

高等学校教学用书

自动控制原理

魏泽国 路世瑞 孟宪家 编

煤炭工业出版社

高等学校教学用书

自动控制原理

魏泽国 路世瑞 孟宪家 编



煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书只介绍自动控制理论中经典部分的内容,全书共分八章,包括自动控制系统的基本概念、自动控制系统的数学模型、时域响应法、根轨迹法、频率响应法、自动控制系统的设计、非线性控制系统的分析和采样控制系统。

本书作为高等院校煤矿自动化电气化专业的教材,或者供自动控制理论中经典部分学时在100左右的其它专业作教材使用。也可供从事自动控制系统的设计和工矿企业中从事有关专业的工程技术人员参考。

责任编辑:胡玉雁

高等学校教学用书
自动控制原理
魏泽国 路世瑞 孟宪家 编

煤炭工业出版社 出版
(北京安定门外和平里北街21号)
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ 印张 $22^{1/4}$
字数531千字 印数1—9,300
1986年4月第1版 1986年4月第1次印刷
书号15035·2793 定价3.65元

前 言

在现代科学技术发展过程中，自动控制起着日益增长的重要作用。在工业生产中，为提高产品的数量和质量，常需要对压力、温度、流量、电压和转速等参数进行自动控制，为此，设计了各种各样的控制系统。例如，在机械制造业中，正在使用和发展着的机床设备的程序控制和计算机控制。在煤矿企业中，矿井提升机、电铲和采煤机等都设有自动调节系统，保证了很高的精度和效率；特别是国内外研制的新型提升自动控制设备，有的已达到性能相当完善的无人操作的水平。在冶金、化工、轻工业等其它各行业，也都广泛使用着自动控制技术，特别在现代空间技术、武器系统及其它尖端技术中，自动控制的重要作用更是人所共知的。

自动控制理论包括经典的和现代的两个部分。本书只讨论经典理论部分，它是建立在传递函数基础之上的，主要在频率域中分析和综合控制系统；对于线性的、单变量的系统，经典理论是很有成效的，它大约在五十年代已经成熟。

本书的内容，主要是介绍经典控制理论中的基本概念、基本原理和一些基本分析方法与设计方法，并且重点讨论线性控制系统。对非线性控制系统和采样控制系统，也做了一些介绍。全书共分八章，它们是：自动控制系统的概念、自动控制系统数学模型、时域响应法、根轨迹法、频域响应法、自动控制系统的设计、非线性控制系统和采样控制系统。

本书讲授时间约100学时。在讲授时根据具体情况对有些内容可以酌情增减。

本书第一、二、八章由魏泽国编写；第三、四章由孟宪家编写；第五、六、七章由路世瑞编写。全书由魏泽国主编，许世范老师为主审，在审校书稿时许老师提出了许多宝贵的意见，在此我们表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中一定有不少欠妥和谬误之处，恳请读者予以批评指正。

编 者

1983. 12于西安

目 录

第一章 自动控制系统的基本概念	1
第一节 开环控制和闭环控制	1
第二节 自动控制系统的组成及术语	4
第三节 自动控制系统的分类	5
第四节 对自动控制系统性能的要求及本课程的基本内容和任务	6
习题	8
第二章 自动控制系统的数学模型	9
第一节 引言	9
第二节 自动控制系统微分方程式的建立	9
第三节 非线性特性的线性化	13
第四节 拉普拉斯变换和传递函数	16
第五节 典型环节及其传递函数	24
第六节 控制系统的方块图及其等效变换	33
第七节 信号流图	42
习题	49
第三章 时域响应法	52
第一节 典型输入信号及暂态响应性能指标	52
第二节 二阶系统的时域分析	56
第三节 高阶系统的单位阶跃响应	65
第四节 系统对任意参考输入信号的暂态响应	67
第五节 自动控制系统的稳定性	69
第六节 自动控制系统的稳态误差	78
习题	88
第四章 根轨迹法	90
第一节 根轨迹的概念	90
第二节 绘制根轨迹的规则	93
第三节 参数根轨迹	104
第四节 增加开环极零点对根轨迹的影响	108
第五节 非最小相位系统的根轨迹	114
第六节 滞后系统的根轨迹	115
第七节 利用根轨迹确定系统的暂态响应性能指标	118
习题	124
第五章 频率响应法	126
第一节 频率响应	126
第二节 典型环节和控制系统的频率响应	132
第三节 频率响应与稳定性的关系——奈魁斯特稳定判据	156
第四节 频率响应与稳态响应的关系	167

