新教材

XINJIAOCAI WANQUANJIEDU

完全解读

配人教大纲版·第二次修订

与最新教材完全同步
重点难点详尽解读

高二数学「下A」

主　　编：徐新斌　张克修
分册主编：邓建华　韩松桥

吉林人民出版社

新教材

XINJIAOCAI WANQUANJIEDU

完全解读

配人教大纲版·第二次修订

高二数学 「下A」

主　　编：徐新斌　张克修
分册主编：邓建华　韩松桥
分册副主编：赵权忠　王青春　赵　君
编　　者：王　亚　王兰秀　王国涛　代丽萍　左剑平
向　艳　朱光辉　朱志峰　齐如意　张红兵
张新平　李元明　李国宝　杨　田　陈长伟
周红日　胡和生　殷立新　黄　鹏　黄六生
彭西骏　彭修和　韩松桥　褚卫斌　黎　融
黎绍成　战秀梅　王　晔　王兴华　林玉秋
李淑环　刘文杰　赵振东

吉林人民出版社

(吉)新登字 01 号

策　　划:吉林人民出版社综合编辑部策划室
执行策划:王治国

新教材完全解读·高二数学·下 A(配人教大纲版)

吉林人民出版社出版发行(中国·长春人民大街 7548 号　邮政编码:130022)
网址:www.zgjf.com.cn　电话:0431－5378008

主　　编　徐新斌　张克修　　分册主编　邓建华　韩松桥
责任编辑　张长平　王胜利　　封面设计　魏　晋
责任校对　肖建萍　　版式设计　邢　程

印刷:北京市人民文学印刷厂
开本:880×1230　1/32
印张:12　字数:426 千字
标准书号:ISBN 7 - 206 - 02483 - 1/G · 1447
2003 年 11 月第 1 版　2005 年 10 月第 2 次修订　2005 年 10 月第 1 次印刷
定价:15.80 元

目 录
CONTENTS

第九章

直线、平面、简单几何体

本章视点

一、本章内容分析

1. 立体几何是研究空间图形的形状、大小及相互间位置关系的一门学科，是初中所学过的平面几何的继续与发展，全章共分成两大部分：空间直线和平面、简单几何体．其中第一部分内容是研究第二部分内容的理论基础，所以第一部分内容是全章内容的关键，同时，第二部分内容既是对简单几何体知识的重点讨论，又是对第一部分空间直线和平面的位置关系相关知识的综合运用，这一部分内容不仅是对空间直线和平面的位置关系知识的巩固，而且是对空间想象能力和逻辑思维能力的进一步培养．

2. 第一部分（1～6 节）逐一讨论了直线与直线、直线与平面、平面与平面的相对位置关系，特别是对平行与垂直两种特殊的位置关系进行了较为详细的研究，相继给出了它们的判定定理和所具有的性质，对一般的位置关系，通过角与距离进行定量描述．

第二部分（7～9 节）是对一些具体几何体的研究，分别研究了棱柱、棱锥和球三种重要几何体的性质、体积及表面积等，同时作为研究性课题，探讨了凸多面体的顶点数、面数及棱数之间的关系（即欧拉公式），对多面体的体积公式的推导在阅读材料中给出，供同学们自己阅读和

了解,而对于球的体积及表面积公式的推导,则采用了极限的思想方法.

3. 本章重点:(1)直线平行与垂直的判定.(2)直线与平面平行和垂直的判定与性质.(3)平面与平面平行和垂直的判定与性质.(4)空间角与距离的计算.(5)棱柱、棱锥、球的有关性质.

本章难点:(1)建立空间概念,培养空间想象能力.(2)线线平行、线面平行、面面平行的相互转化,线线垂直、线面垂直、面面垂直的相互转化,以及平行与垂直的转化.(3)作出两异面直线所成的角、直线与平面所成的角以及二面角的平面角,并进行计算.(4)对几何体中线面关系的研究.本章的关键是正确理解并掌握空间直线与平面的位置关系.

