科學圖書大庫

單變數與多變數函數

譯者　趙文敏

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

單變數與多變數函數

譯者　趙文敏

徐氏基金會出版

我們的工作目標

文明的進步，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，允爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員王洪鎧氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尚在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會即擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；

旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；

大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尚祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

徐氏基金會　敬啓

中華民國六十四年九月

原　序

本書（共三册）是從 Videregaende Matematik 改訂增補的，其第一版發行於 1960 年，本書著作原是爲化學家，生物化學家和醫師的基本研究而寫的。

原先本書特別的目的是爲將在物理化學及生物物理學方面，作更深一層的硏究與探討者，提供必要的數學知識。事實上，因本書也可以用於其他方面，因此現在增加一些資料後，相信其用途將更爲廣泛。

爲科學家在數學方面編寫一本書，一方面要在嚴密與基本知識之間找出一相當的均衡，另一方面要立即闡述其可用性。爲達此目的，我們計劃採取下列的步驟：全書中將十分正確地以公式表示已獲得的結果——即使其證明省略。然而，此方法有些改變：即在本書開始時，吾人使用較嚴密的數學公式，在後半部裡，若在許多物理和化學的教科書中已十分普遍的公式，則以較不嚴謹的公式表示之。

第一册包含向量、張量和群，若沒有微積分的知識亦可讀之。由我們的經驗知：若每週授課兩小時，則第一册能在一學期內授畢，第二册爲多（實）變量函數論，在此册中時常用到向量的概念，而且在第四章的後半部用到矩陣及張量的概念。若每週上四小時，則一學期即可上完第一册及第三册的一部分，這樣即可奠定微積分的基本知識。第三册包含高等微積分方面的教材：級數、微分方程、複數函數和數值計算法，本册與其他兩册所述的特殊公式無多大關係，但需要有關矩陣的特徵值及多變量函數的知識。若每週講授四小時，則一學年可研讀第 1.3.4.5 章及第 6.8 章的一部分。

對於附有星號（*）之習題則給予解答。本書也包含許多實例，這些例子構成本書一重要部分，記號□表示例題做完而主要課文又開始，在每一册後面，列舉一些參考書，讀者在研讀該部分時可同時讀那些書或讀完該册後再讀之，將有莫大的助益。

感謝 Brian Phillips 和 Peeter Kruus 兩位博士翻譯此書的一大部分，及 H. Rosenberg 教授對原稿的許多指正與勸告，本書若有錯誤或費

解處，不應該責難他們，又 Barbara Zeiders 對原稿有價值的建議及無限的辛勞，Lise Seifert 女士打首稿，及 Emmy Christiansen 小姐打最後的抄本，在此一一誌謝！

Thor A. Bak
Jonas Lichtenberg
於丹麥哥本哈根

目　　錄

3 單變數函數

3－1 單實變數之實值函數

函數之概念

下面吾人將攷慮者係所謂單實變數之實數函數（real-valued function of one real variable）。在正式加以討論之前，吾人擬將一般之**函數概念**略作說明。

設 A 與 B 爲任意之已知集合，若對於 A 之每一元素 B 必有一且僅有一元素與之對應，則吾人稱此對應爲**由 A 映至 B 之一函數或由 A 至 B 之一映像**。若 x 爲 A 之一元素，則於 B 中 x 之對應元素以 $f(x)$ 表之，而稱爲函數 f 在**自變數**（argument）x 處之**值**或稱爲 x 依函數 f 之**像**。

集合 A 稱爲函數之**定義域**。而 B 之元素中係 A 之某元素之像者所成之集合稱爲函數之值域。值域可能爲 B 亦可能不等於 B；若 f 之值域爲 B，則稱 f 爲由 A **映成** B 之函數。若 f 之值域中每一元素恰爲 A 之一元素之像，則 f 稱爲**一對一**函數。（圖 3－1）。

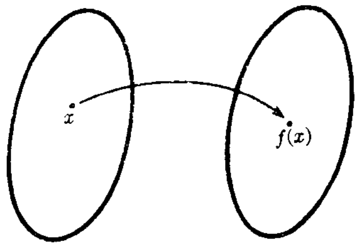

圖 3-1

設f爲由A映成B之一個一對一函數，則可定義一個由B映至A之新函數f^{-1},稱爲f之**反函數**，如下：對於B中任一元素y，像$f^{-1}(y)$爲A之唯一確定元素使$f(f^{-1}(y))=y$。亦即$f^{-1}(y)$爲A之一元素，此元素依函數f之像爲y。依此立即可得，對於A之任意元素x，恆有：$f^{-1}(f(x))=x$。

