连结 $BE, B'E'$.

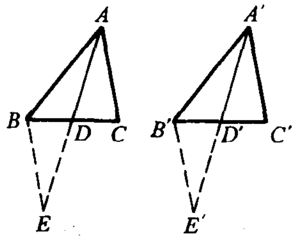


图 1－6

$\because$ AD 为中线，

则 $BD=CD$.

又 $\angle BDE=\angle CDA$，

$DE=AD$，

$\therefore$ $\triangle BDE \cong \triangle CDA$，

$\therefore$ $BE=AC$，

$\angle E=\angle CAD$.

同理 $\triangle B'D'E' \cong \triangle C'D'A'$，

$B'E'=A'C'$，$\angle E'=\angle C'A'D'$.

$\because$ $AC=A'C'$，

$\therefore$ $BE=B'E'$.

$\because$ $AD=A'D'$，

$\therefore$ $AE=A'E'$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle A'B'E'$ 中，

$AB=A'B'$，$BE=B'E'$，$AE=A'E'$，

$\therefore$ $\triangle ABE \cong \triangle A'B'E'$，

$\therefore$ $\angle E=\angle E'$，$\angle BAE=\angle B'A'E'$.

而 $\angle E=\angle CAD$，$\angle E'=\angle C'A'D'$，

$\therefore$ $\angle CAD=\angle C'A'D'$.

$\therefore$ $\angle BAD+\angle CAD=\angle B'A'D'+\angle C'A'D'$，

即 $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$AB=A'B'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$，$AC=A'C'$，

$\therefore \quad \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

例 7 如图 1－7，正方形 $ABCD$ 中，M 为 AB 边上任意一点，H 为 AB 延长线上的点．过 M 作 DM 的垂线，交 $\angle CBE$ 的平分线于 N．求证：$DM=MN$．

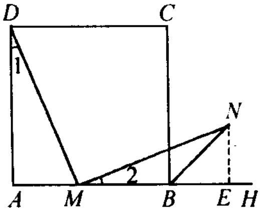


图 1－7

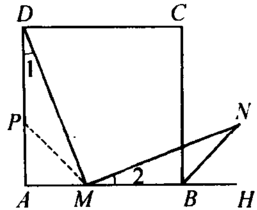


图 1－8

分析 由于图中没有现成的全等三角形，因此需要构造以 DM，MN 为对应边的全等三角形．因为 $\angle 1=\angle 2$，若作 $NE \perp MH$，记垂足为 E，应有 $\triangle AMD \cong \triangle ENM$．但由于这两个三角形难以找出其他边相等的条件来证明它们全等．所以需要另寻途径．利用 $\angle MBN=135°$ 的条件，我们可以在 AD 取一点 P（图 1－8），使 $\angle MPD=135°$，这只要在 AD 上截取 $AP=AM$，连结 MP．

$\because \quad AP=AM, AD=AB,$

$\therefore \quad DP=MB, \angle MPD=135°=\angle MBN,$

$\therefore \quad \triangle MPD \cong \triangle NBM,$

$\therefore \quad DM=MN.$

（证明略）

例 8 如图 1－9，四边形 $ABEF$，$FENM$，$MNCD$ 是三个边长相等的正方形，四边形 $ABCD$ 是矩形．求证：$\alpha+\beta=45°$．

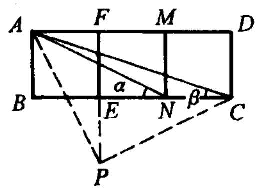


图 1－9

证明 作 $\angle BCP=\alpha$，CP 交

FE 的延长线于 P.

连结 AP，则$\angle ACP=\alpha+\beta$.

由四边形 $ABEF$，$FENM$，$MNCD$ 为三个边长相等的正方形，得 $CE=BN$，$\angle CEP=\angle ABN=\text{Rt}\angle$，

又 $\angle BCP=\angle ANB=\alpha$，

$\because$ $\text{Rt}\triangle CEP\cong\text{Rt}\triangle NBA$，

$\therefore$ $CP=AN$，$AB=PE$，则 $BN=FP$.

在 $\text{Rt}\triangle ABN$ 和 $\text{Rt}\triangle AFP$ 中，

$\angle ABN=\angle AFP=\text{Rt}\angle$，$AB=AF$，$BN=FP$，

$\therefore$ $\text{Rt}\triangle ABN\cong\text{Rt}\triangle AFP$，

于是 $AN=AP$，则 $AP=CP$，

$\angle APF=\alpha=\angle ECP$.

$\therefore$ $\angle APF+\angle CPE=90^\circ$，即$\angle CPA=90^\circ$，

$\therefore$ $\angle ACP=\angle PAC=45^\circ$，

即 $\alpha+\beta=45^\circ$.

（以后我们还可以利用相似三角形的知识来证明）

【练习】

1. 若两个三角形的两条边和其中一边上的高线长对应相等，那么这两个三角形中和第三边所对的两个角的关系是（　　）

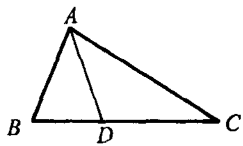
(A) 只能相等.

(B) 只能互余.

(C) 只能互补.

(D) 相等或互补.

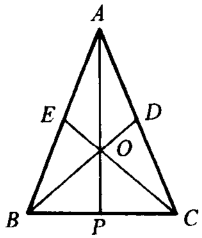
2. 如图，$\triangle ABC$ 中，AD 平分$\angle BAC$，$AB+BD=AC$，则$\angle B:\angle C$ 等于（　　）



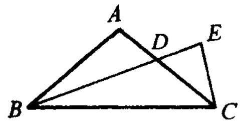
（第 2 题）

(A) 1∶1.　(B) 2∶1.　(C) 3∶1.　(D) 3∶2.

3. 如图，$AB=AC$，D，E 分别为 AC，AB 的中点，BD，CE 交于 O，AO 的延长线交 BC 于 P，则图中共有____对全等三角形.



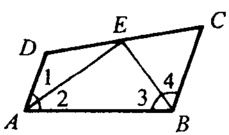
（第 3 题）



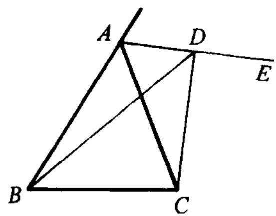
（第 4 题）

4. 如图，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle ABC=40°$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，延长 BD 至 E，使 $DE=AD$，则 $\angle ECA$ 的度数是____.

5. 如图，$AD /\!/ BC$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$. 直线 DC 过点 E 交 AD 于 D，交 BC 于 C. 求证：$AD+BC=AB$.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，$\triangle ABC$ 中，AE 是 $\angle A$ 的外角平分线，D 是这条平分线上任意一点. 试确定 $AB+AC$ 和 $DB+DC$ 之间的大小关系，并加以证明.