SHUXUE

数学

代数·第三册

青年自学丛书

四川人民出版社

青年自学丛书　**数　学**　代数·第三册

四川人民出版社出版　（成都盐道街三号
四川省新华书店发行　渡口新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32　印张17　字数378千
1979年9月第一版　1979年9月第一次印刷
印数：1—106,000册

书号：13118·16　定价：1.15元

前　言

“一定要极大地提高整个中华民族的科学文化水平”。这是英明领袖华主席、党中央高瞻远瞩地向全党、全军、全国各族人民发出的庄严号召。这是激动人心的动员令，这是气吞山河的宣言书，这同样是对广大青年亲切的召唤。

青年是我们的希望，是我们的未来。为了适应广大青年向科学进军的需要，我们组织编写了一套“青年自学丛书”，供广大青年自学、在校中学生课外阅读和中学教师参考。

这套“青年自学丛书”的数理化部分，共十七册，即《数学》八册（《代数》三册、《几何》三册、《三角》二册）、《物理》四册、《化学》五册。考虑到丛书具有自学的特点，使读者学后能系统掌握基础知识和基本技能，编写时注意了基本理论、基本概念、基本规律和学习难点的讲述，例题较详，习题较多，循序渐进，由浅入深；文字上努力做到生动活泼，明白易懂。同时，参照全国中小学通用教材教学大纲精神，还介绍了一些先进知识。要求通过对丛书的自学，使读者能达到高中或略高于高中的程度。

这是“青年自学丛书”《数学》的《代数》读本，讲了实数、代数式、方程和方程组、不等式、函数、指数、对数、数列、极限、排列组合、数学归纳法、二项式定理、复数、高次方程以及集合、矩阵、概率论、微积分初步等方面的内容，编成三册。

这套丛书的编写出版，得到中共成都市委宣传部的亲切关怀和有关学校的支持。四川师范学院数学系协助了丛书《数学》的审稿工作。在此，我们谨致谢意。

由于时间仓促和编者水平所限，本书内容可能有缺点或错误。鉴于当前需要迫切，先以“试用本”出版，广泛听取意见。我们热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时修订。

编　者

一九七八年三月

目　录

第八章　排列组合、数学归纳法与二项式定理

一、排列与组合

排列和组合是重要的数学基础知识，它不仅在解决很多实际问题时很有用，而且在学习某些数学知识时也要以之作为基础，譬如在概率、二项式定理等问题中就要应用这项知识．本章将在阐明排列和组合的意义的基础上，着重讲述几种常用的排列和组合的计算公式和解法．

8.1　排列的意义

我们在现实生活中，常常发现某些东西虽然它们由相同的元素组成，但因为组成元素的序位不同，它们便有了不同的意义．譬如二位数23与32，它们都由数码2与3组成，但一者2在十位，一者3在十位；一者3在个位，一者2在个位．这便构成了两个相异的二位数．又如将红色和蓝色二种小旗升上旗竿作信号，那么先升红旗后升蓝旗是一种信号；而先升蓝旗后升红旗，显然便应看作是与前一信号不同的信号．颜色虽相同，但顺序却不一样．由此可知，在现实生活中，某些东西我们不是依靠它们的组成元素来区别它们（因为它们由相同元素组成），而是依靠那些相同元素的不同序位来区别它们．由这种情况，便引出了排列问题．我们先来观察几个例子．

例1　由数字1、2、3可以排成：

(1) 多少个无重复数字的二位数?

(2) 多少个二位数?(允许重复数字).

解 (1) 我们先选定十位上的数字，然后选定个位上的数字，由下表

$$1\left<\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right.\qquad 2\left<\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right.\qquad 3\left<\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$$

便知：总共可排成 $3\times2=6$ 个无重复数字的二位数.

(2) 如果允许在十位上或个位上出现相同数字，那么由下表

$$1\left<\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right.\qquad 2\left<\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right.\qquad 3\left<\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\right.$$

便知：总共可排成 $3\times3=9$ 个允许重复数字的二位数.

