数学题解辞典

初等微积分

数学题解辞典

·初等微积分·

上海辞书出版社

(沪)新登字 110 号

封面设计：江小铎

数学题解辞典

(初等微积分)

唐秀颖　主编

上海辞书出版社出版

(上海陕西北路 457 号　邮政编码 200040)

上海辞书出版社发行所发行　　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 31.25　插页 5　字数 768000

1992 年 12 月第 1 版　1996 年 5 月第 4 次印刷

印数 15001—23000

ISBN 7-5326-0175-7/O·11

定价：30.70 元

数学题解辞典编辑委员会

顾　　问　赵宪初

主　　编　唐秀颖

副 主 编　鲍志新　夏明德

编辑委员　（按姓氏笔画为序）

陈振寰　邵　桢　*欧阳光中　顾鸿达

章景翰　*曾　容

主要编写人

欧阳光中　曾　容　康士凯

插　　图　朱恩源

责任编辑　杨泰俊　陈为众　陈少兰

注：有*号者为本书责任编委

前　言

随着科学文化事业的发展，广大中等学校数学教师热切希望有一部以题解为中心的、比较系统的、实用的工具书．鉴于建国四十余年来中学数学教学已经积累了比较丰富的实践经验，各种文献资料也提供了众多的题材，这就有可能在总结我国教学实践经验的基础上，广泛吸收各方面的精华，遵照原教育部《全日制六年制重点中学数学教学大纲(草案)》的精神，编纂一部比较符合我国国情、门类比较齐全、查阅比较方便的数学题解辞典．为此，我们邀集上海市部分富有教学经验的数学教师编写了这部工具书．

本辞典分代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何、初等微积分六卷．主要供中等学校数学教师教学、进修时使用，也可供数学爱好者及中等学校学生参考．

编纂本辞典时，力求贯彻下列要求：

1．重视提高解题的分析能力．释文着重分析解题思路，揭示解题规律，使读者不仅得到简明而准确的解答，而且学会思考问题的方法．

2．注重题材的广泛性和代表性．选题时，注意筛选收录中外各类数学题解辞典和各种参考资料中富有启发性的题目，我国高等学校历届入学考试和国内外各种数学竞赛中有代表性的试题，以及中学数学范围内传统的著名题，特别是在教学实践中有助于固巩数学概念、富于思考性的自编题．此外，还酌收少量一

般教材中常见的典型题.

3．注意题材归类，以典型带一般． 题目编排分类清楚，条理分明，各类题目选好典型，加以分析说明，使读者举一反三，触类旁通.

由于我们水平有限，虽经努力，但上述编纂要求未必都能达到，选材和释文也可能有疏漏和不当之处，热诚地欢迎读者批评指正.

数学题解辞典编辑委员会

1990 年 9 月

凡　例

1．本书分极限、函数的连续性、导数与微分、不定积分、定积分及其应用、级数、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、常微分方程九章，共收录各类初等微积分题目一千五百余道．正文后附录微积分简史和汉英对照微积分名词．

2．题目按学科知识体系的章节分类分组编排．正文前刊有按类组形式编制的详细目录．

3．在各章开头用双线相隔的部分，是解题或证题所需要的定理、法则、公式等知识提要，按序列出，作为解题的依据．

4．题目解答一般是一题一解，部分题目有其他较好解法的，则一题多解，分别列出．本书中已收录题目的结论，在其他题目中应用时，一般不再重复，只注明“参见第×××题”．

5．对典型题或较复杂的题目，以[分析]的形式提示解题的关键和思路的分析；另以[说明]的形式标明有关解题规律的总结和题目意义的推广．在典型题后还配置若干相关的题目，以收触类旁通之效．

6．本书插图一百六十余幅，分别附于有关题目下面；同一题中有一幅以上者，分别注明图1、图2……．

目　　录

第一章　极　　限

第二章　函数的连续性

第三章　导数与微分

第四章 不定积分

第五章　定积分及其应用

第六章　级　　数

第七章　多元函数微分学及其应用

第八章 重积分、曲线积分和曲面积分

第九章　常微分方程

附录

第一章　极　　限

1．数列的极限

对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$．则称数列 $\{a_n\}$ 收敛，收敛于 a，或称 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限．记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$．特别若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则称 $\{a_n\}$ 是无穷小量．

2．数列收敛的判别法

(1) 追敛性　若存在 N，当 $n>N$ 时，有 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$，并且

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty} c_n=a,\quad \text{则}\quad \lim_{n\to\infty} a_n=a.$$

(2) 单调有界数列　单调有界数列必收敛．

3．数列极限的柯西准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，对一切自然数 p 有 $|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon$．

4．收敛数列的性质

(1) 唯一性　若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它的极限是唯一的．

(2) 有界性　若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 有界，即存在正数 M，对任意自然数 n 有 $|a_n|<M$．

(3) 不等式　若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$，且 $a>b$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $a_n>b_n$．

(4) 施笃兹定理　若数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 满足：

(i) 存在 N，当 $n>N$ 时，有 $b_{n+1}>b_n$，

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$($l$ 有限或无限)则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

5. 数列极限的运算法则

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad (\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0)$.

