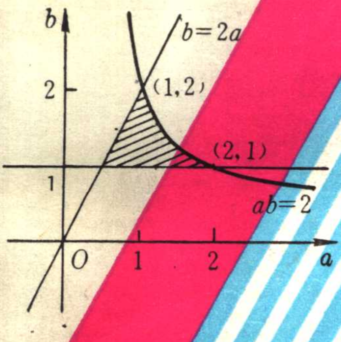
怎样学好数学

数学学习与思考

（高中版）



上海教育出版社

怎样学好数学

数学学习与思考

（高中版）

复旦附中 曾容
杨浦区教育学院 严华祥 编著

上海教育出版社

怎样学好数学

数学学习与思考

（高 中 版）

复 旦 附 中 曾 容
杨浦区教育学院 严华祥 编著

上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）

各地新华书店经销 上海崇明印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 8.5 字数 186,000

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数 1— 2,000本

ISBN 7-5320-1452-5/G·1421 定价：2.40元

前　言

中学数学在加强了函数，加进了解析几何以后，突出了变量的思想，引入了分析的要素．对象与数，自变量与因变量，点与有序数对，方程与曲线都处于某种对应之中，映射（函数）的思想更普遍地渗透在各个方面．这使人们可以用映射的思想看待和处理实际问题或者构造数学模型，从变换的角度看待解方程，用曲线去研究方程和函数，还可以用方程来定义函数，用有限的形式表达无限的思想，用有限的方法解决无限的问题，等等．中学数学就不再仅仅是数与式的运算，相等和不等以及干瘪的形式逻辑，而是充满生动活泼的辩证思维：直觉与逻辑，分析与推理，个性与共性，有限与无限．

这本小书以函数与方程为主体，综合代数、三角、几何的内容，希望就中学数学的主要方面，讨论它的数学思想和数学方法．求得在数学学习中引起深入的思考，发展能力，提高思维素质．

学习数学当然要解题．依赖直觉，进入联想，类比，分析，归纳，提出猜想，然后是严密的逻辑论证，检验和发展猜想……这是解题中思维发展的规律，也是数学发展的基础之一．

解题，作为第一个层次的要求是已知条件和结论的“数量化”，接着分析、推理把两者接通，即“就事论事”．作为第二个层次的要求是应该问一问，这个题说明的“是什么？”即本质在哪里，思想和方法的要点是什么？第三个层次的要求是“还有什么？”，与以前知道的有什么类似和相通之处（不是表面的，

表面上可能是很不类似，很不相通的），可以作什么样的改变，引伸和推广，即由个别发展为一般，由经验达到预知.

为此，本书不仅在例题的组织上侧重于内在的联系，而且在例题的[注]里，或者说明例题的思想，或者提出可以类比扩展的思路，或者强调思维的特性，而所附的练习也是为了达到这个目的.

正因为如此，加之题目都是综合性的，例题与习题不能有一个通常的分类，而只能按函数与方程概念的展开进行安排，按解决它们时表现的思想和方法的侧重面或者表现的思维特点来安排.

本书是《怎样学好数学》丛书的最后一本，综合性较强，希望对分科讨论时知识与技能存在的缺陷有所弥补. 因此，该书是对中学数学知识和技能的总检查和总运用. 所选的题目其表现的解题思想方法和技巧的层次要求是比较高的，希望对高中毕业总复习或数学竞赛初级训练能提供有益的资料.

由于水平有限，愿望与所做的工作可能相距甚远，甚至会有错误，敬请读者指正.

作者

1988. 12.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章 数与集合

提要：集合是数学中最基本的概念之一．对于集合，不能给它下一个简单的定义，在中学阶段，只能通过描述，来说明它的特征（一个能完全确定的对象的全体，其元素是互异的）．集合概念可作为一切数学问题讨论的起点，它渗透于数学的所有的学科和领域．

数集是特殊的集合，它具有丰富的性质，其中最为突出的是它的元素之间定义了运算．

式也有它特定的意义，用字母表示数后，把数的一些运算法则施行于字母，对数的运算性质和法则给予高度的概括和抽象，因此，式比数更具有普遍意义．

数与形的结合，使数表示的意义形象、直观了；数的运算给形的研究带来了有效的计算工具，给形的问题以数量上的刻划，使之代数化了．

一 集 合

例 1 写出适合方程 $\sin 2x=\cos x$ 的 x 的集合（用解的形式表示）．

解一 令 $A=\{x|\sin 2x=\cos x\}$．

由 $\sin 2x=\cos x$，得 $2\sin x\cos x=\cos x$，

即
$$\cos x(2\sin x-1)=0.$$

由 $\cos x=0$, 得 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}\quad(n\in Z)$;

由 $2\sin x-1=0$, 得 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\quad(n\in Z)$.