例2 现有红、黄、蓝三色小旗子各一面，要将它们全体依次升上旗竿作信号，问可作出多少种不同信号?

解 如我们先升上红旗，那么第二次便只能升黄旗或蓝旗. 如第二次升的是黄旗，那么第三次便只能升蓝旗了；如第二次升的蓝旗，那么第三次便只能升黄旗了. 故先升红旗的信号有二：

$$\text{红}\left<\begin{matrix}\text{黄——蓝}\\\text{蓝——黄}\end{matrix}\right.$$

同理，先升黄旗或先升兰旗的信号也分别有二：

$$\text{黄}\left<\begin{matrix}\text{红——蓝}\\\text{蓝——红,}\end{matrix}\right.\qquad \text{蓝}\left<\begin{matrix}\text{红——黄}\\\text{黄——红.}\end{matrix}\right.$$

故总共可作出 $3\times2\times1=6$ 种不同信号.

由上面这两个具体例子，可以看出：

(1) 这两个问题有一个共同的特点：即它们都是由若干个不同元素（数字、小旗）中每次取出几个按一定顺序排成一种事物（二位数或信号）．这些事物或者由于含有不同元素而相互区别（如二位数 12 与 23）或者虽全含相同元素，但由于相同元素有不同序位，也相互区别（如二位数 12 与 21，或信号红—黄—蓝与黄—蓝—红）．象这种问题便是所谓的“排列”问题．

从 m 个不同元素当中，每次取出 n 个元素（允许重复选取），依一定顺序排成一种事物，称为从 m 个元素中每次取出 n 个元素的排列．

(2) 在第二个问题里，因为只有三面不同颜色的小旗，故无法出现重复元素．这种排列可称为不同元素的无重复排列．但在第一个问题里，数字 1、2、3 均可重复出现，故这种排列可称为不同元素的有重复排列．本章对这两种排列都要加以讨论．

例3 现有字母 a、b、c、d 四个，每次取二个作排列，问总共可作(1)无重复排列(2)有重复排列各多少个？

解 (1) 无重复排列显然有

$$a\left\langle\begin{matrix}b\\c\\d,\end{matrix}\right.\quad b\left\langle\begin{matrix}a\\c\\d,\end{matrix}\right.\quad c\left\langle\begin{matrix}a\\b\\d,\end{matrix}\right.\quad d\left\langle\begin{matrix}a\\b\\c,\end{matrix}\right.$$

共 $4\times3=12$ 个．

(2) 有重复排列显然有

$$a\left\langle\begin{matrix}a\\b\\c\\d,\end{matrix}\right.\quad b\left\langle\begin{matrix}a\\b\\c\\d,\end{matrix}\right.\quad c\left\langle\begin{matrix}a\\b\\c\\d,\end{matrix}\right.\quad d\left\langle\begin{matrix}a\\b\\c\\d,\end{matrix}\right.$$

共 $4\times4=16$ 个．

练　习　一

1．由1，2，3，4，5，6这六个数字能作成多少个2位数？其中不含重复数字有多少个？

2．在数轴上有A，B，C三点，问利用它们可确定几条有向线段？

8.2　乘法原则

排列的主要问题，在于按已知条件求出一切不同排列的种数．在前面我们是用实际作出一切符合已知条件的排列，然后确定不同排列种数的办法来解决这一问题的．但这种办法只在有较少元素时才适用，当元素较多时，这种办法就太烦．为此我们需要寻求计算不同排列的种数的公式，并且先来观察一个例子．

例1　如从甲地到乙地有三条路可走．而由乙地到丙地有二条路可走，问由甲地经乙地而到丙地，总共有多少种不同走法？

解

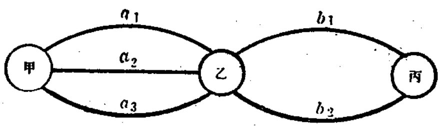
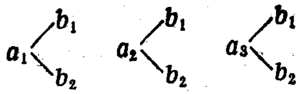


图 8.1

如用a_1，a_2，a_3表示由甲地到乙地的三条路，b_1、b_2表示由乙地到丙地的二条路．那么由甲地到乙地有三种可能的且不同的走法；而由乙地到丙地则有二种可能的且不同的走法．而且由甲地到乙地的每一种走法均可与由乙地到丙地的每种走法排成由甲地到丙地的一种走法，且与其它的由甲地到丙地的走法不同．故由甲地经乙地而到丙地，显然有：



共 $3\times2=6$ 种走法.