二、学法指导

首先要做好由模型到图形的过渡,逐步培养由图形想象出所对应的模型形状及其中各元素几何位置关系的能力和准确画出图形的能力,要从图形入手,有序地建立图形、文字和符号这三种数学语言的联系.其次要注意利用对比、引申、联想等方法找出平面图形与立体图形的异同及二者之间的内在联系,要善于用降维思想将空间问题转化为平面问题,在讨论平面平行与垂直时,要善于用转化思想,通过线线、线面、面面关系之间的联系来实现.

9.1 平　面

新课指南

1. 理解平面的概念，掌握平面的画法及其表示法.
2. 掌握平面的基本性质（三公理、三推论）是本节的重点.
3. 利用平面的基本性质证明共点、共线、共面等问题是本节的难点.

教材解读　精华要义

相关链接

1. 平面几何中的点、线、面.

注意：点作为基本元素，可以组成平面图形，也可以组成立体图形. 平面图形和立体图形都是空间图形.

2. 平行四边形的画法.

3. 集合中的符号：$\in$、$\notin$、$\subset$、$\not\subset$、$\cap$等.

知识详解

知识点 1　平面的概念

Ⅰ “平面”是几何中不加定义的原始概念，它是由诸如桌面、黑板面、平静的水面抽象出来的，但又区别于这些对象. 几何中平面的基本特征有两个：其一是平，其二是无限延展，即无边无际.

Ⅱ 理解“平面”的概念可与“直线”这一概念相类比. 直线的两个基本特征是直和无限延伸. 在表示直线时，我们通常画出直线的一部分，即一条线段，因为直线是无限延伸的，我们不可能画出它的全貌. 同样地，我们可以画出平面的一部分来表示平面，我们通常用平行四边形来表示平面.

如图 9 - 1 所示，当平面水平放置时，通常把表示平面的平行四边形的锐角画成 45°，一组对边画成水平线，横边画成邻边的 2 倍长；如图 9 - 2 所示，当平面竖直放置时，通常把表示平面的平行四边形的一组对边画成竖直的；如图 9 - 3 所示，当平面竖直正对我们时，则将平行四边形画成矩形.

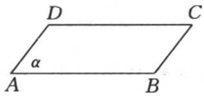


图 9 - 1

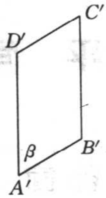


图 9 - 2

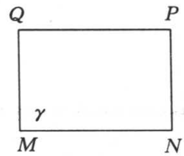
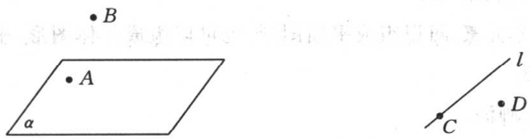


图 9 - 3

Ⅲ 平面通常用一个希腊字母 α,β,γ 等表示，也可用表示平面的平行四边形的四个(或相对的两个)顶点的字母表示，如平面 α、平面 β、平面 $ABCD$、平面 AC 等.

Ⅳ 从集合的观点来理解平面的概念，平面可认为是由点组成的集合，同时直线也是由无数个点组成的集合，因此在表示点、直线、平面之间的关系时，我们借用集合中的符号来表示. 例如：如图 9 - 4(1)所示，点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 B 在平面 α 外，记作 $B\notin\alpha$. 如图 9 - 4(2)所示，点 C 在直线 l 上，记作 $C\in l$；点 D 在直线 l 外，记作 $D\notin l$.



(1)　　　　(2)

图 9 - 4

【注意】 (1)点 $A\in$ 平面 α，按几何意义的读法读作“点 A 在平面 α 内”.

(2)作图时，若 $A\in\alpha$，则将点 A 画在表示平面 α 的平行四边形内部；若 $B\notin\alpha$，则将点 B 画在表示表面 α 的平行四边形外部.

知识点 2　平面的基本性质(重点)

Ⅰ **公理** 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

例如：把一根直尺的两端放在平滑的桌面上，则直尺上所有的点都落在桌面上，我们经常根据这个道理来检验物体的表面是否平整.

直线 l 上所有的点都在平面 α 内，就称直线 l 在平面 α 内，或者说平面 α 经过直线 l，记作 $l\subset\alpha$，否则就说直线 l 在平面 α 外，记作 $l\not\subset\alpha$.