$\therefore$ 适合方程 $\sin 2x=\cos x$ 的 x 的集合是

$$A_1=\left\{n\pi+\frac{\pi}{2}\,|\,n\in Z\right\}\cup\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}\,|\,n\in Z\right\}.$$

解二 由 $\sin 2x=\cos x$, 得 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos x$.

$$2x-\frac{\pi}{2}=2k\pi\pm x,$$

$$\therefore\quad x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad 或者\quad x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\quad(k\in Z).$$

$\therefore$ 适合方程 $\sin 2x=\cos x$ 的 x 的集合是:

$$A_2=\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\,|\,k\in Z\right\}.$$

这里就产生了一个问题，求方程的解集 A, 用不同方法得到了两个形式 A_1 和 A_2, 它们是否都是集合 A 呢? 即有 $A=A_1=A_2$ 吗?

$A=A_1$ 是方程 $\sin 2x=\cos x$ 与 $\cos x(2\sin x-1)=0$ 的同解性问题, 易见它们是同解的; 至于 $A_1=A_2$ 是集合相等的问题, 是一个集合的表示形式与内容的问题.

显然, $\left\{2k\pi+\frac{\pi}{2}\,|\,k\in Z\right\}\subset\left\{n\pi+\frac{\pi}{2}\,|\,n\in Z\right\}\subset A_1$,

$k=3l\ (l\in Z)$ 时, $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=2l\pi+\frac{\pi}{6}\in A_1$;

$k=3l+1(l\in Z)$ 时, $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=(2l+1)\pi-\frac{\pi}{6}\in A_1$;

$k=3l+2(l\in Z)$ 时, $\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=(2l+1)\pi+\frac{\pi}{2}\in A_1$.

$$\therefore\quad A_2\subseteq A_1.$$

反之，A_1 的元素也只有上述四种表示，因而都可表示为 A_2 元素的两种形式，即 $A_1 \subseteq A_2$.

$$\therefore \quad A_1 = A_2.$$

[注] 这里从集合相等的角度看到，解三角方程时，解法不同，解集的表示形式可以不同，但只要遵循解方程的一般原理(注意到增根与失根)，解集实际上是相同的.

以上证明解集的相等，利用了集合的元素的表示形式，其实质是下面四个方程

$$n\pi + \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad ①$$

$$n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \qquad ②$$

$$n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad ③$$

$$n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}. \qquad ④$$

对每个 $k \in Z$; ① 和 ③; 同时 ② 和 ④ 都至少有一个方程有解 $n \in Z$; 反之，对每个 $n \in Z$, ① 和 ②; 同时 ③ 和 ④ 都至少有一个方程有解 $k \in Z$.

与本例类似，求 x 的方程

$$\frac{a}{x-2} + x + \frac{x}{2-x} = 0$$

有正整数解时 a 的取值集合.

解一 原方程变形为 $\dfrac{x^2-3x+a}{x-2} = 0$.

当方程 $x^2-3x+a=0$ 有解 $x=2$ 时，$a=2$, 此时原方程还有正整数根 $x=1$. 因而允许 $a=2$.

方程 $x^2-3x+a=0$ 的解是 $x = \dfrac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{9-4a}\right)$. 要使这

两个根至少一个为正整数，必须且只须 $9-4a=(2n-1)^2(n\in Z)$，即 $4a=9-(2n-1)^2$.

$$\therefore\quad a=-(n^2-n-2)\quad (n\in Z).$$

解二 由方程 $x^2-3x+a=0$ 有正整数根 $k\in N$，且即使 $k=2$ 时，决定的 $a=2$，原方程仍有不为 2 的正整数根 1，那么

$$a=3k-k^2\quad (k\in N).$$

这里有两个集合

$$A_1=\{a\,|\,a=2+n-n^2,\ n\in Z\},$$

和

$$A_2=\{a\,|\,a=3k-k^2,\ k\in N\},$$

它们是相等的，请读者自己证明.

