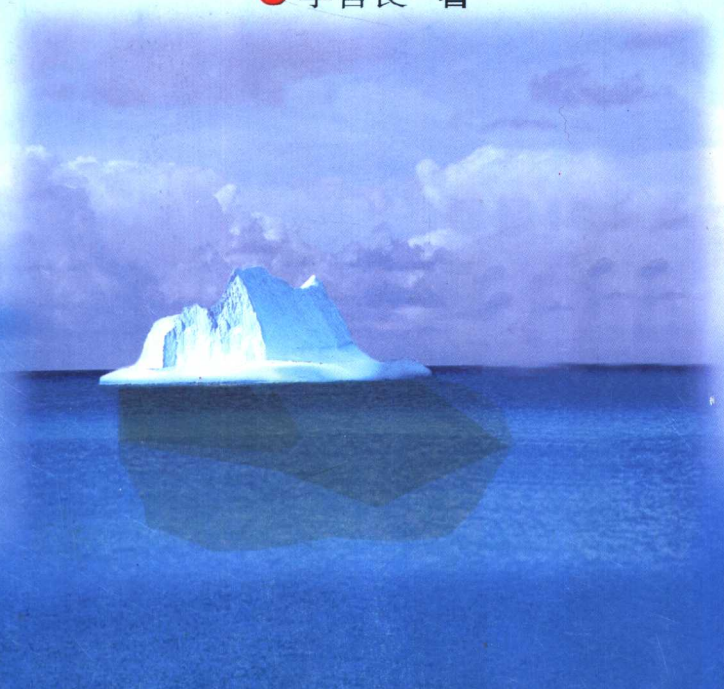


现代认知观下的

# 数学概念学习 与教学

● 李善良 著



凤凰出版传媒集团

● 江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

现代认知观下的

XIAN DAI REN ZHI GUAN XIA DE  
SHU XUE GAINIAN XUEXI YU JIAOXUE

数学概念  
学习与教学

李善良  
著

凤凰出版传媒集团

江苏教育出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

现代认知观下的数学概念学习与教学/李善良著. 南京:  
江苏教育出版社, 2005. 10

ISBN 7-5343-7014-0

I. 现... II. 李... III. 数学课-教学研究-中学  
IV. G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 128417 号

- 书 名 现代认知观下的数学概念学习与教学  
作 者 李善良  
责任编辑 胡晋宾  
出版发行 凤凰出版传媒集团  
江苏教育出版社(南京市马家街 31 号 210009)  
网 址 <http://www.1088.com.cn>  
集团网址 凤凰出版传媒网 <http://www.ppm.cn>  
经 销 江苏省新华发行集团有限公司  
照 排 南京理工出版信息技术有限公司  
印 刷 江苏新华印刷厂  
厂 址 南京市张王庙 88 号(邮编 210037)  
电 话 025-85521756  
开 本 850×1168 毫米 1/32  
印 张 12.5  
字 数 318 000  
版 次 2005 年 12 月第 1 版  
2005 年 12 月第 1 次印刷  
印 数 1-2 150 册  
书 号 ISBN 7-5343-7014-0/G·6699  
定 价 30.00 元  
邮购电话 025-85400774, 8008289797  
批发电话 025-83260767, 83260768, 83260760  
盗版举报 025-83204538

苏教版图书若有印装错误可向承印厂调换  
欢迎邮购, 提供盗版线索者给予重奖

---

## 摘 要

---

ZHAI YAO

数学教学应以掌握概念、原理为主要目标,以概念、原理为载体,使学生思维获得发展,素质得到提高。数学概念的学习与教学理论研究,可以为数学教学实践提供指导,为数学课程改革提供依据,同时为建立系统的、科学的数学学习与教学理论奠定基础。

本文以现代认知观点为指导思想,采用现代的教育研究方法,分析教学情境中数学概念的学习过程,数学概念表征的特点和数学概念学习中的影响因素、差异与错误,从而建立数学概念学习理论。在此基础上提出数学概念教学理论。

