数学分析

第二册

马富明　高文杰

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是为适应数学学科本科生“数学分析”课程教学，结合作者多年来教学实践的经验、体会编写而成的.这是该教材的第二册，主要内容包括多元函数极限、多元函数的连续性、多元函数的微分学、微分学在几何和极值问题中的应用、重积分、曲线积分、曲面积分、场的初步知识和参变量积分等.

本书可作为高等学校理科及师范院校数学类各专业的教科书，也可供计算机、力学、物理学科各专业选用及其他感兴趣的读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析.第2册/马富明，高文杰.—北京：高等教育出版社，2005.7

ISBN 7-04-016564-3

Ⅰ.数… Ⅱ.①马…②高… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第056790号

策划编辑 王 瑜 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 于 涛

责任绘图 杜晓丹 **责任印制** 杨 明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	煤炭工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2005年7月第1版
印　　张	14.25	**印　　次**	2005年7月第1次印刷
字　　数	260 000	**定　　价**	16.80元

物料号 16564-00

序　言

本书是吉林大学数学学科编写的《数学分析》教材的第二册（第一册由严子谦、尹景学、张然编写，在本书之前已出版），是国家理科基地创名牌课程项目的研究成果．同第一册一样，本书也是集吉林大学教师十几年以至几十年的教学经验以及编者多年教授这门课程的体会编写而成的．

这一册的主要内容是多元函数的微积分．在教学中，我们经常遇到一种观点，认为多元微积分的主要内容就是计算．我们认为这种看法不够正确。以我们的观点，多元函数微积分理论的学习是学生从学习微积分基本知识向学习现代分析学过渡的重要阶段．多元函数微积分理论中的许多问题可以反映现代分析学的基本思想以及同几何与代数的联系．基于这种认识，我们适当地加强了某些内容，同时也照顾到读者阅读本书时的知识起点．

编者衷心感谢严子谦、尹景学两位教授和张然博士对这册书的编写以及书稿提出的许多宝贵意见．感谢吉林大学数学学院众多为编者助课以及为本书排版提供过帮助的青年教师和研究生们，他们的辛勤劳动对本书的完成有着不可忽略的贡献．最后还要感谢高等教育出版社王瑜、李陶等有关同志对本书的出版所给予的支持．

本书中错误和缺陷在所难免，诚恳地期盼读者批评指正．

编者

2005 年春于长春

目录

第一章　多元函数的极限与连续性

从本章开始，我们将讨论多元微积分．学习多元微积分的目的是使用微积分的思想和方法，来处理多个变量之间的关系（多元函数和向量值函数）．与一元微积分相比，多元微积分的特点是与几何的更紧密的联系．作为多元微积分讨论的开端，本章给出多元函数及其极限和连续等基本概念以及处理这些问题的基本方法．同第一册一样，如无特殊声明，本书中用 $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示全体自然数、正整数、整数、有理数和实数的集合．

§1　多元函数的定义

1.1　多个变量之间的依赖关系

通过一元微积分的学习，我们已经了解到，函数是描写变量之间关系的数学概念，并且，我们已能够用一元函数描写两个变量之间的关系．但是，现实世界是复杂的，当我们考虑各种量之间的关系时，我们会发现：一个变量经常依赖另外多个变量．请看下面的例子．

例 1.1 温度．这通常是一个依赖于时间和空间（地点）的变量．当在你所考虑的空间建立坐标系后，温度就与时间和空间中点的位置有关系．用 T 表示温度， t 表示时间， (x,y,z) 表示空间点的位置（采用空间直角坐标系），则 T 依赖四个变量 t,x,y,z.

例 1.2 灰度．考虑计算机显示屏上静止的一帧黑白图像．图像上某点的灰度与该点在屏幕上的位置有关．用 H 表示灰度， (x,y) 表示屏幕上点的位置（采用适当的坐标系），则 H 依赖两个变量 x,y.

从上面的例子中，我们可以看到，对于描写上述变量之间的关系，一元函数 (一个变量对另一个变量的依赖关系) 已不能满足需要，必须引进新的数学概念，以刻画多个变量之间的关系．

1.2　多元函数的定义

定义 1.1 设对于某个正整数 n, 有 $n+1$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n,u$. 如果对于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 每组给定的值，都有变量 u 的唯一值与其对应，则称此对应关系为一个 n 元函数关系，称变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量， u 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数．如果用 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示函数，则称自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的允许取值范围为 f 的定义域，变量 u 的取值范围为 f 的值域．

在上面的例子中，温度 T 是 t,x,y,z 的函数，可记为 $T=T(t,x,y,z)$, 定义

域为所考虑的时空范围，值域为温度变化范围；灰度 H 是 x,y 的函数，可记为 $H=H(x,y)$，定义域为屏幕的空间范围，值域为灰度的取值范围.