例 2 写出方程 $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x=\mathrm{tg}\,3x$ 的解集（用解的形式表示）.

解 由 $\mathrm{tg}\,3x=\dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,2x}$ 得方程的变形：

$$(\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x)\left(1-\frac{1}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,2x}\right)=0.$$

由 $\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,2x=0$ 得 $\mathrm{tg}\,2x=\mathrm{tg}(-x)$.

$$\therefore\quad 2x=k\pi-x,\ x=\frac{k\pi}{3}\quad (k\in Z).$$

由 $1-\dfrac{1}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,2x}=0$ 得 $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,2x=0$.

此处，由 $\mathrm{tg}\,x=0$ 得 $x=k\pi\quad(k\in Z)$；

由 $\mathrm{tg}\,2x=0$ 得 $x=\dfrac{k\pi}{2}\quad(k\in Z)$.

$\therefore$ 原方程的解集是 $\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k\pi}{3},\ k\in Z\right\}$.

[注] 三角方程的解一般有无数个，常常分成几种表示形式. 这个例子对解集的处理有两方面：一是对增根，方程

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$\operatorname{tg} 2x=0$ 的解有一部分$\left(x=\dfrac{2l+1}{2}\pi\right)$使 $\operatorname{tg} x=0$ 失去意义，另一部分$(x=l\pi)$是 $\operatorname{tg} x=0$ 的解，故 $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x=0$ 的解集就是 $\operatorname{tg} x=0$ 的解集. 另一个是子集处理，$\operatorname{tg} x=0$ 的解集是 $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=0$ 的解集的真子集，因而被“吸收”了. 下面是一个不能被“吸收”的例子.

写出方程 $8\sin^2 x\cos x-4\sin x\cos x=2\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}$ 的解集.

由原方程整理，得 $(2\sin x-1)(4\sin x\cos x-\sqrt{3})=0$. 解集为

$$\left\{x \mid x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in Z\right\}$$
$$\cup\left\{x \mid x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in Z\right\}.$$

这里
$$\left\{x \mid x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in Z\right\}$$
$$\cap\left\{x \mid x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in Z\right\}$$
$$\neq\left\{x \mid x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n\in Z\right\}.$$

$\therefore$ 两个集合的交既不空，却又彼此不包含. 故不能被“吸收”.

例 3 已知 $a\in R$, $A=\{2, 4, a^3-2a^2-a+7\}$, $B=\{-4, a+3, a^2-2a+2, a^3+a^2+3a+7\}$, $A\cap B=\{2, 5\}$, 求 a.

解 由 $5\in A$, 有 $a^3-2a^2-a+7=5$,

即
$$(a+1)(a-1)(a-2)=0.$$

当 $a=-1$ 时, $a+3=2$, $a^2-2a+2=5$, $a^3+a^2+3a+7=4$, $A\cap B=\{2, 4, 5\}$;

当 $a=1$ 时, $a+3=4$, $a^2-2a+2=1$, $a^3+a^2+3a+7=$

12, $A\cap B=\{4\}$;

当 $a=2$ 时，$a+3=5$, $a^2-2a+2=2$, $a^3+a^2+3a+7=25$, $A\cap B=\{2,5\}$.

$$\therefore\quad a=2.$$

例 4 已知 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$, $B=\{(x,y)\,|\,(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$, 问当 a 为何值时，$A\cap B=\varnothing$, 并作图表示.

解 显然,$a=1$ 时,$B=\varnothing$, $A\cap B=\varnothing$;

当 $a\neq1$ 时,$A\cap B$ 是方程组

$$\begin{cases}(a+1)x-y=2a-1, & ① \\ (a^2-1)x+(a-1)y=15, & ② \\ x\neq2 & ③\end{cases}$$

的解集.

由 ①, ② 消去 y 得$2(a^2-1)x=2a^2-3a+16$. 此方程仅当 $a^2=1$ 时无解. 否则

$$x=\frac{2a^2-3a+16}{2(a^2-1)}.$$

由 $x=2$, 得 $2a^2+3a-20=0$.

$$\therefore\quad a_1=\frac{5}{2},\ a_2=-4.$$

综合以上考虑，当 $a=\pm1$ 或 $a=\dfrac{5}{2}$ 或 $a=-4$ 时有 $A\cap B=\varnothing$. a 取上述四值时,几何表示如图 1-1(1)、(2)、(3)、(4) 所示.