在第一册書中吾人已攷慮過一種重要之函數，即由N維向量所成之集合映至此集合本身之綫性向量函數。吾人已知若此向量函數之定義矩陣（ defining matrix ）之行列式不爲零，則此綫性向量函數有一反函數。

實値函數（ real functions ）

下列各節中吾人將攷慮**單實變數之實値函數**（ real valued function of one real variable ），或簡稱爲**實函數**，此種函數即由集合A映至集合B者，其中A與B皆爲由實數所成之集合。

設f爲一實函數，則對於定義域內任一元素x，其像通常記爲y。依此吾人得$y=f(x)$。只要作爲x之像的$f(x)$是一個明顯之表式（ expression ）（而集合A與B又由上下文可看出）則函數f即可由方程式$y=f(x)$完全地決定：將A之任何元素代入方程式之右端即可得出其在B中之對應元素。此處之x通常稱爲**自變數**（ independent variable ）而y稱爲**因變數**（ dependent variable ），y稱爲x之一函數。

所謂函數f有一反函數，此敍述與下一敍述同義：對於B中任意元素y，方程式$y=f(x)$恰有一屬於A之解。如前所述，此解記爲$f^{-1}(y)$。因此，此反函數可以方程式$x=f^{-1}(y)$表之，此時y爲自變數而x爲因變數。

於XY坐標系（通常取右旋坐標）中，函數f之**圖形**就是坐標爲(x,y)之點所成之集合，其中x屬於A而$y=f(x)$。若f之反函數存在，只要吾人以方程式$x=f^{-1}(y)$表示此反函數，則上述之點集合亦可視爲此反函數之圖形。

倘若吾人堅持以x表示自變數（而y表示因變數），則f之反函數應以方程式$y=f^{-1}(x)$表示，在此種情形下，f^{-1}之圖形是f之圖形對直綫$y=x$之反射像，亦即二圖形對直綫$y=x$成對稱。

已知二實函數f與g，若f與g之定義域A相同則可定義數個新函數如下：f與g之**和**，$f+g$，爲一函數，其定義域爲A而對於A之任意元素x，其像爲$f(x)+g(x)$。仿此二者之**差**，$f-g$，二者之**積**，而——只要g之值域不包含零，——則二者之**商**f/g，等皆可定義。

最後，若g之値域包含於f之定義域中，則又可定義另一新函數如下：

二函數 g 與 f 之**合成函數**定義爲一函數，其定義域與 g 之定義域相同而且對於定義域之任意元素 x ，其像爲 $f(g(x))$。g 與 f 之合成函數以 $f\circ g$ 表之。

在前面之討論中，吾人係以字母 f 來表示函數本身，而 $f(x)$ 係用來表示該函數之值。不過這只是個原則，在實用方面不妨從權。也就是說，吾人可以使用形如"函數 $y=f(x)$"之語句甚至使用"函數 $f(x)$"。並且當吾人使用此種形式之語句時，該函數之定義域——如無特別聲明——視爲表式 $f(x)$ 有意義之所有實數所成之集合。此後吾人也將經常使用" $y=f(x)$ "之寫法，此式讀爲" y 是 x 之一函數"；其意當然是說明吾人所攷慮者爲某一函數 f ，其中自變數爲 x 而因變數爲 y 。

依照上述之約定，吾人可將和函數及合成函數之定義重述如下：兩函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 之和定義爲函數 $y=f(x)+g(x)$；兩函數 $u=g(x)$ 與 $y=f(u)$ 之合成函數爲函數 $y=f(g(x))$。

例 3-1　試攷慮由所有實數所成之集合映至所有實數所成之集合之一函數 f ，此函數在任意實數 x 之函數值爲 $f(x)=2x-3$。依上述之約定，此函數可簡稱爲函數 $y=2x-3$ ，而 $-\infty<x<\infty$ ，或是更簡略地寫成 $y=2x-3$，依上述之聲明吾人了解此函數之定義域爲所有實數所成之集合。依下圖所示，此函數之圖形爲一直綫。

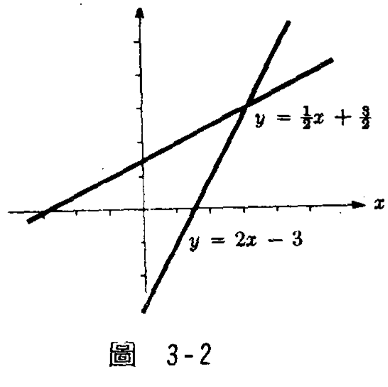

圖　3-2

將上式之 x 解出，則可看出此函數有一反函數，此反函數定義於所有實數 y ，對於每一 y 值恰有一解 $x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$ 與之對應。此即反函數之表式。（參看圖 3－2）。

