高中自学辅导

数学

赵希愚 主编

科学技术文献出版社

高中自学辅导

数学

主编　赵希愚

编者　赵希愚　李方烈　殷慧中

科学技术文献出版社

内 容 简 介

本书依据国家教委颁发的全日制中学《数学教学大纲》编写，目的在于帮助高中学生和广大社会青年全面、系统地掌握数学的基础知识和基本技能，进一步提高分析问题和解决问题的能力。全书分为一、二两篇。第一篇系统地总结和分析了各科的基础知识和基本技能及其应用；第二篇则着重介绍了基本的数学思想方法和思维方法；书中附有相当数量的练习及答案和提示。

高中自学辅导数学

赵希愚 主编

科学技术文献出版社出版

北京昌平兴华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

787×1092毫米32开本　印张：15.25　字数：337千字

1990年2月北京第一版第一次印刷

印数：1—20000册

科技新书目：202-248

ISBN 7-5023-1226-9/G·382

定价：4.50 元

目　录

第一篇

第二篇

第 一 篇

第一讲 函 数 概 念

函数是中学数学中最重要的基本概念之一。中学数学中许多内容与函数概念有关，它又是进一步学习高等数学的基础。同时通过它对培养学生应用辩证唯物主义观点去观察和分析问题有重大的帮助。因此，必须要把函数部分内容有重点地复习好．其中首先要复习好的是函数的基本概念。对函数概念本质的理解和应用要抓住下面几个问题和有关方法。

1. 函数概念的认识

在高中阶段，函数概念是用集合与映射的观点建立的．

在某个变化过程中有两个变量x和y，变量x的取值范围是非空数集A，变量y的取值范围是非空数集B，f是集合A到集合B的一个映射且满足集合B中任一元素在集合A中都有原象，变量x、y的这种关系叫作函数关系，并称变量y是变量x的函数，x叫作自变量，y叫作因变量．集合A叫作函数的定义域，集合B叫作函数的值域．

函数概念的主线是集合——映射——函数．在复习中一定要真正理解教材的知识结构．

集合 → 映射 $f: A\to B$ → 一一映射 $f: A\to B$ → 逆映射 $f^{-1}: B\to A$

映射 $f: A\to B$ ↓ 函数 $y=f(x)$（f是映射）

一一映射 $f: A\to B$ ↓ 函数 $y=f(x)$（f是一一映射）

逆映射 $f^{-1}: B\to A$ ↓ 反函数f^{-1}所确定的函数 $y=f^{-1}(x)$

函数 $y=f(x)$（f是映射）→ 函数 $y=f(x)$（f是一一映射）→ 反函数f^{-1}所确定的函数 $y=f^{-1}(x)$

只有掌握概念的来龙去脉，才能有助于了解各概念的形成过程及相互的联系，才能形成清晰的认识和深刻的理解。

2. 函数概念的三要素

由函数的概念可知，研究函数是以定义域和值域为其重要前提的。但确定一个函数，还需有从定义域到值域的一个映射，且这个映射满足值域中的任一元素，在定义域中都有原象。因此确定一个函数包括以下三个要素。

(1) 函数的定义域——自变量的允许值范围；

(2) 函数的值域——因变量的可取值范围；

(3) 对应关系——从定义域的集合到值域的一个映射。由它使每一个自变量的值对应唯一确定的函数值。

正确地掌握函数概念的三要素，将为进一步掌握函数的图象、性质及其应用，打下一个比较扎实的基础。否则，如果我们对某一类函数不是首先去分析它的三要素，而急于去画图或解题，往往会引起误解或严重错误。以下就这个问题举例说明：

例1. 变量x的取值集合A为$(-\infty, +\infty)$，变量y的取值集合B为$(-\infty, +\infty)$，对应关系$f: x\to y=e^x$。问变量y是不是变量x的函数？

解：变量y不是变量x的函数。因为这个映射f不满足集合B中每一个元素在集合A中都有原象，所以，变量y不是变量x的函数。

例2. 选择题*：与函数$y=x$有相同图象的一个函数是（ ）。

---

* 选择题都为给出了代号为A、B、C、D的结论，其中只有一个结论是正确的。

(A) $y=\sqrt{x^2}$　　　(B) $y=\dfrac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$，（其中$a>0$，$a\neq 1$）