例 5 已知 $M=\{(x,y)\,|\,y\geqslant x^2\}$, $N=\{(x,y)\,|\,x^2+(y-a)^2\leqslant1\}$,那么,使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是

(A) $a\geqslant\dfrac{5}{4}$, (B) $a=\dfrac{5}{4}$, (C) $a\geqslant1$, (D) $0\leqslant a\leqslant\dfrac{1}{2}$.

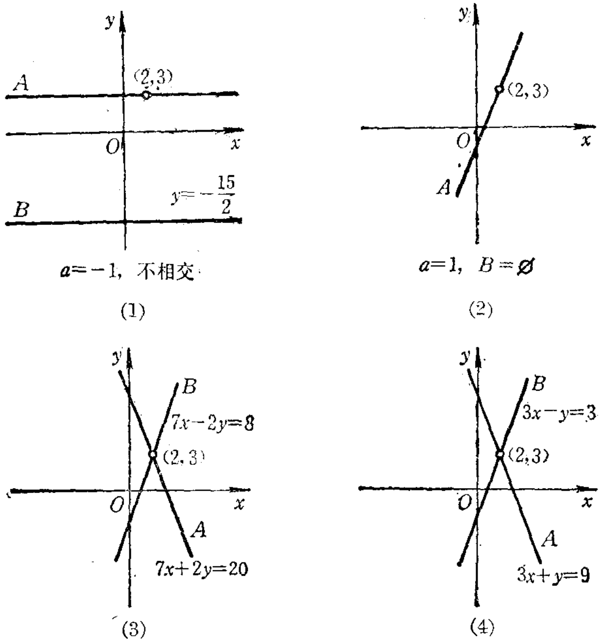


图 1-1

解 设抛物线 $y=x^2$ 上点 $(x,\ y)$ 到点 $(0,\ a)$ 的距离为 d，那么，

$$d^2=x^2+(y-a)^2=y+(y-a)^2$$
$$=y^2-(2a-1)y+a^2.$$

$M\cap N=N$ 的充要条件是 $N\subseteq M$，而 $N\subseteq M$ 意味着圆 $x^2+(y-a)^2\leqslant 1$ 全在抛物线 $y=x^2$ 的开口内部（可以到 $y=x^2$ 上，见图 1-2）．因而，应该有 d^2 的最小值 $d^2_{\min}\geqslant 1(y\geqslant 0)$．

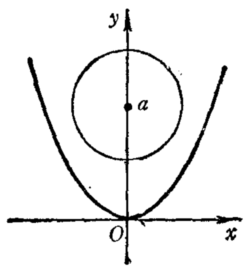


图 1-2

令 $f(y)=y^2-(2a-1)y+a^2(y\geqslant 0,\ a\geqslant 0)$，$f(y)$ 的最小

值 $d^2_{\min}$ 讨论情况如下：

当 $\frac{2a-1}{2}\leqslant 0$，即 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$d^2_{\min}=f(0)=a^2$. 这与 $a^2\geqslant 1$ 矛盾，故不可能有 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$.

当 $\frac{2a-1}{2}>0$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，$d^2_{\min}=f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=\frac{4a-1}{4}$，要 $\frac{4a-1}{4}\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{5}{4}$.

$\therefore\quad a\geqslant\frac{5}{4}$. 选择(A).

［注］ 以上三题是以集合的面目出现的，由集合的基本知识，容易看到，例 3 实际上是方程求解和函数求值，例 4 是带参数的分式方程组的求解，例 5 是不等式和极值问题. 这种由题设到问题的认识，关键一步是题设与结论的“数量化”(即用等式,不等式表示它们)．如例 3 中的 $a^3-2a^2-a+7=5$，例 4 中的方程组，例 5 中的 $d^2=x^2+(y-a)^2\geqslant 1$. 这里处理问题的方法，以后还要分别加以阐述.

练　　习

1. 若 $A=\{(x,\ y)\,|\,3x+y-5=0\}$，$B=\{(x,y)\,|\,|x^2+2x|+(5-y)^2=8\}$，求 $A\cap B$.

答：$A\cap B=\left\{\left(\frac{4}{5},\ \frac{13}{5}\right),\ \left(\frac{1-\sqrt{65}}{8},\ \frac{37+3\sqrt{65}}{8}\right)\right\}$.