第五节	频率响应与暂态响应的关系	171
第六节	线性控制系统的频率响应法分析	180
习题		191
第六章	自动控制系统的设计	194
第一节	引言	194
第二节	校正装置	196
第三节	自动控制系统的根轨迹法设计	207
第四节	自动控制系统的频率响应法设计	218
习题		239
第七章	非线性控制系统的分析	241
第一节	引言	241
第二节	描述函数的概念及常见非线性元件的描述函数	242
第三节	非线性控制系统的描述函数法分析	253
第四节	相平面的概念及相轨迹的作图方法	259
第五节	非线性控制系统的相平面法分析	275
习题		289
第八章	采样控制系统	291
第一节	引言	291
第二节	采样过程及采样定理	294
第三节	信号恢复	298
第四节	z 变换	300
第五节	线性差分方程式的解	310
第六节	脉冲传递函数	313
第七节	采样控制系统的时域法分析	321
第八节	采样控制系统的根轨迹法和频率响应法分析	337
第九节	采样控制系统与数字计算机控制系统的校正	341
习题		348
主要参考文献		349

第一章 自动控制系统的基本概念

第一节 开环控制和闭环控制

一、自动控制和自动控制系统

所谓自动控制就是在没有人直接参与的情况下,利用控制装置使控制对象,如机器设备、生产过程中的位移、速度、温度、电压、电流以及某些化合物的成份等物理量自动地按照预定规律运行或变化。例如要求电网电压和频率自动维持恒定不变;要求电动机的转速恒定不变;要求矿井提升机按照给定的速度图运行;要求采煤机自动维持功率恒定不变;以及国防科学中要求炮火自动瞄准目标有效打击敌人;无人驾驶飞机自动按预定的航道飞行完成特定的任务等等,都需要应用自动控制技术来完成。这种能对被控制对象的工作状态进行自动控制的系统称为自动控制系统,它一般由控制装置和被控对象组成。自动控制原理是对自动控制系统进行分析和设计的一般理论。

所谓自动控制系统的分析就是在已知控制系统结构型式及参数的基础上,求取系统的各项性能指标,找出这些性能指标与系统参数之间的关系。自动控制系统的设计则是在给定被控对象特性的基础上,按照对控制系统所应具有的性能指标,寻求能够全面满足这些性能指标要求的控制方案及合理确定控制器的参数。

自动控制系统可分为开环控制系统和闭环控制系统。

二、开环控制系统

只有参考输入量对输出量的前向控制作用,没有输出量反向影响输入控制作用能力的系统称为开环控制系统。图1-1 a 所表示的可控硅供电直流电动机(SCR-D)拖动系统就是开环控制系统的一个例子,其中参考输入量

(控制量)是 u_r ;输出量是转速 n 。在这个系统中,对参考输入量的每一个值,都对应有一个固定的工作状态和输出;当改变参考输入量时,可以改变系统的状态和输出。由图可知,该系统只有输入量对输出量的前向控制作用,没有输出量反向影响输入量的控制作用,所以称它为开环控制系统,其示意方块图如图1-1 b 所示。

根据生产工艺的要求,通常希望电动机的转速恒定或者按照预定的规律变化;但由于电动机负载的改变,供电网电压及频率的波动,以及由于环境变化系统内部参数的改变等原因,常使电动机的转速偏离预定的要求,所有这些使转速偏离预定要求的因素称为扰动或干扰。通过分析可知,负载的变化是

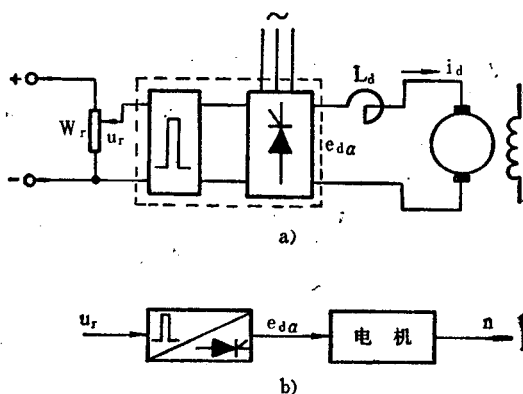


图 1-1 开环控制系统的例子

a—SCR-D开环控制系统; b—SCR-D开环控制系统
示意方块图

最常见最主要的扰动。例如，在图 1-1 所示的开环系统中，当负载变化（即外来扰动）时，电动机的转速也随之变化，扰动量越大，转速变化也越大。开环控制系统在控制过程中，对可能出现的偏离预定要求的误差没有任何修正能力，因此其抗干扰能力较差，控制精度较低，常用在调速性能要求不高的场合。