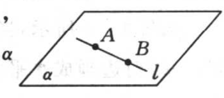


图 9 - 5

公理 1 的含义如图 9 - 5 所示，用符号表示为

$A\in l,B\in l,A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$.

【注意】 作图时，若 $l\subset\alpha$，则要将表示直线 l 的线段画在表示平面 α 的平行四边形内部.

思维拓展 直线 $l\not\subset$ 平面 α 包括哪些情况？

点拨 由公理 1 知，直线上只要有两点在平面内，则直线就在平面内，因此当 $l\not\subset\alpha$ 时，l 与 α 最多只有一个公共点，即有一个公共点或无公共点，如图 9 - 6 所示.

(1)　　(2)

图 9 - 6

Ⅱ 公理 2：如果两个平面有一个公共点，那么它们还有其他公共点，且所有这些公共点的集合是一条过这个公共点的直线.

公理 2 也可叙述为：如果两个平面有一个公共点，那么它们就有且仅有一条经过这一点的公共直线，这条直线称为平面 α 和平面 β 的交线，记作 $\alpha\cap\beta=l$.

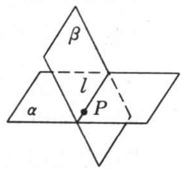


图 9 - 7

公理 2 的含义如图 9 - 7 所示，用符号表示为

$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$.

【注意】 画两个平面相交时，为使图形更美观，立体感更强，应注意以下几点：

(1)当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画.

(2)两相交平面的交线必须画出来，最好画得分别与两个平行四边形的一组对边平行.

Ⅲ 公理 3：经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面(如图 9 - 8(1)所示).

(1)　　(2)

图 9 - 8

根据以上公理，可以得出以下推论.

推论 1：经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面(如图 9 - 8(2)所示).

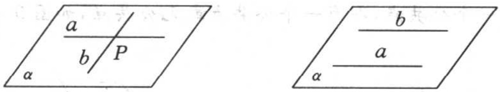
推论 1 可以用符号表示为

$A\notin a\Rightarrow$有且只有一个平面 α,使 $A\in\alpha,a\subset\alpha$.

推论 2:经过两条相交直线,有且只有一个平面(如图 9 - 9(1)所示).

推论 2 可以用符号表示为

$a\cap b=P\Rightarrow$有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha,b\subset\alpha$.



(1)　　　　(2)

图 9 - 9

【注意】 规定直线 a 与直线 b 相交于 P,记作 $a\cap b=P$,而不要写成 $a\cap b=\{P\}$.

推论 3:经过两条平行直线,有且只有一个平面(如图 9 - 9(2)所示).

推论 3 可以用符号表示为

$a\parallel b\Rightarrow$有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha,b\subset\alpha$.

推论 3 证明如下:

①存在性:由平行直线的定义,在一个平面内,两条无公共点的直线称为平行直线,则过平行直线 a,b 有一个平面.

②惟一性:在直线 b 上任取一点 B,则 $B\notin a$(否则与 $a\parallel b$ 矛盾),且 B,a 都在经过 a,b 的平面 α 内.

又由推论 1,过点 B 和直线 a 的平面只有一个.

∴过直线 a,b 的平面只有一个.

由①②可知,经过两条平行直线的平面有且只有一个.

【说明】 (1)以上三个公理是作为立体几何中进一步推理的基础,是不需证明的原始结论,我们可通过日常生活中的实例去理解并认识它们,但以后的定理(如三个推论)都必须给出严格的证明.

(2)"有且只有一个平面"也可说成"确定一个平面".

典例剖析　经典例题

基本概念题

本节基本概念题主要包括:(1)平面的概念问题;(2)平面的画法及相关问题;

(3)关于点、线、面之间关系的符号语言问题.

例 1　根据下列要求作图.

(1)一个水平放置的平面与一个竖直放置的平面相交；

(2)两个竖直放置的平面相交；

(3)两个相交的竖直平面与一个水平平面相交.

〔分析〕　水平放置与竖直放置的平面的画法都有特殊要求，作图时必须满足，同时注意两平面的相对位置关系.