从这个例子中，我们可以看出：要由甲地走到丙地，需分两步走，第一步由甲地到乙地，第二步由乙地到丙地．完成第一步，有三种可能；完成第二步，有二种可能．而完成由甲地到丙地这一件事，也就有了 $3\times2=6$ 种可能．这种情况可以加以推广．只要一件事在完成它时需要分两步走，完成第一步如有 m_1 种方法，完成第一步后，再完成第二步有 m_2 种方法．并且第一步的每一种方法和第二步的每一种方法均排成一种完成这件事的方法，且这样得到的完成这件事的方法彼此不同，那么完成这件事的不同方法显然有

$$M=m_1m_2$$

种．这个结论还可进一步加以推广：

设完成某一件事需要分 n 步走，且完成第一步有 m_1 种方法；完成第一步后，再完成第二步有 m_2 种方法；在完成第二步后，再完成第三步有 m_3 种方法；……而在完成前（$n-1$）步后，再完成第 n 步有 m_n 种方法，那么显然完成这件事共有

$$M=m_1m_2\cdots\cdots m_n$$

种方法．

因为表达完成事件的方法的种数的式子为一个乘积，所以我们称这种计算原则为乘法原则．

现在我们利用这个原则来计算一个问题．

例2 用1，2，3，4，5五个数字可以排成无重复的三位数多少个？有重复的三位数多少个？

解 因为排在百位上的数字，有5种选定方法；当已排定百位上的数字之后，则十位上的数字，就只有4种选定方

法；当已排定百位和十位上的数字之后，则个位上的数字，就只有3种选定方法．一当个位上数字排定，便已成三位数．故依乘法原则，无重复的三位数的总数为

$$M=5\times4\times3=60$$

如果允许取重复数字，那么取百位数字有5种方法．同样取十位和个位数字都分别有5种方法，故依乘法原则，有重复的三位数的总数为

$$M'=5\times5\times5=125$$

乘法原则是很重要的，它是我们建立排列的计算公式的基础，我们要给予充分注意．

练　习　二

1．从a,b,c,d,e五个字母中，每次取出（1）2个；（2）3个；（3）4个；（4）5个不同字母，求所作成的各种排列个数．

2．用数字1，2，3，4可以排成多少个（1）二位数？（2）三位数？（3）四位数？其中不含重复数字的各有多少？

3．6件不同的商品，要在橱窗里排成一排，问共有多少种不同排法？

8.3　无重复的排列

有了乘法原则，现在我们就可以在它的基础上来建立排列的计算公式，首先我们来讨论无重复的排列．

假定有m个不同的元素，我们要在它们之中每次取n个（$1\leqslant n\leqslant m$）不同元素来作成排列，那么不同排列的总数怎样计算呢？

显然，排在第一位上的元素，有m种选定方法；当第一位已排定元素，则排在第二位上的元素，就只有$(m-1)$种方

法；当第一和第二位均已排定元素，则第三位上的元素，就只有（$m-2$）种选定方法；依此类推，当第一至第（$n-1$）位均已排定元素时，则第 n 位上的元素，就只有 $m-(n-1)$ 种选定方法，故依乘法原则，知无重复的 n 个元素的不同排列的种数为：

$$m(m-1)(m-2)\cdots\cdots[m-(n-1)]$$
$$=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)$$

我们将这个种数记为 A_m^n，于是由 m 个不同元素中每次取 n 个不同元素作成的不同排列的种数的计算公式便是：

$$A_m^n=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1) \qquad (1)$$

这个公式告诉我们：从 m 个不同元素里，每次取 n 个不同元素作成的不同排列的种数，等于 n 个连续自然数的乘积，其中最大的一个乘数就是 m.