(D) $y=\log_a a^x$，（其中$a>0$，$a\neq 1$）

解：(A)值域不同，(B)、(C)定义域不同，故选(D)．

说明：函数的定义域、值域不同，两函数就不一样，但是，如果定义域相同，值域也相同的两个函数不一定是同一个函数．如，$y=\sin x$与$y=\cos x$的定义域都是R，值域都是〔-1，1〕，但它们的对应关系不同，它们不是同一函数．

例3． 作函数 $y=10^{\lg x}$ 的图象．

解：因为$10^{\lg x}=x(x>0)$，所以 $y=10^{\lg x}$和$y=x$，当 $x>0$ 时，是同一个函数．故作$y=10^{\lg x}$的图象只要作$y=x$ $(x>0)$即可，它的图象如图1-1-1所示．

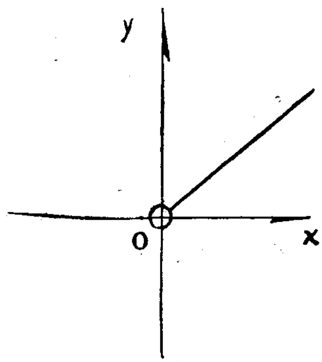

图1-1-1

说明：通过本例题告诉我们，当函数式可以化简时，要注意化简后函数的定义域必须和原来函数的定义域相同，按照化简后的函数式作图时，一定要注意函数图象只能在原来函数的定义域范围之内．

例4． 解不等式　$\log_a(3x^2)>\log_a(2-5x)$

错解：当$a>1$时，原不等式化为

$$3x^2>2-5x,$$

即　$3x^2+5x-2>0$，

解得　$x>\dfrac{1}{3}$或$x<-2$．

当 $0<a<1$ 时，原不等式化为

$$3x^2<2-5x$$

即 $3x^2+5x-2<0$

解得 $-2<x<\frac{1}{3}$.

∴ 当 $a>1$ 时，原不等式的解集为

$$\left\{x \mid x>\frac{1}{3}\text{或}x<-2\right\}$$

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为

$$\left\{x \mid -2<x<\frac{1}{3}\right\}$$

分析 函数 $\log_a(3x^2)$ 的定义域：$x\neq 0$ 的一切实数，函数 $\log_a(2-5x)$ 的定义域：$x<\frac{2}{5}$ 的一切实数.

所以 不等式 $\log_a(3x^2)>\log_a(2-5x)$ 中 x 的取值范围是：$x\in(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{2}{5}\right)$.

上述错解忽略了函数定义域这个潜在条件.

正确结论是：

当 $a>1$ 时，原不等式的解集为

$$\left\{x \mid x>\frac{1}{3}\text{或}x<-2\right\}\cap\left\{x \mid x<0\text{ 或 }0<x<\frac{2}{5}\right\}$$

即为 $\left\{x \mid x<-2\text{或}\frac{1}{3}<x<\frac{2}{5}\right\}$

当 $0<a<1$ 时，原不等式的解集为

$$\left\{x \mid -2<x<\frac{1}{3}\right\}\cap\left\{x \mid x<0\text{ 或 }0<x<\frac{2}{5}\right\}$$

即为 $\left\{x \mid -2<x<0\text{ 或 }0<x<\frac{1}{3}\right\}$

例5. 解方程 $3\log_{(x-1)}(x+1)$

$=\log_{(x-1)}(5x^2+4x-1)$

分析 首先要求出方程两边函数的公共定义域，在此定义域中对原方程进行变形和求解.

解：方程两边函数定义域由以下不等式组确定

$$\begin{cases} x+1>0 \\ 5x^2+4x-1>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x>-1 \\ x>\dfrac{1}{5}\text{或}x<-1 \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

∴ 两边函数公共定义域为$(1,2)\cup(2,+\infty)$

在此定义域下原方程变形为

$$\log_{(x-1)}(x+1)^3=\log_{(x-1)}(5x^2+4x-1)$$

得 $(x+1)^3=5x^2+4x-1$

即 $x^3-2x^2-x+2=0$

$(x-1)(x+1)(x-2)=0$

∴ $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=2$

因为$x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$

所以原方程无解.

例6. 设x_1，x_2为方程$4x^2-4mx+2m+3=0$的二实根，问m为何值时，$x_1^2+x_2^2$有最小值，并求出这个最小

值.