数学概念学习是对一类数学对象的本质属性的概括抽象,是不断感知经验的活动过程,是主体对客体的不断加工、修正,最终达到主体对客体的建构过程。在数学概念形成过程中既涉及概念的本质属性、属性的结合规则等侧面,也涉及原型、相似性、样例等内容。从纵向上看,数学概念学习过程具有层次性与结构性。从横向上看,数学概念学习过程具有阶段性与过程性。横向与纵向的融合,反映了概念学习的阶段与层次的整合,体现着过程与结构的耦合,包括概念意象—概念定义、概念联系—概念网络、概念运用—概念系统等耦合体。影响数学概念学习的因素包括过去的经验、直观背景、有关特征和无关特征、原型与变式、正例与反例等。数学概念学习过程中有阶段性、水平性、学科性、倾向性等差异,有过程性和“合理性”两种类型错误。

在现代认知观指导下,数学概念教学应遵循动力性、过程

性、结构性、活动性、层次性、交流性、系统性、发展性等教学原则,从掌握数学概念的构成和学习数学概念的心理特点两个角度考虑教学策略。

**关键词:**数学概念,学习过程,概念表征,学习差异,错误分析,教学原则,教学策略,现代认知观点。

## CONTENTS 目 录

摘要	1
----	---

## 第一篇 绪 论

第一章 研究的背景和目的	3
§ 1.1 研究背景	3
§ 1.2 研究目的	7
第二章 相关研究及文献综述	8
§ 2.1 已有的研究	8
§ 2.2 研究中存在的问题	27
第三章 研究的内容、方法和组织	29
§ 3.1 研究的内容	29
§ 3.2 研究方法	30
§ 3.3 样本选取	31
§ 3.4 研究的组织	33

## 第二篇 数学概念学习理论

第四章 数学概念与数学概念学习	37
第五章 数学概念表征系统分析	50
§ 5.1 数学概念表征的含义	50
§ 5.2 数学概念表征的方式	55
§ 5.3 数学概念表征的特征	66
第六章 数学概念学习心理过程分析	103

§ 6.1	两种对立的观点:过程与结构	103
§ 6.2	数学概念学习过程模型	123
§ 6.3	数学概念学习过程分析	130
<b>第七章</b>	<b>影响数学概念学习的因素分析</b>	<b>185</b>
§ 7.1	影响数学概念学习的因素	185
§ 7.2	过去的经验	190
§ 7.3	直观背景	206
§ 7.4	原型与变式	212
§ 7.5	正例和反例	221
<b>第八章</b>	<b>数学概念学习中的差异性分析</b>	<b>231</b>
§ 8.1	阶段性差异	232
§ 8.2	水平性差异	239
§ 8.3	学科性差异	247
§ 8.4	倾向性差异	255
<b>第九章</b>	<b>数学概念学习中的错误分析</b>	<b>264</b>
§ 9.1	数学概念学习中的错误类型	264
§ 9.2	过程性错误	267
§ 9.3	“合理性”错误	281