我们要注意，在排列的计算公式(1)里，n 必须适合条件：

$$1\leqslant n\leqslant m$$

当 $1\leqslant n<m$时，我们称这种排列为“选排列”，因为当作成排列时，排列的 n 个元素有时是有选择余地的．一旦

$$n=m$$

那么，我们称此时的排列为“全排列”，因为当作成每一排列时，这个排列包含什么元素是无选择余地的．全排列的不同排列种数记为 P_m，故全排列的种数的计算公式为：

$$P_m=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$$

这个公式告诉我们：从 m 个不同元素，每次全取作成的不同排列种数，就等于由 1 到 m 这 m 个连续自然数的乘积．

为方便起见，我们将由 1 到 m 这 m 个连续自然数的乘积记为 $m!$（读为 m 阶乘）．于是全排列的种数的计算公式便成为：

$$P_m = m! \qquad (2)$$

为了以后解题需要，先练习一下排列的计算公式.

例1 计算：$\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_9^3}+A_9^2$ 的值.

解 $\dfrac{A_9^5+A_9^4}{A_9^3}+A_9^2=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5+9\cdot8\cdot7\cdot6}{9\cdot8\cdot7}+9\cdot8$

$$=\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6(5+1)}{9\cdot8\cdot7}+9.8=36+72=108.$$

例2 有十个中学举行蓝球联赛，规定每一个校队和别队比赛时，都必须在本校球场和客队学校球场各比赛一次，问这十队之间一共比赛多少场？

解 因为对每一个蓝球队来说，既要在自己学校的球场内与别队比赛，也要在别队的学校的球场内与别队比赛．因此对任何二队来讲，在它们相遇的两次比赛中，双方都是一次作主队，一次作客队，这相当于依主队、客队的顺序将二队排列．因此在这里，在10队中，每次取出二个队作成排列，不同排列种数便是本题的解．故知这十个队比赛场数为

$$A_{10}^2=10.9=90$$

答：这十个队共比赛90场.

例3 现有大写字母 $A,B,C,\cdots\cdots m$ 个，小写字母 $a,b,c,\cdots\cdots n$ 个，要将它们全排起来，但规定必以一个大写字母排头，一个小写字母排尾，问不同排列共有多少种？

解 当排定一个大写字母在头，一个小写字母在尾时，那么排在中间的字母只剩下 $(m+n-2)$ 个，这 $(m+n-2)$ 个字母现在需要作全排列，其不同排列种数为 P_{m+n-2}．又因排头的大写字母有 m 种选定方法，排尾小写字母有 n 种选定方向，故依乘法原则，知这里不同的全排列的种数为

$$m \cdot P_{m+n-2} \cdot n = (m+n-2)! \cdot mn$$

答：不同排列数为$(m+n-2)! \cdot mn$.

例4 现有元素$a_1a_2a_3 \cdots\cdots a_{10}$十个，需将它们作全排列，但规定$a_1a_2a_3$必须相连地排列在一起，问这样的不同排列的种数是多少？

解 $a_1a_2a_3$这三个元素相连地排在一起，这相当于将这三个元素作全排列，故将它们排在一起的不同排列种数为P_3，无论这三个元素排列在那里，当它们排定之后，还剩下7个元素需要作全排列，这样的不同排列的种数又为P_7. 又因为$a_1a_2a_3$这三个元素相连地排在一起时，其第一个元素可处于第一至第八这几个位置的任何一位上，故依乘法原则，知所求不同全排列种数为：

$$8P_3P_7 = 8 \times 3! \times 7! = 241,920$$

答：共有241,920种不同排列.

例4 在2000到7000之间，有多少个没有重复数字，且能为5整除的奇数.