与一元函数的情形相似，确定一个多元函数需要并只需要两个因素：变量间的对应关系和定义域. 至于这种函数关系用什么形式表达并不重要. 我们约定，当用一个表达式写出函数关系，但未明确标明函数的定义域时，此函数的定义域就是使得所给表达式有意义的所有自变量的值.

例 1.3 *二元函数*

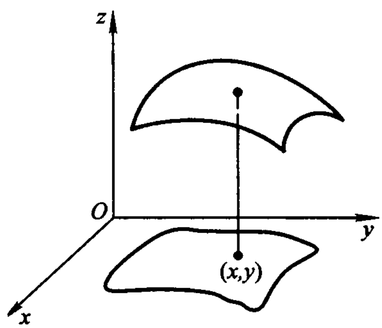
$$u=\sqrt{1-x^2-y^2}+xe^{\sin y}+y\cos x$$

的定义域为

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\leq 1\},$$

即平面上以原点为心，以 1 为半径的圆盘.

在众多的多元函数中，二元函数有着特殊的作用. 因为一方面，二元函数是多元函数中与一元函数有本质区别的自变量数目最少的一类函数，处理二元函数问题即能反映多元函数问题的特点，又能减少由于自变量数目带来的技术困难. 另一方面，正像人们经常把一个一元函数表示成 $\mathbb{R}^2$ 中的一条曲线一样，人们也经常把一个二元函数 $z=f(x,y)$ 表示成 $\mathbb{R}^3$ 中的曲面，即 $\mathbb{R}^3$ 中的点集 $\{(x,y,z);z=f(x,y)\}$ (见图 1-1). 这种将多元函数表示成几何对象的方式对直观理解多元函数及其性质有很好的帮助.



1-1

习 题

1. 确定下列函数的定义域:

(1) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$;

(2) $u = \sqrt{\cos(x^2+y^2)}$;

(3) $u = \ln(9-x^2) + 7\sqrt{y^2-4} + \mathrm{e}^x$.

(4) $u = \sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} \quad (R > r)$.

2. 设函数

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}, \quad x > 0,$$

求 $f(x)$.

§2 $\mathbb{R}^n$ 空间中的点集

2.1 n 维欧氏空间

为了精确地描述多元函数及其性质，我们需要用到 n 维欧氏空间的概念. 为此，让我们简单回顾一下线性代数课程中 n 维 **Euclid空间** 的定义:

令 $\mathbb{R}$ 表示所有实数的集合，$\mathbb{R}^n$ 表示所有 n 元实数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 构成的集合，即

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n);\quad x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

并对 $\mathbb{R}^n$ 中的元素 (记为 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$) 定义加法和数乘运算: $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n),$$

则 $\mathbb{R}^n$ 连同以上的两种运算 (代数结构), 构成一个 **n维向量空间**. 习惯上人们将其中的元素称为 **向量** 或 **点**, 零元素为 $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$. 在此基础上，于 $\mathbb{R}^n$ 上再引进如下的 **内积** 运算 $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

内积运算具有如下的性质: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $(x, y) = (y, x)$;

2. $(x,x) \geq 0$, 并且 $(x,x)=0$ 当且仅当 $x=0$;
3. $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$.

此内积诱导出 $\mathbb{R}^n$ 上的 **范数**

$$|x|=(x,x)^{1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

它具有如下的性质: $\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

1. $|x| \geq 0$, 并且 $|x|=0$ 当且仅当 $x=\theta$;
2. $|\alpha x|=|\alpha||x|$;
3. $|x+y| \leq |x|+|y|$.

联系内积与范数的有如下 **Cauchy不等式**

命题 2.1

$$|(x,y)| \leq |x||y|, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n,$$

并且, 上式等号成立当且仅当 $x=\lambda y$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 成立.