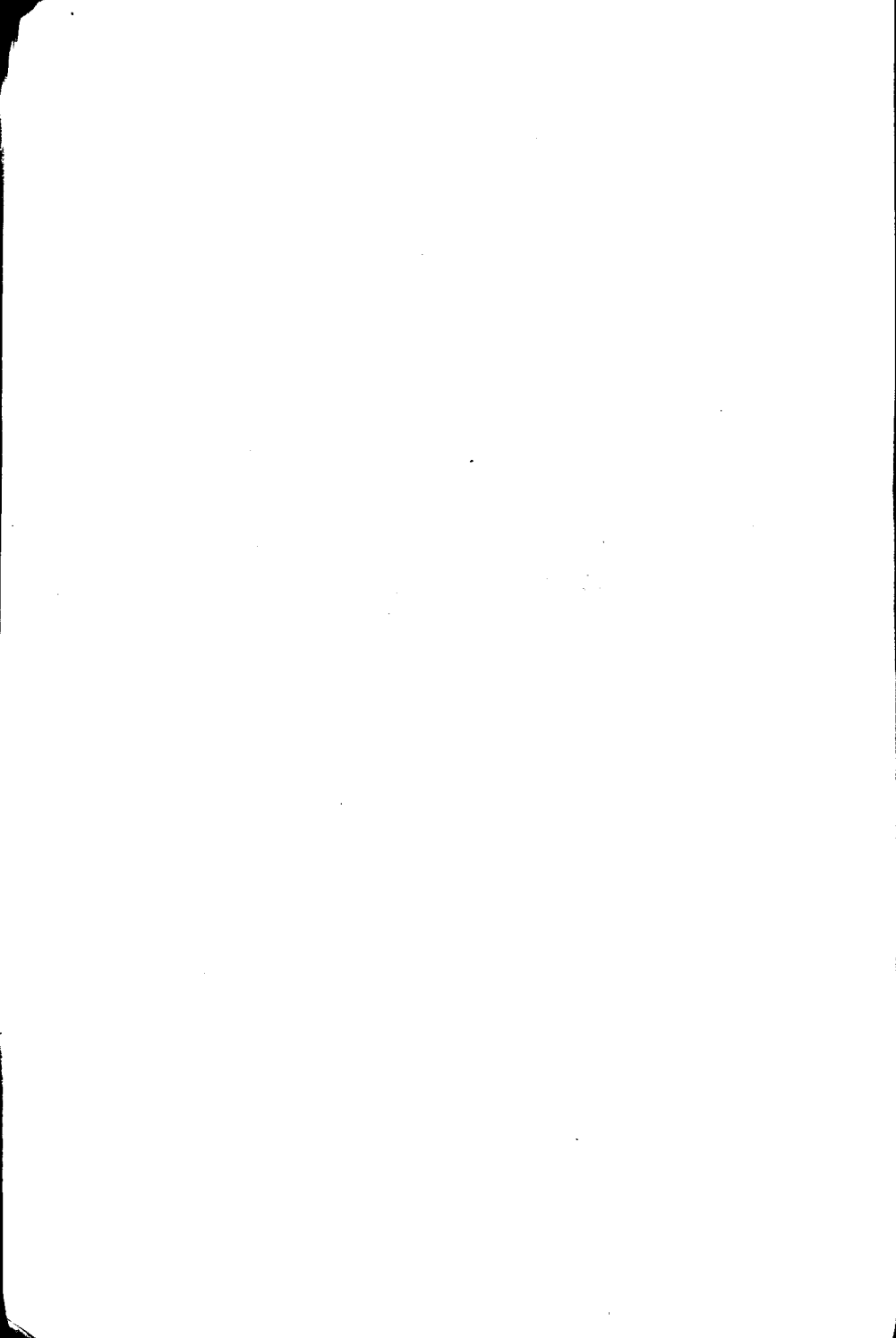
### 第三篇 数学概念教学理论

<b>第十章</b>	<b>概述</b>	<b>289</b>
<b>第十一章</b>	<b>数学概念教学原则</b>	<b>303</b>
<b>第十二章</b>	<b>数学概念教学过程模式</b>	<b>307</b>
<b>第十三章</b>	<b>数学概念教学策略</b>	<b>314</b>
<b>附件 1</b>	<b>问卷调查表</b>	<b>347</b>
<b>附件 2</b>	<b>实验提要</b>	<b>357</b>
<b>参考文献</b>		<b>377</b>

第一篇

绪 论





# 第一章

YANJIU DE BEIJING HE MUDE

## 研究的背景和目的

### § 1.1 研究背景

#### 1. 历史背景:数学教育的需要

数学概念是数学的逻辑起点,是学生认知的基础,是学生进行数学思维的核心,在数学学习与教学中具有重要地位。数学概念学习的原理是数学课程发展与数学教学的理论基础。然而,“尽管一切文化都在明确地传授着,可是教育对概念的形成到底起了什么作用,我们理解得还很少”<sup>①</sup>。

20世纪进行了多次数学教育改革。虽然每一次改革对数学概念教学都很重视,但由于对数学概念学习的原理把握不够(实际上尚未有足以支持改革的数学概念学习理论),受种种浅显的或偏激的理论导引,数学概念常常仅被视作逻辑基础,以形式化、符号化的结论为目标来讨论其学习与教学,有些人甚至认为它太简单而不必作深入的研究。最终一次次改革都失败了,数学学习的难度依然如故,学生对数学的畏惧与厌恶依旧是数学教育的难题。最典型的是“新数运动”——力图以结构化、形式化、公理化方式引入数学。尽管其失败的原因很多,但学生不能理解数学概念可能是主要原因之一。而“回到基础”运动也明

<sup>①</sup> 编写组. 简明不列颠百科全书. 3. 北京: 中国大百科全书出版社, 1985. P. 264.