解：$\because x_1, x_2$为方程$4x^2-4mx+2m+3=0$的二实根，

$\therefore \quad \triangle=(-4m)^2-4\times4(2m+3)\geqslant0$

即 $\quad m^2-2m-3\geqslant0$

解得 $\quad m\leqslant-1$或$m\geqslant3$

由韦达定理知$\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2m+3}{4}\end{cases}$

$$y=x_1^2+y_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

$$=m^2-2\times\frac{2m+3}{4}=m^2-m-\frac{3}{2}$$

故 $\quad y=m^2-m-\frac{3}{2}$的定义域为

$$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$$

$\because \quad a=1$，而$m=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$不在$m$取值范围内，因此，应考虑$y=m^2-m-\frac{3}{2}$在单调区间$(-\infty,-1]$及$[3,+\infty)$的端点值：

当$m=-1$时，$y=\frac{1}{2}$，当$m=3$时，$y=\frac{9}{2}$

$\therefore \quad$ 当$m=-1$时，y最小值为$\frac{1}{2}$.

即 $\quad {x_1}^2+{x_2}^2$最小值为$\frac{1}{2}$.

说明：解此题过程中两实根存在的前提条件$\triangle\geqslant0$，即$m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$是必需重视的，如果忽视这个前提条件就会产生两种典型错误，一种是硬套二次函数的最值公式得$m=\frac{1}{2}$时，${x_1}^2+{x_2}^2=-\frac{7}{4}$为最小值；另一种错

误较隐蔽，解题者知道，因为两实数平方和不得为负数，故$x_1^2+x_2^2=-\frac{7}{4}$是错误的．于是令$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}=0$得$m=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$，此时，$x_1^2+x_2^2$有最小值零．表面上看来似乎有道理，其实这结论自相矛盾，事实上，在实数范围内$x_1^2+x_2^2=0$可推出$x_1=x_2=0$，代入原方程必得$m=-\frac{3}{2}$与$m=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$矛盾．由$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$均不属于$m$的允许值的范围，即它们使得原方程无实根，所以这两种方法求得的结果都是错误的。

从以上几个例题，我们可以体会到在研究函数图象、函数式变形化简、解不等式或方程及求函数最值等方面都要充分考虑定义域的作用，否则会出现不严密甚至是错误的现象。

3． 求函数定义域的方法

函数的定义域就是指自变量的允许值范围．因此，寻找函数定义域就是分析自变量的约束条件．根据已学的内容，求定义域的方法应掌握以下规则：

如果给定函数是由解析式给出的，则可以从所给的解析式在什么情况下是有意义的来确定函数定义域．一般地，

（1）在整式中自变量不受任何条件的约束，即$x\in R$；

（2）分式中分母不为零；

（3）偶次根式中被开方数（式）非负；

（4）对数中的真数大于零，底数大于零且不等于1；

（5）解析式中出现三角函数和反三角函数时应注意三角函数和反三角函数的定义域；

（6）解析式是上述几种类型的组合式，则取公共定义域。

如果所给的函数是实际问题，则应该根据实际问题的具体约束条件，来确定函数的定义域．

由此可见，求函数定义域的问题实际上归结为解一元不等式或一元不等式组的问题．

例7． 求下列函数的定义域．

(1) $y=\sqrt{4x^2-x-3}$

(2) $y=\dfrac{\sqrt{2-3x}}{3x+1}-\lg(x+1)$

(3) $y=\log_{(2x-1)}(3x-2)$

(4) $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{1-\lg\sin x}$

(5) $y=2\arccos(2\sin x)$

解：(1) 由 $4x^2-x-3\geqslant 0$

$$(4x+3)(x-1)\geqslant 0$$

解得函数的定义域为

$$\left\{x \mid x\leqslant -\frac{3}{4} \text{ 或} x\geqslant 1\right\}$$

(2) 自变量x应满足下列条件．

$$\begin{cases}2-3x\geqslant 0\\3x+1\neq 0\\3x+1>0\end{cases}$$

分别解得 $\begin{cases}x\leqslant \dfrac{2}{3}\\x\neq -\dfrac{1}{3}\\x>-1\end{cases}$

∴ 函数的定义域为

$$\left\{x \mid -1<x<-\frac{1}{3} \text{或} -\frac{1}{3}<x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$$

(3) 自变量x应满足下列条件：

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ 2x-1 \neq 1 \\ 3x-2>0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x \neq 1 \\ x>\frac{2}{3} \end{cases}$$

∴ 函数的定义域为 $x>\frac{2}{3}$且$x \neq 1$。

(4) 自变量x应满足下列条件：

$$\begin{cases} 16-x^2 \geqslant 0 \\ 1-\lg\sin x \neq 0 \\ \sin x>0 \end{cases}$$