证明 $\forall x,y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, 我们有

$$0 \leq (x-\alpha y, x-\alpha y)=|x|^2-2\alpha(x,y)+\alpha^2|y|^2,$$

如果 $y=\theta$, 命题显然成立. 对 $y \neq \theta$, 取 $\alpha=\pm|x|/|y|$, 则得所欲证. □

有了内积和范数之后, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 x, 其范数给出了 x 的 **长度**, 并对非零向量 x,y, 定义两向量之间的 **夹角** $<x,y>$ 为

$$<x,y>=\arccos\frac{(x,y)}{|x||y|},$$

这样, $\mathbb{R}^n$ 上就具有了几何结构. 在这种几何结构之下, $\mathbb{R}^n$ 中点 x 与点 y 之间的距离为

$$d(x,y)=|x-y|.$$

它具有如下性质: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$,

1. $d(x,y)=d(y,x)$;
2. $d(x,y) \geq 0$, 并且 $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;
3. $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$.

n 维数组的集合 $\mathbb{R}^n$ 连同如上的代数结构和几何结构一起, 被称之为 **n维 Euclid 空间**.

2.2 $\mathbb{R}^n$ 中点集的结构 – 开集、闭集与区域

出于讨论多元函数的需要，必须对 $\mathbb{R}^n$ 中点集的结构加以讨论，这方面的知识属于点集拓扑学的范畴. 限于时间，此课题的完整讨论不可能在此作出. 这里仅对无法回避的几个概念，给出必要讲解，希望读者能尽快掌握，并用它们处理多元函数问题.

设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个给定的点集, 记 E 的余集为 E^c, 即 $E^c=\{x\in\mathbb{R}^n;x\notin E\}$. 首先从 $\mathbb{R}^n$ 中的点与 E 的位置关系开始我们的讨论.

定义 2.1 *对于 $x\in\mathbb{R}^n$, 如果存在 $r>0$, 使得*

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n;|y-x|<r\}\subset E,$$

则称 x 为 E 的内点；如果存在 $r>0$, 使得 $B(x,r)\subset E^c$, 则称 x 为 E 的外点；如果 x 既不是 E 的内点，也不是 E 的外点，则称 x 为 E 的边界点.

我们记 E 的所有内点的集合为 E^o, 称其为 E 的 **内部**; 记 E 的所有边界点的集合为 ∂E, 称其为 E 的 **边界**; 称 E 的所有外点的集合为 E 的 **外部**.

定义 2.2 *如果非空点集 E 中所有的点都是 E 的内点，则称 E 为开集；如果 E 的余集为开集，则称 E 为闭集.*

由定义，对于开集，有 $E=E^o$. 出于逻辑上的考虑，我们规定：空集 $\emptyset$ 是开集. 由此规定可知： $\mathbb{R}^n$ 为闭集. 又注意到，由定义， $\mathbb{R}^n$ 为开集，从而 $\emptyset$ 为闭集. 这样，我们有两个特殊点集 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}^n$, 它们既是开集，也是闭集. 可以证明： $\mathbb{R}^n$ 中即是开集又是闭集的点集只有这两个.

以下是 $\mathbb{R}^n$ 中点集的例子.

例 2.1 *点集*

$$E_1=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|<1\},$$

$$E_2=\{x\in\mathbb{R}^n;x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),|x_i|<1,i=1,2,\cdots,n\}$$

皆为开集，而点集

$$E_3=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|\le 1\},$$

$$E_4=\{x\in\mathbb{R}^n;x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),|x_i|\le 1,i=1,2,\cdots,n\}$$

皆为闭集. 点集

$$E_5=\{x\in\mathbb{R}^n;x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),|x_1|\le 1,|x_i|<1,i=2,3,\cdots,n\}$$

即非开集，也非闭集.

在讨论一元函数时，人们把开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)(\varepsilon>0)$ 称为 x_0 的邻域. 这里，我们给出更一般的邻域的定义.

定义 2.3 如果点 x 被开集 U 所包含，即 $x\in U$, 则称 U 为 x 的邻域.

显然，对给定的点 $x\in\mathbb{R}^n$, 点集

$$B_x(\varepsilon)=B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n;|y-x|<\varepsilon\}$$

是 x 的邻域（ $\varepsilon>0$ ），但请注意，按定义， $\mathbb{R}^n$ 自身也是 x 的邻域.

借助于几何背景，不难理解以下关于有界点集的定义.

定义 2.4 如果存在有限数 r_0, 使得 $E\subset B(r_0)=B(\theta,r_0)$, 则称 E 为有界集.