三、闭环控制系统

如果要求图 1-1 所示系统的转速维持不变，可以在电动机轴上装转速表。假如发现由于扰动使转速表读数和所要求的转速之间产生误差，则可根据误差的符号和大小，人为地改变参考输入电压 u_r ，使转速回到原来的数值不变，这一过程可用图 1-2 示意地表示。

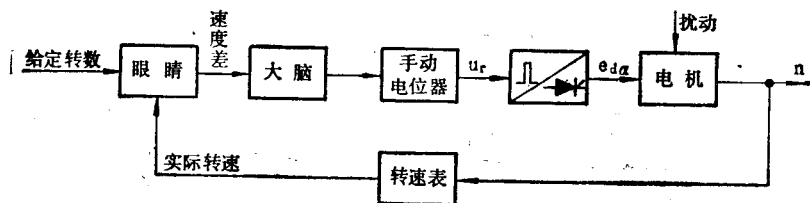


图 1-2 人工闭环控制系统示意图

由图可知，该系统既有参考输入 u_r 控制着输出量 n 的前向或称顺向控制作用，也有将输出量 n 引回到输入端的反向控制作用，形成一个闭环控制的形式，所以称它为闭环控制系统。

通常，我们把输出量引回到输入端与参考输入量进行比较的过程称为反馈。如果反馈信号与参考输入信号相反，称为负反馈；符号相同，称为正反馈。在自动控制系统中，多用负反馈。图 1-2 就是负反馈控制系统，因其是通过人的作用才形成闭环的，故称为人工闭环系统。显然利用人不可能完成及时的控制，不能满足系统对快速性和高精度的要求，因此必须设法自动实现上述的控制过程。

欲自动完成上述闭环控制作用，需要用一些元件代替人的作用，为此可在图 1-1 a 的基础上装上测速发电机（测量），将参考输入 u_r 与反馈电压 u_b 反向联接（比较），直接的控制作用就变为 $\Delta e = u_r - u_b$ ；同时为了提高控制精度，再引入放大器，其放大系数为 K ，则人工闭环系统变成自动控制系统，如图 1-3 a 所示，对应的方块图如图 1-3 b 所示。图中从参考输入端到输出端之间的信号传递称为前向（正向、顺向）通道；从输出端引回到输入端的通道叫反馈通道。“ $\otimes$ ”是比较环节符号；比较环节的输出是参考输入 u_r 与反馈信号 u_b 之差，通常 u_r 取“+”号，则 u_b 取“-”表示负反馈。具有反馈控制的系统，称为自动控制系统。

图 1-3 所示系统的自动控制过程如下：如果系统在某一负载下稳速运行，当负载（扰动）增大时，转速下降，但由于闭环控制的作用，可使转速回升，控制过程可表示为

负载增加 $\rightarrow n \downarrow \rightarrow u_b \downarrow \rightarrow \Delta e (= u_r - u_b) \uparrow \rightarrow u_k \uparrow \rightarrow e_{da} \uparrow \rightarrow n \uparrow$ 。闭环控制可以补偿由于负载变化引起的转速变化，还能补偿由于系统参数变化（例如放大器放大系数变化等）引起的转速变化，提高了系统的控制精度和抗干扰能力。