即 $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi, \quad k \in Z \end{cases}$

∴ 函数的定义域为 $(-4,-\pi) \cup (0,\pi)$。

(5) 自变量x应满足条件：

$-1 \leqslant 2\sin x \leqslant 1$

即 $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \frac{1}{2}$

利用单位圆可知函数的定义域为

$$k\pi-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant k\pi+\frac{\pi}{6} \quad (k \in Z)$$

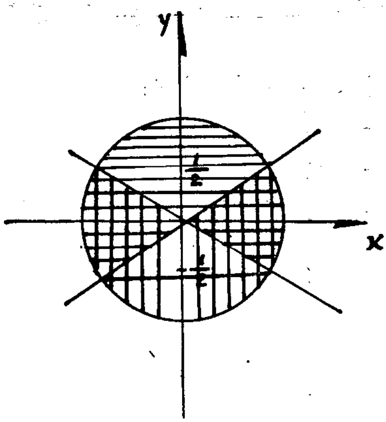

图1-1-2

说明：表示函数的定义域（也包括值域）的方式是多样的，通常有三种：不等式、区间、集合，如题中无特殊要求，可随意用其中一种方式.

例8. 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-5}}$

(2) $y=\sqrt{\frac{1}{25}-(0.2)^{x^2-x}}$

(3) $y=\sqrt{\log_a(x-5)}$

(4) $y=\sqrt{9-a^x}$，$(a>0$，且$a\neq1)$

(5) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg} x}$

解：(1) 由$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-5}\geqslant0$

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{x-5}\geqslant\log_{\frac{1}{2}}1$$

$\because$ 函数$y=\log_{\frac{1}{2}}x$为减函数，且对数要有意义，自变量x应满足条件：

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-5}\leqslant 1\\[2ex]\dfrac{x+1}{x-5}>0\end{cases}$$

解得 $x<5$ 且$x<-1$或$x>5$

$\therefore$ 函数的定义域为$(-\infty,-1)$.

(2) 由$\dfrac{1}{25}-(0.2)^{x^2-x}\geqslant 0$

整理得 $(0.2)^{x^2-x}\leqslant(0.2)^2$

$\because$ 函数$y=(0.2)^x$为减函数，

$\therefore$ $x^2-x\geqslant 2$ 即 $x^2-x-2\geqslant 0$

$\therefore$ 函数定义域为$\{x\,|\,x\leqslant -1$或$x\geqslant 2\}$

(3) 由$\log_a(x-5)\geqslant 0$ 即

$\log_a(x-5)\geqslant\log_a 1$

当$a>1$时，$x-5\geqslant 1$ $\therefore$ $x\geqslant 6$

当$0<a<1$时，$0<x-5\leqslant 1$，$\therefore$ $5<x\leqslant 6$

$\therefore$ 函数的定义域为

当$a>1$时，$x\in[6,+\infty)$，当$0<a<1$时，$x\in(5,6]$

(4) 由$9-a^x\geqslant 0$

$a^x\leqslant a^{\log_a 9}$

$\therefore$ 函数的定义域为

当$a>1$时，$x\leqslant\log_a 9$

当$0<a<1$时，$x\geqslant\log_a 9$

(5) 自变量x应满足条件：

$$\begin{cases} \sin x \geqslant 0 \\ \operatorname{tg} x \geqslant 0 \\ x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} 2k\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi + \pi \\ k\pi \leqslant x < k\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

利用单位圆可知函数定义域为

$$\left\{ x \mid 2k\pi \leqslant x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{或} x = (2k+1)\pi, k \in Z \right\}$$

例9. 求下列函数的定义域

(1) $y = \lg(2^{2x+3} - 4^{2x} - 12)$

(2) $y = \log_2 \log_{\frac{1}{2}}{}^2(x+1)$

(3) $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$

解：(1) 由 $2^{2x+3} - 4^{2x} - 12 > 0$ 得

$(4^x)^2 - 8 \times 4^x + 12 < 0$

所得 $2 < 4^x < 6$

$\therefore$ $4^{\frac{1}{2}} < 4^x < 4^{\log_4 6}$

$\because$ 函数 $y = 4^x$ 为增函数

$\therefore$ 函数定义域为 $\left\{ x \mid \dfrac{1}{2} < x < \log_4 6 \right\}$

(2) 自变量 x 应满足条件：

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 函数定义域为 $\{x \mid x > -1 \text{且} x \neq 0\}$