另一个必需的概念是关于点集的连通性. 对于给定的点 $x^{(0)},y^{(0)}$, 我们称点集

$$\sigma=\{x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t));0\le t\le 1,x(0)=x^{(0)},x(1)=y^{(0)}\}$$

为连接 $x^{(0)}$ 与 $y^{(0)}$ 的路径，其中函数 $x_i(t),i=1,2,\cdots,n$ 皆为 t 的连续函数.

定义 2.5 如果对于点集 E 中的任意两点，在 E 中总存在连接它们的路径 $\sigma\subset E$, 则称 E 为道路连通的.

在点集拓扑学中，还有一个更一般的连通概念. 一个道路连通集合一定是连通的，而连通集合未必是道路连通的. 但可以证明，对于开集，连通的充分必要条件是道路连通. 因此，在本书以后部分，我们不区分连通与道路连通.

连通的开集对于我们特别重要.

定义 2.6 如果开集还是连通的，则称其为区域.

例 2.2 点集

$$E_1=\{x\in\mathbb{R}^n;x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\sum_{i=1}^n x_i^2<1\}$$

是连通的开集，因而是区域. 点集

$$E_2=\{x\in\mathbb{R}^n;x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\sum_{i=1}^n x_i^2<1\ \text{或}(x_1-3)^2+\sum_{i=2}^n x_i^2<1\}$$

是开集，但是不连通，因而不是区域.

习 题

1. 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $N(x)$ 如果满足下列条件，则称其为范数：

(1) $N(x)\ge 0,\quad \forall x\in\mathbb{R}^n$, 并且 $N(x)=0$ 当且仅当 $x=0$;

(2) $N(\alpha x)=|\alpha|N(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}^n,\alpha\in\mathbb{R}$;

(3) $N(x+y) \le N(x) + N(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. 证明： $N_1(x) = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ 和 $N_2(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ 皆为 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

2. 如果 $N(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，则 $d(x,y) = N(x-y)$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上两点 x 与 y 的距离. 记 $d_1(x,y) = N_1(x-y)$, $d_2(x,y) = N_2(x-y)$,$N_1(x)$ 和 $N_2(x)$ 如题 1 中所定义. 给出 $\mathbb{R}^2$ 中在 d_1,d_2 下，到原点距离小于 1 的点集的图形. 它们是不同距离概念下的 “单位圆”.

3. 证明：任意多个开集的并集是开集，有限多个开集的交集是开集；任意多个闭集的交集是闭集，有限多个闭集的并集是闭集.

4. 举例说明：无限多个开集的交集可以是闭集；无限多个闭集的并集可以是开集.

§3 $\mathbb{R}^n$ 中的点列及其收敛性

3.1 点列的极限

设 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的无限点列. 考虑随着 k 无限增大时 $x^{(k)}$ 的变化. 如果当 k 无限增大时， $x^{(k)}$ 无限靠近 $\mathbb{R}^n$ 中一固定点 x^*, 则称点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 以 x^* 为 **极限**. 准确地说，我们有如下定义：

定义 3.1 *如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 k_0, 使得当 $k > k_0$ 时，总有*

$$|x^{(k)} - x^*| < \varepsilon,$$

则称当 k 趋于无穷时，点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 以 x^* 为极限，或称 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 x^*. 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$.

对于给定的点列,我们需要知道如何判断其是否收敛以及收敛点列的性质. 下面的命题告诉我们，点列的收敛性问题可转化为一组数列的收敛性问题. 从而，可以通过讨论数列的收敛性来讨论点列的收敛性.

对于给定点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$ 和点 $x^{(0)}$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$, 我们有

命题 3.1 *当 $k \to \infty$ 时，点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于点 $x^{(0)}$ 的充分必要条件是：对于 $i = 1, 2, \cdots, n$, 数列 $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于 $x_i^{(0)}$.*

证明 必要性. 由不等式

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(0)}| \le |x^{(k)} - x^{(0)}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

可知必要性成立.

充分性. 由不等式

$$|x^{(k)} - x^{(0)}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k)} - x_i^{(0)})^2} \le \sqrt{n} \max_{1\le i\le n} |x_i^{(k)} - x_i^{(0)}|,$$

其充分性即可得证. □

基于命题 3.1, 收敛点列具有如下性质:

1. 收敛点列的极限是唯一的;
2. 若点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 皆收敛, 则对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 有

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha x^{(k)} + \beta y^{(k)}) = \alpha \lim_{k\to\infty} x^{(k)} + \beta \lim_{k\to\infty} y^{(k)}.$$

3.2 Cauchy 序列与 $\mathbb{R}^n$ 的完备性

同在数列的极限理论中一样, 我们可以定义 $\mathbb{R}^n$ 中的 **Cauchy序列**.