解：(1)先作水平放置的平面，然后作出两平面的交线，再按交线作出竖直平面，注意被遮住的部分应画成虚线，下面给出两种画法，如图 9 - 10 所示.

(2)如图 9 - 11 所示.

(3)如图 9 - 12 所示.

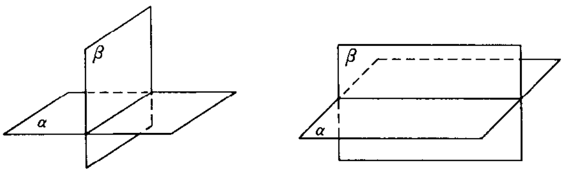


图 9 - 10

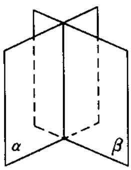


图 9 - 11

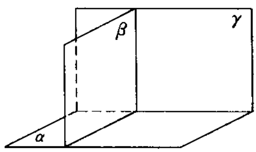
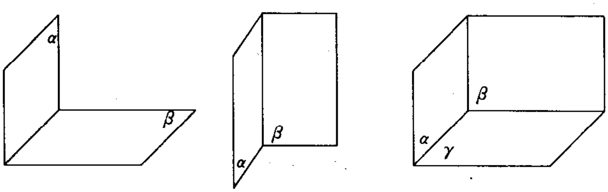


图 9 - 12

小结　画好两个相交平面的图形是画出其他较复杂立体几何图形的基础. 画两个平面相交时，若将平行四边形的一边作为交线，则图形更加简捷，如图 9 - 13 所示.



(1)　　(2)　　(3)

图 9 - 13

例 2 如图 9 - 14 所示,在正方体中,三个面 A_1C_1,A_1B,BC_1 所在平面分别记作 α,β,γ,用适当符号填空.

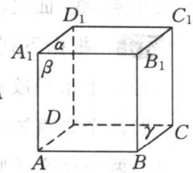


图 9 - 14

(1) A ________ α, B ________ β, C ________ γ, A ________ BC;

(2)AB ________ α,AB_1 ________ β,AC_1 ________ γ;

(3) $AB\cap AC_1=$ ________,$A_1C\cap\beta=$ ________,$\alpha\cap\beta=$ ________,$\alpha\cap\gamma=$ ________,$\beta\cap\gamma=$ ________.

〔分析〕 弄清集合中符号$\in$、$\notin$、$\subset$、$\not\subset$、$\cap$在立体几何中所表示的意义,$\in$与$\notin$用于表示点在或不在直线上或平面内,$\subset$与$\not\subset$用于表示直线在或不在平面内,$\cap$表示直线、平面之间的交点与交线.(1)A 不在平面 α 内,则 $A\notin\alpha$;B 在平面 β 内,则 $B\in\beta$;C 在平面 γ 内,则 $C\in\gamma$;A 不在直线 BC 上,所以 $A\notin BC$.(2)AB 在平面 α 外,则 $AB\not\subset\alpha$;AB_1 在平面 β 内,则 $AB_1\subset\beta$;AC_1 在平面 γ 外,则 $AC_1\not\subset\gamma$.(3) 直线 AB 与 AC_1 交于点 A,则 $AB\cap AC_1=A$;A_1C 与 β 交于点 A_1,则 $AC_1\cap\beta=A_1$;α 与 β 的交线为 A_1B_1,则 $\alpha\cap\beta=A_1B_1$;α 与 γ 的交线为 B_1C_1,则 $\alpha\cap\gamma=B_1C_1$;β 与 γ 的交线为 B_1B,则 $\beta\cap\gamma=B_1B$.

【注意】 应正确识别点、线、面的位置关系,并使用符号表示这些关系.

例 3 判断(正确的在括号内打“√”,错误的在括号内打“×”).

(1)两条直线确定一个平面. ( )

(2)经过一点的三条直线可以确定一个平面. ( )

(3)两两相交的三条直线不共面. ( )

(4)不共面的四点中,任何三点不共线. ( )

〔分析〕 (1)两条直线能否确定平面,应注意这两条直线的位置关系,不给出位置关系则要分情况讨论,才可得出结论.两条相交直线可确定一个平面,两条平行直线可确定一个平面,除此以外的任何两条直线不能确定平面.(2)经过一点的两条直线可确定一个平面,三条直线不一定能确定一个平面.(3)三条直线两两相交,若不共点时这三条直线必共面,若共点则不一定共面.(4)如果三点共线,则此三点所在直线与第四点必同在某一平面内,即四点共面.