解 适合题意的数，必须具备条件：

(1) 个位上是5；

(2) 千位上必须是2、3、4、6中之一；

(3) 百位和十位上，则为除去已排在千位个位上的二数以外的8个数中的任何二个.

适合(1)的排法只有一种，适合(2)的排法有A_4^1种，适合(3)的排法有A_8^2种，故依乘法原则，适合要求的数共有

$$A_4^1 \cdot A_8^2 = 4 \times 56 = 224(个)$$

答：在2000与7000之间能为5整除的奇数共224个.

例5 在3000与8000之间，有多少个无重复数字的奇

数？

解 适合题意的数，必须具备条件：

(1) 个位上必须是 1，3，5，7，9 中之一．

(2) 千位上必须是 3，4，5，6，7 中之一．

(3) (1) 与(2) 中有重复的数字 3，5，7 不允许在排列中重复出现．

(4) 百位、十位上是除去已排在千位，个位上的二数以外的 8 个数中的任何二个．

为了符合条件(3)，我们进一步将排在千位上的数字分为偶数和奇数二类，并分类排列，于是当千位上排偶数时，有 A_2^1 种排法，个位上全为奇数，故有 A_5^1 种排法，其它二位上则有 A_8^2 种排法，故这一类排法有

$$A_5^1\cdot A_2^1\cdot A_8^2\text{个}$$

当千位上为奇数时，有 A_3^1 种排法，而个位上，为了避免重复，便只有 A_4^1 种排法了．其它二位仍有 A_8^2种排法．故这一类排法有 $A_3^1\cdot A_4^1\cdot A_8^2$(个)．

于是总共可排成适合题意的数有：

$$\begin{aligned}&A_5^1A_2^1A_8^2+A_3^1A_4^1A_8^2\\&=(A_5^1A_2^1+A_3^1A_4^1)A_8^2\\&=(5\times2+3\times4)\times8\times7\\&=1232(\text{个})\end{aligned}$$

答：一共可排成适合题意的数 1232 个．

练　习　三

1．计算以下各式的值

(1) A_5^3；　　(2) $A_4^2+A_5^3$；

(3) $A_6^3-A_5^2$；　　(4) $A_7^3A_5^2$；

(5) $\dfrac{2A_6^3}{A_4^3}$.

2．计算下列各式的值

(1) $\dfrac{A_7^6+A_7^5}{A_7^4}$;　　(2) $\dfrac{A_6^4+A_6^5}{A_4^3-A_4^2}$;

(3) $\dfrac{A_3^1+A_3^2+A_3^3}{A_5^1}$;　　(4) $(A_4^2+A_3^1)A_4^3$.

3．用 1，2，3，4，5，6，7 这 7 个数字，可以组成多少个无重复数字的 3 位数或 4 位数？

4，某铁路线一共有 50 个大小车站，铁路局要为这条线路准备几种车票？

5．有不同颜色的小旗 6 面，现在要取出 3 面升上旗竿作信号，问可以构成多少种不同信号？

6．有小木板四块和颜色五种，需要给木板涂色，每次涂色中无二块小板同色，问有几种不同涂法。

7．计算 $\dfrac{9!+6\cdot 6!}{7!-6!}$ 的值

8．求证 (1) $P_{n+1}-P_n=nP_n$;　　(2) $P_8-8P_7+7P_6=P_7$;

(3) $16P_3=P_5-P_4$.

8.4　加法原则

和使用乘法原则一样，在排列组合问题中，还需要使用加法原则．下面举一个例子来说明什么是加法原则．

例1　有红、黄、蓝色小旗各一面，现在要将它们升上旗竿作信号，问可作出多少种不同信号？

解　在作出信号时，显然有以下三种情况：

(1) 只用一面小旗的信号有 $A_3^1=3$ 种，

(2) 用二面小旗的信号有 $A_3^2=3\times 2=6$ 种，

(3) 三面小旗全用的信号有 $A_3^3=6$ 种．