定义 3.2 设 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列. 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 k_0, 使得当正整数 k_1, k_2 满足 $k_1, k_2 > k_0$ 时, 总有

$$|x^{(k_1)} - x^{(k_2)}| < \varepsilon,$$

则称点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列.

我们已经知道, 实数域是完备的, 即实数域中的任何 Cauchy 数列在实数域中总是有极限的. 这意味着实数域对于极限运算是封闭的. 对于 n 维欧氏空间, 有着同样的结果. 它可以表述如下:

定理 3.1 $\mathbb{R}^n$ 中点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛的充分必要条件是: $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Chauchy 序列.

使用命题 3.1, 不难证明上面的定理. 留给读者作为练习.

有时人们也称定理 3.1 为点列收敛的 **Cauchy准则**. 通过检验所给点列是否是 Cauchy 序列, 来判断其是否收敛, 而不需有关极限点的任何信息. 这在证明点列无极限时尤其方便. 定理 3.1 的重要之处在于它给出了 $\mathbb{R}^n$ 的完备性.

3.3 点集的聚点与闭包

为了深入研究 $\mathbb{R}^n$ 中点集和给定点之间的位置关系, 引入如下的概念:

定义 3.3 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 并且点 $x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$, 如果对于 $x^{(0)}$ 的任何一个邻域 U, $U\setminus\{x^{(0)}\}$ 中总有 E 的点, 则称 $x^{(0)}$ 是点集 E 的聚点.

定义 3.4 我们称点集 E 的所有聚点的集合为 E 的导集, 记为 E'; 称点集 $E\bigcup E'$ 为 E 的闭包, 记为 $\overline{E}$.

显然，有 $E \subset \overline{E}$. 进一步，还可以证明：

命题 3.2 *E 为闭集的充分必要条件是：* $E = \overline{E}$.

由邻域的定义可知：如果 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是 $x^{(0)}$ 的邻域，则存在 $r > 0$, 使得

$$B(x^{(0)}, r) \subset U.$$

由此，不难证明 (留作习题):

命题 3.3 *若 $x^{(0)}$ 是 E 的聚点，则存在 E 中的一个点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}(x^{(k)} \neq x^{(0)}, k = 1, 2, \cdots)$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$.*

正是基于这个命题，人们也称点集 E 的聚点 $x^{(0)}$ 为 E 的极限点. 下面的命题对闭集和点列极限的关系给出了直观的解释.

命题 3.4 *设 E 为闭集，点列 $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset E$. 如果 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, 则 $x^{(0)} \in E$.*

由此看到，闭集对极限运算是封闭的.

下面是聚点和闭集的几个例子.

例 3.1 由有限多个点构成的点集是闭集. 此时， $E' = \emptyset$, $\overline{E} = E \bigcup E' = E \bigcup \emptyset = E$.

例 3.2 设

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < |x| < 1\},$$

则 E 是区域，且 $E \subset E' = \overline{E} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$.

注意，在上个例子中， $\overline{E}$ 是区域 E 的闭包，并不是区域 (因为它不是开集). 但习惯上，人们常常称区域的闭包为 **闭区域**.

例 3.3 考虑点集

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \sin\frac{1}{x}, -1 \leq x \leq 1, x \neq 0\},$$

易验证， $E \subset E' = \overline{E} = E \bigcup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$.

习　题

1. 证明定理 3.1.
2. 证明命题 3.2~3.4.
3. 设 A, B 是 $\mathbb{R}^n$ 中两不相交开集，证明 $A \bigcap \overline{B} = \emptyset$.
4. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ ，试证明其边界 ∂E 必为闭集.

§4 多元函数的极限与连续性

4.1 多元函数的极限

众所周知，极限的概念是微积分理论中的核心概念. 在多元函数微积分情形也是如此. 下面我们首先给出多元函数极限的定义.

定义 4.1 设有 n 元函数 $f: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 并且 $x^{(0)}\in D'$, 即 $x^{(0)}$ 是 D 的聚点. 如果存在常数 l, 使得对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x^{(0)}|<\delta$ 且 $x\in D$ 时，总有

$$|f(x)-l|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋于 $x^{(0)}$ 时，$f(x)$ 以 l 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)=l$.