需要指出，只有按负反馈组成的闭环系统才能实现自动控制。闭环控制的突出优点是具有自动修正被控量偏离希望值的能力，因此它具有较高的控制精度和较强的抗干扰能

力,这也是反馈控制的主要特点和作用原理。但是,由于引入反馈系统容易产生振荡,甚至不稳定,所以在设计控制系统时必须给予充分的注意。

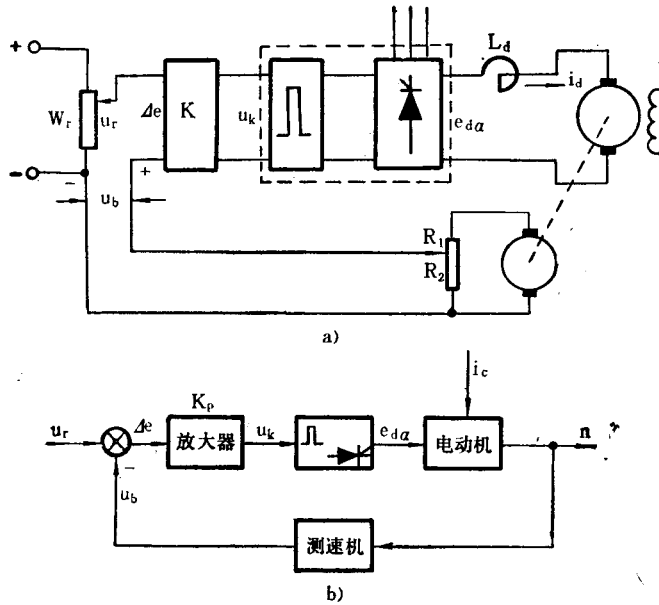


图 1-3 SCR-D闭环控制系统

a—SCR-D闭环控制系统原理图;b—SCR-D闭环控制系统方块示意图

还必须指出,补偿扰动所产生的影响,并非只有采取反馈控制一种方法。当扰动是可以测量时,利用前馈控制也是消除干扰对系统影响的有效方法,而且可以在扰动产生不利影响以前就产生补偿作用;但在闭环控制中,只有当输出受到影响后才能产生补偿作用,因此前馈控制有其突出的优点。

前馈控制的概念可以用图1-4说明,它是在图1-3 b中引入前馈控制器组成的。前馈控制器用来测量扰动量,并产生控制作用加在系统的输入端,用以补偿扰动对输出的不良影响。但是由于前馈控制是开环控制,受到系统结构精度的限制,所以在一般情况下,不能补偿未被测量的扰动量的影响。因此在前馈系统中仍然保留反馈回路,如图1-4所示。它实际上是既有反馈控制又有前馈控制的复合控制系统。

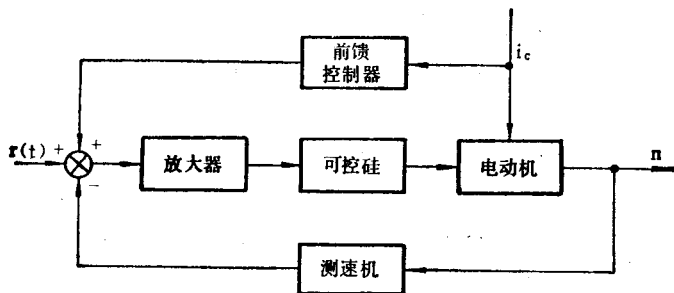


图 1-4 有扰动输入的前馈控制系统

以上讨论的是扰动输入的前馈控制，它可以抑制可测量扰动信号对系统输出的影响。此外还有参考输入的前馈控制，它可以有效地提高系统对参考输入的跟踪精度。

第二节 自动控制系统的组成及术语

根据不同的被控对象或不同的生产过程，利用相应的控制元件可组成控制不同物理量的控制系统。组成这些系统的元件可能有电气的、机械的、液压的等等。系统的结构也不尽相同，但这些系统一般都采用负反馈的基本结构。因此，不论哪一种自动控制系统，通常都可以把组成系统的元件按功能分成以下几种形式，典型系统的方块图如图1-5所示。其术语定义如下。

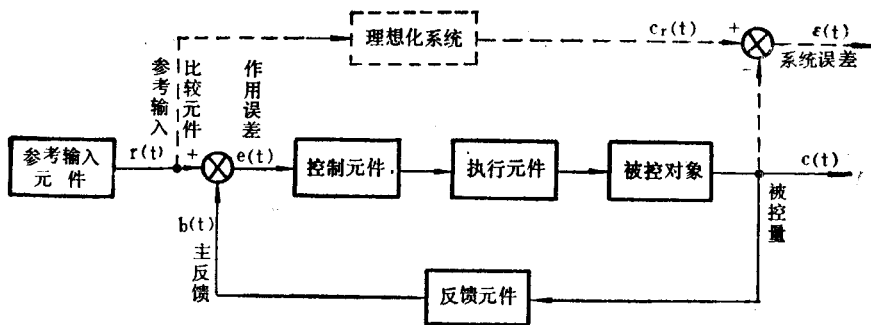


图 1-5 典型自动控制系统的方块图

参考输入 $r(t)$ ——是系统的参考输入元件产生的输入信号，在图1-3中参考输入元件是 W_r ，参考输入信号是 u_r 。

主反馈 $b(t)$ ——是被控量通过反馈元件产生的信号，它是被控量的函数，在图1-3中是 u_b 。

比较元件——是将参考输入与主反馈进行比较产生的差值， $e(t) = r(t) - b(t)$ ，该差值是系统的作用信号，也称为作用误差。所以比较元件也称作用误差检测器，并用符号“ $\otimes$ ”表示。