显失败了,究其原因,可能与过分重视机械性的结论有关。把数学概念视作孤立的对象,忽视了概念的过程与联系,学生仅记忆结论与符号,既没有经历概念的过程,也没有经历概念的运用,没有真正建立概念的网络,实际上并没有掌握数学概念,进而也难以掌握数学。

20世纪80年代,美国全国数学教师联合会提出“问题解决”为80年代美国数学教育的核心,之后这种思想受到整个世界的关注。然而,当新世纪到来之前,他们又敏锐地将“问题解决”降为过程要求,同时重视数学基础知识与基本技能的学习,重视“数学联系”与“数学表达”。这是因为他们发现问题解决的核心是对基础知识(当然包括数学概念)与技能的理解与运用。

我国数学教育的改革也一直在进行着,20世纪80年代重视能力培养,90年代提出素质教育。但教育现实却步入两难境地,在“高分低能”尚未解决的情况下,人们又发现“高分低质”。什么是素质?如何提高学生的素质?人们的理解并不统一。实际上,素质教育就是对学科中基本品质的掌握。教育历来都同时重视把握两个目标:基础性目标(原理)与发展性目标。基础与发展相互联系、相互促进。概念的掌握既是基础性目标又是发展性目标。我们多年来把主要目标放在做题上,做题成为目标,而不是以基本原理为主要目标。数学教学改革应把掌握概念、原理作为主要目标,以概念、原理为载体,获得思维的发展,从而达到发展性目标。以概念、原理为目标的教学应是现代教学的核心。这是减负、素质教育的基础和出发点,也是数学教育产生革命性变化的转轨。

## 2. 时代背景:社会向学校提出高要求

当今社会已步入信息化时代,飞速发展的经济、科技需要未来的公民具备更丰富的知识与灵活多变的思维能力。但人的精力与时间有限,知识更新速度愈来愈快,因而,培养学生主动获取知识与思维能力就尤为重要。由过去的“学会”转到“会学”、



“会想”，向教育提出两个问题：一是如何使学生通过有限的时间与精力，获得更多的知识，即教学最优化问题；二是如何通过有限的知识教学，以这些知识为载体，培养学生获取知识与灵活思维的能力。这些都依据于对数学学习原理的深入了解。但实际教学情况却是另外两种现象：一是凭直觉与经验，仅考虑教的过程；二是延长学生学习时间，增加学生学习负担，死记硬背，机械训练。

时代呼唤高素质的人才，呼唤具有主动获取知识与灵活思维能力的新一代公民。数学思维研究中主要问题是问题解决，而问题解决的核心又是对概念的深刻理解。这就要求学生不仅仅学习概念的知识一形式化的结论内容，而且必须学习概念的产生过程与运用过程。不仅要掌握作为对象的概念，而且要掌握作为过程的概念；不仅要掌握作为个体的孤立的观念，而且要掌握作为联系的网络结点的概念。

概念在数学中的地位是极其重要的，然而，在我们的教学中却很少真正把它放到核心地位，发挥概念应有的教学功能。教学时往往是一带而过，没有深入挖掘。等到解决问题时，由于学生不能从本质上建立概念之间的联系，解题便发生障碍。实际上，就一个概念孤立地看，它确实是简单的，但这个概念代表一个类，是从众多特征中抽取出来的，它有别于其他概念，同时又与众多的概念建立丰富的网络联系。概念作为结点，与它连结的线愈多，这个概念的理解程度就愈高，其运用就愈迅速。概念作为层次，低层的信息量较少，高层信息量较多。现在的教学恰恰忽略了这三点，把概念割裂析出，一个一个孤立地学习。看起来学生很容易学习，很容易理解，实际上学生并没有学习到概念的本质内容与深层意义。这种教学也没有真正发挥概念学习对思维发展的促进作用。在概念所处的“社会”中学习概念，一方面把概念作为一类抽象代表，另一方面通过概念作为网络、结点与更多的数学内容建立更广泛的联系。同时，通过多次反复，不

断加深对概念的理解。只有这样,才能通过概念的学习,促进思维力的增强,真正提高学生的素质,适应时代发展的要求。

### 3. 学科背景:数学教学理论是科学吗

数学教学的历史至少可以追溯到古希腊时代,但它的一系列理论是否科学,至今仍值得怀疑。现代认知心理学在近 50 年已发展成为一门科学,从而促进了一般学习理论的重新建立。然而,数学与心理学在很长时期曾是两个互不相通的领域,“数学家、心理学家和数学教师之间缺乏交流,阻碍了一个典型的交叉学科的形成”,“尽管一些基本的数学概念引发了心理学家的兴趣,但大部分主要的概念未受到重视”<sup>①</sup>。