以下是几个函数极限的例子：

例 4.1 二元函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ 当 (x,y) 趋于点 $(0,0)$ 时以 0 为极限，即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

事实上，$f(x,y)$ 的定义域为 $D=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$,$(0,0)$ 为 D 的聚点. $\forall\varepsilon>0$, 不妨设 $\varepsilon<1$, 由于

$$|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}|\le\frac{1}{4}(x^2+y^2),$$

只需取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}>0$, 则对于任何 $(x,y)\neq(0,0)$ 只要 (x,y) 与 $(0,0)$ 的距离小于 δ, 即 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$, 则有

$$|f(x,y)-0|\le|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}|\le\frac{1}{4}(x^2+y^2)<\varepsilon.$$

以上关于极限的定义可以做如下解释. 当 x 趋于 $x^{(0)}$ 时，$f(x)$ 以 l 为极限的充分必要条件是：当动点 x 以任何方式趋于点 $x^{(0)}$ (但 $x\neq x^{(0)}$) 时，$f(x)$ 趋于 l. 这里，以“任何方式”一词是关键. 请看下面的例子.

例 4.2 二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时没有极限.

事实上，当点 (x,y) 沿坐标轴趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于 0, 而当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于 $\dfrac{1}{2}$.

例 4.3 二元函数 $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时没有极限.

事实上，当 (x,y) 沿着任何一个（直线）方向趋于点 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 都趋于 0. 这是因为平面上过 $(0,0)$ 的任何一条射线，总可以表示为：

$$x=t\cos\theta,\quad y=t\sin\theta,\quad t\ge 0,$$

其中 $\theta\in[0,2\pi]$. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 沿此射线趋于 $(0,0)$ 时，有 $t\to 0^+$，从而，$f(x,y)=\dfrac{t^3\cos\theta\sin^2\theta}{t^2\cos^2\theta+t^4\sin^4\theta}\to 0$. 但是，当点 $(x,y)\neq(0,0)$ 沿曲线

$$x=t^2,\quad y=t,\quad t\geq 0$$

趋于 $(0,0)$ 时，却有 $f(x,y)\to\dfrac{1}{2}$，从而当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 无极限.

在上面的例子中，读者应该看到多元函数与一元函数在极限问题上的差异. 人们知道，在一元函数情形，函数于某点有极限的充分必要条件是于该点的左、右极限都存在且相等. 可是，这不能简单的推广到二元函数情形.

但是，如果将上述例子中的函数定义域限制在 $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x>0,y>0,\arctan\dfrac{y}{x}\leq\theta_0<\dfrac{\pi}{2}\}$ 上，则有着不同的结论，即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\in D_1}f(x,y)=0.$$

请读者思考其中的道理.

关于多元函数的极限和四则运算的关系，有如下的结论（证明留给读者作为练习）:

定理 4.1 设 $f(x)$，$g(x)$ 皆为定义在 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上的函数，$x^{(0)}\in D'$，且 $\lim\limits_{x\to x^{(0)}}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x^{(0)}}g(x)=b$，则有

1. $\lim\limits_{x\to x^{(0)}}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x^{(0)}}f(x)+\lim\limits_{x\to x^{(0)}}g(x)=a+b;$
2. 对任意常数 $c\in\mathbb{R}$，$\lim\limits_{x\to x^{(0)}}cf(x)=c\lim\limits_{x\to x^{(0)}}f(x)=ca;$
3. $\lim\limits_{x\to x^{(0)}}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to x^{(0)}}f(x)\lim\limits_{x\to x^{(0)}}g(x)=ab;$
4. 如果 $b\neq 0$，有

$$\lim_{x\to x^{(0)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x^{(0)}}f(x)}{\lim\limits_{x\to x^{(0)}}g(x)}=\frac{a}{b}.$$

关于多元函数的复合运算与极限的关系，可以与一元函数类似地讨论，我们这里就不重复叙述了.

4.2 多元函数的连续性

以下我们开始多元函数连续性的讨论.

定义 4.2 设 $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为一给定多元函数，$x^{(0)}\in D$. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x^{(0)}|\leq\delta$ 且 $x\in D$ 时，总有

$$|f(x)-f(x^{(0)})|<\varepsilon,$$