6. 函数在 $x=x_0$ 点的极限.

对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处收敛于 A, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

7. 函数在 $x=x_0$ 点的单侧极限

对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<x-x_0<\delta$(或 $0<x_0-x<\delta$) 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处存在右(左)极限，其右(左)极限为 A, 记作

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)=A \quad (\text{或} \lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)=A).$$

8. 在 $x=x_0$ 点函数极限的柯西准则

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处收敛的充要条件是：对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对属定义域的 x'、x'', 当满足 $0<|x'-x_0|<\delta$ 和 $0<|x''-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

9. 函数极限的性质

(1) 唯一性 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点存在极限，则它的极限

是唯一的.

(2) 局部有界性 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, 则存在某个 $\delta_0>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时,有 $|f(x)|<M$, 其中 M 是正数.

10. 函数极限的运算法则

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\quad(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0)$.

11. 函数极限和数列极限的关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在的充分必要条件是:对任意数列 $\{x_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0,\ x_n\neq x_0,\quad 有\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

12. 无穷大量

(1) 数列的无穷大 对任给 $M>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时,有 $|a_n|>M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为无穷大量,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

(2) 函数的无穷大 对任给 $M>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点趋无穷大, 记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

13. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

14. 无穷小量(无穷大量)的阶

设 $x\to 0,\ y\to 0$,

(1) 若 $\frac{y}{x}\to 0$, 则称 y 是关于 x 的高阶无穷小量.

(2) 若存在常数 $c_1>0,\ c_2>0$, 使 $c_1\leqslant\left|\frac{y}{x}\right|\leqslant c_2$, 则称 $x,\ y$ 是同阶无穷小量. 特别,若 $\frac{y}{x}\to a\neq 0$, 则 $x,\ y$ 是同阶无穷小量. 当 $a=1$ 时,则称 $x,\ y$ 是等价无穷小量. 记作 $x\sim y$.

(3) 若 $\frac{y}{x^\alpha}\to a,\ a\neq 0$ 且 $\alpha>0$, 则称 y 是关于 x 的 α 阶无穷小量.

对无穷大量,有完全类似的定义.

§1. 数列的极限

(1) 数列极限的概念

1. 对于数列 $\{a_n\}$ 与常数 A, 下列各种说法是否正确,试说明之. (1) 若 a_n 越来越接近 A; (2) $|a_n-A|$ 越来越小; (3) 若 $|a_n-A|$ 越来越接近零,则 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

[解] 以上三种说法都不正确. 例如

(1) 当 $a_n=\frac{1}{n},\ A=-1$ 时;

(2) 当 $a_n=-\frac{1}{n},\ A=1$ 时;

(3) 当 $a_n=\frac{n+100}{100n},\ A=0$ 时;

分别符合所说的情况,但 A 不是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

2. 以下几种叙述与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的定义是否等价,试说明之:

(1) 对任给 $\varepsilon>0$, 总存在自然数 N, 当 $n\geqslant N$ 时, 有

$$|a_n-a|\leqslant\varepsilon;$$

(2) 对任给 $\varepsilon>0$，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2};$$

(3) 对任给自然数 K，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n-a|<\frac{1}{K};$$

(4) 对无限多个 $\varepsilon>0$ 中的每一个 ε 都存在 N，当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

(5) 对任给 $\varepsilon>0$，总存在实数 A，当 $n>A$ 时，有

$$|a_n-a|<\varepsilon;$$

(6) 对任给 $\varepsilon>0$，总存在无限多项 a_n，有 $|a_n-a|<\varepsilon$；

(7) 对任给 $\varepsilon>0$，只有有限项 a_n 位于 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外.

[解] (1) 等价. 由于 ε 的任意性和 N 的不唯一性，所以等价.

(2) 等价. 由于 ε 的任意性，所以等价.

(3) 等价. 由于 K 的任意性，可使 $\frac{1}{K}$ 为任意小的正数，所以等价.

(4) 不等价. 无限多个 $\varepsilon>0$，可以取无限多个大于 1 的 ε，不含任意小的意思，故无限多个 $\varepsilon>0$ 并不等价任意的 $\varepsilon>0$.

(5) 等价. 因实数 A 的存在确保 N 的存在，所以等价.

(6) 不等价. 无限多项 a_n 不等价于 N 以后一切项(即 $n>N$) 的说法.

(7) 等价. 此说明某一项以后的一切项在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内，即等价于 $n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

3. 设数列 $x_n=\dfrac{n}{2n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$，

(1) 求项数 N，使得 $n>N$ 时，$\left|x_n-\frac{1}{2}\right|$ 小于 0.1、0.01、0.001；

(2) 这样的项数 N 唯一吗？

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.