以 $x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$ 表示反函數，則圖形不變。但若吾人將自變數與因變數

之名稱調換，即以表式 $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 表示反函數，則此反函數之圖形就變成原函數圖形對直綫 $y=x$ 之反射像。

此處函數 $f\cdot f$ 係表示函數 $y=(2x-3)^2=4x^2-12x+9$，而函數 $f\circ f$ 爲 $y=2(2x-3)-3$ 或 $y=4x-9$ □

數列（sequence）

無窮數列之概念在多數有關函數之問題的討論上，是一個很重要之工具。

所謂一（**無窮**）**序列**乃是定義域爲所有正整數所成之集合之一函數。若一序列記爲 a，則 a 在 n 之値通常記爲 a_n 而稱爲此序列之**第 n 元素**（the nth element）。此序列本身通常記爲 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$。

以下吾人將討論由實數所成之數列，卽各項元素爲實數之數列。對於實數所成之數列，若下一敍述爲眞則此種數列 a 稱爲**收斂數列**且**極限**爲 α，或稱 a **收斂**於 α：對於任意之已知正數 ϵ，不論其值多麼小，吾人可決定一正數 N，使得所有 $n>N$ 之正整數 n 皆滿足 $|a_n-\alpha|<\epsilon$。此敍述以：當 $n\to\infty$，則 $a_n\to\alpha$ 表之。〔當 n 趨近（正）無限大時，a_n 趨近於 α〕或記爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$〔當 n 趨近（正）無限大時，a_n 之極限爲 α〕。

例 3-2　設 $a_n=k$，則當 $n\to\infty$ 時，$a_n\to k$。因爲對於每一正整數 n，恒有 $|k-k|<\epsilon$，不論 ϵ 之值爲何皆成立。設 $b_n=\frac{1}{n}$，則當 $n\to\infty$ 時，$b_n\to 0$。因爲對於 $n>\frac{1}{\epsilon}$ 之每一正整數 n，$|\frac{1}{n}-0|<\epsilon$ 皆成立。又 $a_n=(-1)^n$ 沒有極限。 □

若數列 a 沒有極限，則稱 a 爲**發散數列**或 a **發散**。若發散數列合於下述條件，則特稱爲發散於（正）無限大（負無限大）：對於任意之已知正數 K，不論其值多麼大，吾人可決定一正數 N，使得所有 $n>N$ 之正整數 n 皆滿足 $a_n>K$（$a_n<-K$）。此敍述記爲：當 $n\to\infty$ 時，$a_n\to\infty$（$-\infty$）。

例 3-3　設 $a_n=\sqrt{n}$，當 $n\to\infty$ 時，$a_n\to\infty$。因爲對於 $n>K^2$ 之每一正整數 n，$\sqrt{n}>K$ 皆成立。設 $b_n=n^2-2n$，則當 $n\to\infty$ 時，$b_n\to\infty$。因爲對於 $n>1+\sqrt{1+K}$ 之每一正整數 n，$(n^2-2n)>K$ 皆成立。設 $C_n=n(-1)^n$，則 c 爲一發散數列，但既非趨近正無限大亦非趨近負無限大 □

已予二數列 a 與 b，吾人可將二者結合而得新數列 $a+b$，$a-b$，$a\cdot b$；

與 $\frac{a}{b}$ 。當然，在最後一式 $\frac{a}{b}$ 中必須假定零不屬於 b 之值域。若 a 與 b 二者皆爲收斂數列且極限分別爲 α 與 β，則上述四新數列亦皆收斂，其極限分別爲 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，$\alpha\cdot\beta$，及 $\frac{\alpha}{\beta}$，當然後者須有 β 不等於零之條件限制。至於上述有關收斂數列之基本**運算規則**之證明只要根據收斂之定義立卽可得。

依前段所述，若有數個已知之收斂數列，而將各數列之第 n 元素施行一連串之數學運算時，此等運算可"移至"對應之極限：由已知數列之第 n 元素施行運算所得之新數列必爲收斂數列，其極限就是將各對應之極限施行同樣之運算所得之結果（當然其中必須有分母不爲零之限制）。

例 3-4

$$a_n=\frac{5n^2+1}{n^2-n}=\frac{5+(1/n)(1/n)}{1-(1/n)}\to\frac{5+0.0}{1-0}=5\quad（當 n\to\infty）\quad\square$$