直到 20 世纪 80 年代,数学教学所依据的心理学原理仍是刺激—反应的行为主义理论及皮亚杰与奥苏贝尔的同化理论。建立在感知觉基础之上的“心理学+数学例子”现象充斥着数学教学的书籍。因此,一些研究者敏锐地指出:“我们不应从普通的中性的学习理论出发去提出数学学习理论,而应注意特定内容的学习过程,不是只限于提出一些学习方面的问题,再用普通的心理学理论,例如皮亚杰、加涅、或格式塔理论去解释”<sup>②</sup>。

“数学教育提出了自身独有的心理学问题,这是专业心理学家在他自己的领域中永远也不会遇到的”<sup>③</sup>。只有从最基本的数学内容学习出发,建立适于自己特性的教学理论,才能真正利于指导数学教学,才能使数学教学理论成为一门科学。因而数学概念学习与教学的理论研究就具有极为重要的意义。

数学概念学习的重要性早已受到关注,然而受数学、心理学、哲学等发展水平的限制,其研究水平只停留在较低层次上。

---

① ICMI 研究丛书:国际展望:数学教育评价研究. 唐瑞芬等译. 上海教育出版社, 1996. P. 191.

② 张奠宙. 数学教育研究导引. 南京:江苏教育出版社, 1994. P. 45.

③ ICMI 研究丛书:国际展望:数学教育评价研究. 唐瑞芬等译. 上海教育出版社, 1996. P. 197.

现代认知科学已融合信息加工、人工智能、神经网络等多方面内容,理论上取得重大的突破与进展。这为揭示数学概念学习的深层机制提供了科学依据。数学教育哲学的研究对数学、数学教育、数学学习等问题提出了现代的诠释,建构主义思想已成为指导教学的基本思想。数学教育的研究方法也发生了巨大的改变,生态学方法、现象学方法、临床诊断法、社会—历史学法等已在数学学习的研究中广泛使用。这为数学概念学习的研究提供了方法指导。科学的发展,哲学思想的提升,研究方法的更新也促进数学概念学习的重新与深入研究。

现代科学、哲学、技术的发展已揭示学科发展的综合趋向,任何一个学科的发展几乎都反映着多学科的综合发展。数学教学理论的建立也必然体现这一特点。它的主要内容——数学概念学习的研究必须借助于诸多学科的发展,同时利用这些学科的成就,建立适合自身特点,又符合现代科学规律的系统理论。

## § 1.2 研究目的

本研究以建立在现代认识论、认知心理学基础之上的现代认知观点为指导思想,采用现代的教育研究方法,分析教学情景下的数学概念学习过程,提出相应的理论,在此基础上提出数学概念教学原理。主要内容包括:(1)探索数学概念表征特点。(2)建立数学概念学习的过程理论。(3)分析影响数学概念学习的因素。(4)比较数学概念学习中的差异。(5)辨析数学概念学习中的错误。(6)提出数学概念教学若干原理。

通过对数学概念的学习与教学原理的研究,可以为数学概念学习与教学提供理论指导,同时为建立系统的科学的数学学习与教学理论奠定基础,为数学课程改革提供依据。

## 第二章

XIANG GUAN YAN JIU JI WEN XIAN ZONG SHU

## 相关研究及文献综述

## § 2.1 已有的研究

## 1. 概念学习的一般理论

由于概念在人思维活动中发挥着重要作用,因此在近 100 年中,关于概念学习和教学的研究一直是心理学研究的重要课题,人们在概念的实质、概念的获得、概念的运用、概念的教学等方面都作了广泛的探索并建立了许多理论。

概念的获得是概念学习研究的中心内容。从不同角度出发,研究者建立了各种不同的概念获得理论。认知心理学从概念形成方面研究概念获得的本质或结构,发展心理学从儿童发展方面研究概念获得的阶段与发展过程,教育心理学从儿童学习过程方面研究概念获得的方式。随着心理学的发展,认知心理学、发展心理学、教育心理学各自都获得了巨大的发展。因此,关于概念学习的理论,也获得较大的发展。同时,各学科有互相吸收、融会贯通的现象。