答案:(1)× (2)× (3)× (4)√

思维拓展 由第(3)题的分析过程可知:两两相交的三条直线有时共面,有时不共面,关键在于把握住确定平面的条件.那么对于空间四条直线何时共面?何时不共面呢?

基础知识应用题

本节的基础知识应用包括：(1)公理 1 与公理 2 的直接应用；(2)用公理 3 及其推论判断平面的个数；(3)n 个平面把空间分成若干个部分的问题.

例 4　如图 9 - 15 所示，$\triangle ABC$ 中，若 AB，BC 在平面 α 内，判断 AC 是否在平面 α 内.

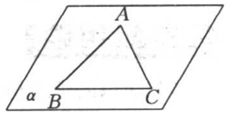


图 9 - 15

〔分析〕　若判断直线 AC 在平面 α 内，只需判断 $A\in\alpha$，且 $C\in\alpha$ 即可.

解：$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}AB\subset\alpha\\ A\in AB\end{array}\right\}\Rightarrow A\in\alpha\\ \text{同理 } C\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow$ 直线 AC 在平面 α 内.

小结　用公理 1 可以判断直线是否在平面内.

思维拓展　若三条直线两两相交且不共点，则这三条直线共面吗？

点拨　共面，按例 4 的方法，直线 AC 在 AB，BC 所确定的平面 α 内.

例 5　如图 9 - 16 所示，$\triangle ABC$ 在平面 α 外，且 $AB\cap\alpha=P$，$AC\cap\alpha=R$，$BC\cap\alpha=Q$，试证 P，Q，R 三点在一条直线上.

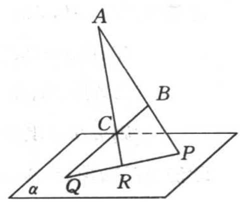


图 9 - 16

〔分析〕　若要证明 P，Q，R 三点共线，一般可依据公理 2，证明三点都在两个平面的交线上即可.

证明：由 $AB\cap\alpha=P$，故 $P\in AB$，$P\in\alpha$，

又由于 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $P\in$ 平面 ABC.

据公理 2 得，点 P 在平面 ABC 与平面 α 的交线上，

同理，可证得 R，Q 也在平面 ABC 与平面 α 的交线上.

因此，P，Q，R 三点在一条直线上.

小结　证明若干个点共线可依据公理 2，说明这些点都在两个平面的交线上.

例 6　(天津)空间不全共线的四点可确定________个平面.

〔分析〕　不全共线的四点包括以下情况：①三点共线，另一点不在直线上. ②任意三点不共线. 又分两种情况：其一，三点不共线，第四点不在其三点确定的平面内；其二，三点不共线，第四点在其三点确定的平面内.

若空间四点恰在同一个平面上，则只能确定一个平面；若空间四点不共面，则其中任意三个点必不共线，过这四个点中任意三个点均可确定惟一一个平面，共可以确定 4 个平面.

答案:1 或 4

小结 判断由所给元素(点或直线)确定平面个数时,首先应分析各元素位置关系的可能性,再依据公理 3 及其推论判断平面的个数.

【说明】 公理 3 及其推论是确定平面的理论依据.

综合应用题

本节知识的综合应用有如下几个方面:(1)点共线问题;(2)线共点问题;(3)线共面问题;(4)点共面问题.

例 7 求证:若一条直线与两条平行线都相交,则这三条直线共面.

〔分析〕 方法 1:证多线共面,一般先由已知条件,根据公理 3 及其推论确定一个平面,再根据公理 1 分别证其他直线都在此平面内.

方法 2:此题也可根据已知条件,分别作出几个平面,再证明这几个平面重合.

已知:如图 9 - 17 所示,$a /\!/ b, l \cap a = A, l \cap b = B$.

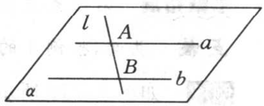


图 9 - 17

求证:a, b, l 共面.