2. 若 $A=\{(x,\ y)\,|\,1<x^2+y^2<2\}$，在平面上表示 $B=\{(x+y,\ x-y)\,|\,(x,\ y)\in A\}$.

答：圆环. $B=\{(x,\ y)\,|\,2<x^2+y^2<4\}$.

3. 已知 $A=\{x\,|\,x^2-7x+10\leqslant 0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+ax+b<0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cup B=\{x\,|\,x-3<4\leqslant 2x\}$，写出集合 $S=\{x\,|\,x=a+b\}$.

答：$S=\{x|5\leqslant x\leqslant 23\}$.

4. 求与抛物线 $y=x^2$ 切于原点，且在抛物线开口内部的最大圆.

答：$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中，若 $a\cos A+b\cos B=c\cos C$，那么下列结论哪一个一定正确：

(A) $\triangle ABC$ 是等边三角形，

(B) $\triangle ABC$ 是以 a 为斜边的直角三角形，

(C) $\triangle ABC$ 是以 b 为斜边的直角三角形，

(D) 以上都不对.

解 本题可用集合关系解决.

令 $S=\{\triangle ABC|a\cos A+b\cos B=c\cos C\}$,

$S_1=\{\triangle ABC|a=b=c\}$, $S_2=\left\{\triangle ABC|A=\frac{\pi}{2}\right\}$,

$S_3=\left\{\triangle ABC|B=\frac{\pi}{2}\right\}$.

由正弦定理和条件 $a\cos A+b\cos B=c\cos C$ 得

$$\sin 2A+\sin 2B=\sin 2C,$$

或者，
$$2\sin(A+B)\cos(A-B)$$
$$=2\sin C\cos C=-2\sin(A+B)\cos(A+B).$$

$$\because\quad \sin(A+B)\neq 0,$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)+\cos(A-B)=0,$$

$$\therefore\quad 2\cos A\cos B=0,$$

$$\therefore\quad A=\frac{\pi}{2}\quad 或\quad B=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad S=S_2\cup S_3,且\quad S_2\neq\varnothing,\ S_3\neq\varnothing.$$

即 $S\neq S_1$, $S\neq S_2$, $S\neq S_3$. 因而仅有(D)一定成立.

[注]　本题是命题逻辑题．命题与集合有十分密切的关系，由它们构成的代数结构，具有相同的运算法则，命题的逻辑常常可以用集合的运算给出证明．本题的证明还可以纯粹地用集合表达：

若(B)成立，即 $\triangle\in S$，必有 $\triangle\in S_2$，从而 $S\subset S_2$，由题设对 A，B 的对称性，必同时也有 $S\subset S_3$．从而 $S\subset S_2\cap S_3$，但 $S_2\cap S_3=\varnothing$．而 $S\neq\varnothing\left(\text{如 } A=\dfrac{\pi}{2} \text{ 的等腰直角三角形在 } S \text{ 中}\right)$，因而(B)、(C)不能成立，容易看出 $S\cap S_1=\varnothing$，故(A)不能成立，只有(D)成立．

例 7　集合 $A=\{x\,|\,x|x|=7k+3,\ x,\ k\in Z,\ -200<x<-100\}$ 的元素个数是多少？元素的和是多少？

解　$\because$ 当 $x\in A$ 时，$x<0$，$x^2=-7k-3=7m+4$($m=0$ 或 $m\in N$)．

设 $x=7l+r$($l\in Z$，$0\leqslant r\leqslant 6$)，那么

$$x^2=7t+r^2\quad(t\in Z)\quad \text{应为 } 7m+4 \text{ 的形式．}$$

$\therefore r$ 取值 2 和 5．

$\therefore x$ 具有两种形式 $7l_1+2$ 与 $7l_2+5$，它们彼此不相等．

由 $-200<x<-100$ 及 $x=7l+2$ 得

$$-28\frac{6}{7}<l<-14\frac{4}{7}.$$

$\therefore l$ 取 14 个值：$-28\leqslant l\leqslant -15$．即 A 中有 $7l+2$ 型元素 14 个，它们的和是 $\sum\limits_{l=-28}^{-15}(7l+2)$．

由 $-200<x<-100$ 及 $x=7l+5$ 得

$$-29\frac{2}{7}<l<-15.$$

$\therefore l$ 取值为 $-29\leqslant l\leqslant -16$，即 A 中 $7l+5$ 型元素共 14

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com