函數之極限（Limits of functions）

在本節以後，吾人把"數 x"與"點 x"二式視爲同義，混合使用。所謂**點 Xo 之 δ－近傍**（δ-neighborhood of the point x_0）吾人意指由滿足 $|x-x_0|<\delta$ 之所有實數 x 所成之集合。而所謂**點 Xo 之去心 δ－近傍**（deleted δ-neighborhood of x_0）則是由滿足 $0<|x-x_0|<\delta$ 之所有實數 x 所成之集合。

今設 f 爲一函數，此函數定義於點 x_0 之一個**去心** δ－近傍，但 f 在 x_0 不必有意義（卽 x_0 可以不屬於 f 之定義域）。若下述條件成立，則稱 f 在 x_0 有**極限**（limit）c：對於 f 之定義域中之點所成之每一數列 x_1、x_2，…，x_n，…，其中各元素皆異於 x_0，恆有：只要此數列收斂於 x_0，則 f 函數值所成之對應數列必收斂於 c。若 f 在 x_0 有極限 c，則吾人記爲：當 $x\to x_0$ 時，$f(x)\to c$。〔當 x 趨近 x_0 時，$f(x)$ 趨近於 c〕或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$。〔當 x 趨近於 x_0 時，$f(x)$ 之極限爲 c〕。

假定吾人將前述之數列限定爲自右收斂於 x_0（$x_n>x_0$）而對應之 f 函數值所成之數列皆收斂於 c，則自然地，吾人稱此函數 f 在 x_0 有**右極限**（right-hand limit）c。〔當 $x\to x_0+0$ 時 $f(x)\to c$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=c$〕。仿上述之情形，吾人可定義"函數 f 在 x_0 有左極限"一敍述之意義〔當 $x\to x_0-0$

時 $f(x)\to c$ 〕。

若函數 f 在 x_0 有極限，則此函數在 x_0 當然有右極限亦有左極限。但此敍述之逆敍述不成立，因一函數在某點之兩個單側極限（one-sided limit）可能不同。

關於函數之極限，吾人所述之“動態”定義與下述之“靜態”定義意義相同，但後者却未曾使用數列之概念：若對於任意之已知正數 ϵ，不論其值多麼小，吾人皆可決定一個正數 δ，使得 x_0 之去心 δ- 近傍內之每一 x，所對應之 $f(x)$ 皆屬於 c 之 ϵ- 近傍，則吾人稱 f 在 x_0 有極限 c。（即當 $x\to x_0$ 時 $f(x)\to c$ ）。

前面所提有關收斂數列之四個基本規則可用以導出有關函數極限之四個對應規則，導出方法頗為簡單。吾人將細節略去而此處只將四個基本規則說明如下。假設吾人已知當 $x\to x_0$ 時 $f(x)\to c$ 而且當 $x\to x_0$ 時 $g(x)\to d$。則可證明當 $x\to x_0$ 時 $f(x)\pm g(x)\to c\pm d$，$f(x)\,g(x)\to c\cdot d$，而且（只要 $d\neq 0$）$f(x)/g(x)\to c/d$。由上述可知，若已予數個函數在 x_0 皆有極限，將這些函數作一串之初等數學運算後所得之函數在 x_0 亦有極限，後一極限之求法是將各已知函數之極限作對應之數學運算所得之數（當然須假定分母皆不為零）

至於其他如：當 $x\to x_0$ 時 $f(x)\to\infty$（$-\infty$），當 $x\to\infty$（$-\infty$）時 $f(x)\to c$，當 $x\to\infty$（$-\infty$）時 $f(x)\to\infty$（$-\infty$）等敍述，皆可仿照上述之“動態”或“靜態”之形式予以定義。

函數之連續（Continuity of functions）

設 f 為定義於點 x_0 之一近傍之一函數。若 f 在 x_0 有極限且此極限值為 $f(x_0)$，即當 $x\to x_0$ 時 $f(x)\to f(x_0)$，則稱 f 在 x_0 點連續（continuous）。仿前述，若當 $x\to x_0+0$（$x\to x_0-0$）時 $f(x)\to f(x_0)$，則稱 f 在 x_0 點右（左）連續。

根據函數之極限的四個基本規則立即可知：若已知數個函數皆在 x_0 點連續，則將這些函數作一連串可行之初等數學運算所得之函數亦在 x_0 點連續。

若函數 f 在某區間之每一點皆連續，則簡稱為 f 在整個區間連續。此敍述以圖形加以解說則是：此函數在該區間上之圖形沒有“斷裂”之情形。

往後，以 a 及 b 為**端點**之**閉區間**（closed interval），即滿足 $a\leq x\leq b$ 之所有實數 x 所成之集合，以〔a，b〕表之。對應之**開區間**（open interval）則以〕a，b〔表之。所謂開區間，即不包含其端點者。