证法 1:$\because a /\!/ b, \therefore a, b$ 确定一个平面 α,

$\because l \cap a = A, l \cap b = B, \therefore A \in \alpha, B \in \alpha$,

$\therefore AB \subset \alpha$,即 $l \subset \alpha$.

则 a, b, l 共面.

证法 2:$\because a \cap l = A, \therefore a, l$ 确定平面 α.

$\because a /\!/ b, \therefore a, b$ 确定平面 β,

由 $B \in l$,有 $B \in \alpha$,$\because b \cap l = B$,则 $B \in \beta$,因而有 $a \subset \alpha, B \in \alpha$.

同时 $a \subset \beta, B \in \beta$.

根据推论 1,经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面,

所以 α, β 重合.故 a, b, l 共面.

小结 证法 2 运用了同一法的思想.

思维拓展 如果互相平行的各直线都与一条直线相交,那么这些直线共面.

点拨 如图 9 - 18 所示,设 $a /\!/ b /\!/ c \cdots\cdots l \cap a = A, l \cap b = B, l \cap c = C \cdots\cdots$ 由例 7 知,a, b, l 共面,设 α, b, c, l 共面,设为 β,$\because$ 过两相交直线 b 与 l 有且只有一个平面,$\therefore \alpha, \beta$ 重合,即 a, b, c, l 共面.同理可得其他各平行直线都共面.

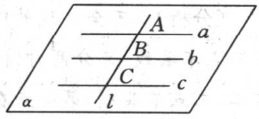


图 9 - 18

例 8 已知四条直线 a,b,c,d 两两相交，但四条直线不共点，求证 a,b,c,d 共面.

证明：(1)若其中任意三条直线不共点，如图 9-19 所示，

不妨设相交直线 a,b 确定平面 α 且直线 c 与 a,b 分别交于点 M,N，

则有 $M\in\alpha$，$N\in\alpha$，$\therefore c\subset\alpha$.

同理可证 $d\subset\alpha$. $\therefore a,b,c,d$ 共面.

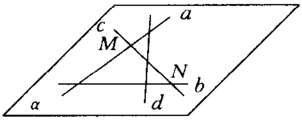


图 9-19

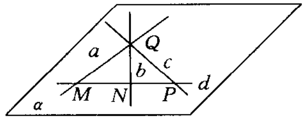


图 9-20

(2)若其中有三条直线共点，如图 9-20 所示，

不妨设 $a\cap b\cap c=Q$ 且 $d\cap a=M$，$d\cap b=N$，$d\cap c=P$.

$\because Q\notin d$，$\therefore$ 点 Q 与直线 d 确定一个平面 α.

$\therefore Q\in\alpha$，$M\in\alpha$，$\therefore a\subset\alpha$.

同理 $b\subset\alpha$，$c\subset\alpha$. $\therefore a,b,c,d$ 共面.

小结 证明多条直线共面问题，常利用公理 3 或它的三个推论先确定一个平面，然后再证明其他直线也在此平面内(常用公理 1)，证明多点共线也有类似方法. 如果构成图形的所有点都在一个平面内，这个图形叫做平面图形，本例中 a,b,c,d 构成一个平面图形.

例 9 如图 9-21 所示，已知四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，AB,BC,CD,DA 所在直线分别与平面 α 交于 E,G,F,H，求证 E,H,F,G 四点共线.

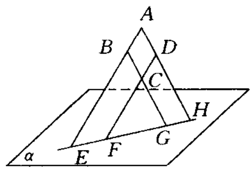


图 9-21

〔**分析**〕 先确定一条直线，再证明其他点也在这条直线上.

证明：$\because AB/\!/CD$，$\therefore AB$ 与 CD 确定一个平面 β，

$\because$ 点 E,F,G,H 分别在直线 AB,CD,BC,AD 上，

$\therefore$ 点 E,F,G,H 都在 β 内，

又点 E,F,G,H 都在 α 内，

$\therefore$ 点 E,F,G,H 在 α 与 β 的交线上.

由公理 2 知，两个有公共点的平面有且只有一条交线，故点 E,F,G,H 四点共线.