## 1.1 认知心理学的研究

在概念形成方面,主要研究成果有早期行为主义的联结理论、J. Bruner 为代表的假设—检验理论、E. Rosch 的原型理论、Medin 的基于理论等。这些方面的研究今天仍在进行。

联结理论 (Association Theory) 代表人物 Hull 认为 (1920),学习概念就是“从某一类的刺激中抽象出一般的因素,



并对该因素发生共同的反应”，即概念学习的过程就是同类刺激与机体某种反应的联结过程，概念形成的关键在于外界刺激与机体反应之间的联结。用这种观点可以成功地解释儿童的日常概念、初级概念的形成。然而这种理论包括其进一步发展而成的中介理论(Osgood, 1953),却难以解释抽象概念、科学概念、二级概念的学习。此外,这种理论对概念形成过程的分析带有被动色彩,没有充分考虑人的主动性,不重视人的内部活动过程。

20世纪50年代,J. Bruner 等人对人工概念的形成进行了大量的研究,提出假设—检验理论(Hypothesis-testing Theory)(1956)。他们认为人在概念形成过程中要利用现在得到的和已存储的有关信息主动提出一些可能的假设,并将这一假设应用于其后遇到的事例中加以检验。该理论提出:概念形成总是一个运用策略进行假设检验的过程。这种理论成为目前最有影响的概念形成理论。

E. Rosch(1975)认为,概念主要是以原型(Prototype),即它的最佳实例表征出来的,我们主要是从能最好地说明一个概念的实例来理解概念的。Rosch 认为概念由两个因素构成——原型或最佳实例和范畴成员代表性的程度。这两个因素紧密地结合在一起,而原型起着核心的作用。Rosch 指出:原型之所以能最好地表征概念是因为它有更多的特征与该概念的其他成员相同。一个概念的成员是由互相重叠的特征的网络联系在一起的,并没有全部成员都有的共同特征,只是一些成员可有某些共同特征。这种观点对于自然概念、日常概念的解释是有利的,但对于精确的科学概念解释却很困难。

Medin(1989)提出概念结构“基于理论”观点(Theory-based View),主要有以下观点:

(1)“相似性”。相似性并不一定是世界万物的一个特征,而可能更像是概念本身,其组成部分因我们自己所在的情境不



同而变化不定。

(2) 个人知识和背景在我们的类别结构中一定是重要的。根据“基于理论”的观点,概念所以具有他们现在的这种结构,并不是因为人们的经验为其提供了一种关于动机、原因、“真正的”变化和“表面”变化等等的理论。我们关于概念的表征,除了定义性特征或原型样例外,还必须加上一些有关领域的内在原则或理论。所谓理论是能解释或产生某一领域内的现象的一些因果关系。用这些因果关系来解释为什么一些特征或功能密切联系在一起。这一观点强调了在概念形成过程中理论或复杂知识的作用。要完整地解释一个概念,我们还必须了解所镶嵌的领域知识,也即个体关于某一领域的理论<sup>①</sup>。

Gelman & Markman(1986)研究发现,儿童也具有一些理论。这表明,儿童并非毫无批判地将他所见到的某一类目成员的所有特征都概括成这一类目的特征的,他们是根据自己的理论,选择最相关的特征而加以表征的。此外,对科学概念教学的研究也发现,儿童在其生活实践中形成了一套自己的理论,这些理论会影响儿童学习的科学概念。

### 1.2 发展心理学的研究

关于概念学习的发展研究一直是心理学的重要课题,皮亚杰在多方面作了开创性的研究,维果茨基的理论也产生了巨大的影响。皮亚杰关于概念,尤其是数学概念的研究奠定了概念学习研究的基础。其主导思想,一是从概念的发展角度来研究概念形成,二是从思维角度来研究概念的结构。前者主要体现在他的阶段理论中,后者主要体现在关于数学概念的思维研究中。

皮亚杰从发展角度研究儿童的数学学习,其著名的阶段说常有两种含义。一为感知运动阶段—前运算阶段—具体运算阶段

---

<sup>①</sup> [美]John. B. Best. 认知心理学. 黄希庭主译. 北京:中国轻工业出版社, 1992. PP. 200~203.