作用误差——是参考输入与主反馈之差，用 $e(t)$ 表示。

控制元件——也称校正元件或控制器、调节器。由于作用误差信号往往十分微弱，一般需要放大，并将它转换成适于执行机构工作的信号；另外由于对系统性能的要求，需对作用误差信号进行运算处理。在电力拖动系统中，控制器常采用PID控制器^①。图1-3所示的系统用的是一个放大器，即比例控制器。

执行元件——控制元件的输出作用到执行元件，执行元件再直接作用于被控对象，使被控量随参考输入而变化。在图1-3中，执行元件是可控硅整流装置。

被控对象——是系统被控制的设备或过程，它能完成特定的动作或生产任务。图1-3中被控对象是直流电动机。

被控量——是反馈系统被控制的物理量。在图1-3中是转速 n 。

反馈元件——将被控量转换成主反馈量的装置，它可以对被控量进行测量并转换成能

① 有关PID的阐述请参阅第六章表6-2。

与参考输入进行比较的量值，所以反馈元件也称测量元件。在图1-3中反馈元件是测速发电机。

理想化系统——能从参考输入直接产生理想响应的系统。

理想输出 $c_r(t)$ ——也称希望的响应值，它是理想化系统所产生的理想响应。

系统误差 $e(t)$ ——是希望的响应值（理想输出）与被控量之差。

典型自动控制系统一般都是由参考输入元件、比较元件、控制元件、执行元件、被控对象以及反馈元件六个基本单元组成，其方块图如图1-5所示。每个基本元件都用一个方块表示，信号传递方向用箭头表示，传递方向都是单方向不可逆的，指向方块的箭头表示输入信号，离开方块的箭头表示输出信号。

第三节 自动控制系统的分类

随着科学技术的不断发展和工农业生产的需要，自动控制系统日益复杂和日趋完善，类型很多。对各种各样不同的控制系统进行分类，通常是根据不同的观点有不同的分类方法，目前常以下列方法进行分类。

一、线性控制系统和非线性控制系统

1. 线性控制系统

当组成系统元件的输入输出特性都是线性的，系统的性能可用线性微分方程描述，则该系统称为线性控制系统，简称线性系统。在线性系统中，可以使用叠加原理。当线性系统的微分方程式的各系数均为常数时，称为线性定常系统；线性系统的微分方程式的系数只要有一个是时间的函数，则称为线性时变系统。线性定常系统的响应只与输入信号有关，与施加输入信号的时刻无关，即定常系统的响应曲线形状与时间坐标轴的起点无关。本书所讨论的内容主要是线性系统。

2. 非线性控制系统

严格讲，在实际的物理系统中是不存在线性系统的，总是或多或少存在着不同程度的非线性特性。但是当非线性不显著或者在工作范围不大的场合，为了研究问题方便，通常可视其为线性的，或者采取措施将它们线性化，然后按线性系统处理。把这些可以线性化的元件称非本质非线性特性元件，将不能线性化的元件称本质非线性特性元件。当系统中即使只包含一个本质非线性特性元件，系统的性能也将由非线性微分方程描述，此时方程中的系数将是微分方程中变量的函数。这种用非线性微分方程式描述的系统称为非线性控制系统，简称非线性系统。在非线性系统中，叠加原理不能使用。

常见的典型的本质非线性特性（简称非线性特性）如图1-6所示。其中a是饱和非线性，b是死区非线性，c是间隙非线性，d是继电非线性等。关于非线性系统的控制理论，目前还不太完整成熟，一般只能进行定性分析或进行数值计算，关于非线性系统将在第七章讨论。

二、连续控制系统与离散控制系统

1. 连续控制系统

当组成系统各元件的输入信号都是时间 t 的连续函数，它们相应的输出也是时间 t 的连续函数时，这种系统称为连续控制系统，简称连续系统。连续系统的性能由微分方程描述，图1-3就是一个连续系统的例子。在实际工程问题中，大多属于连续系统。

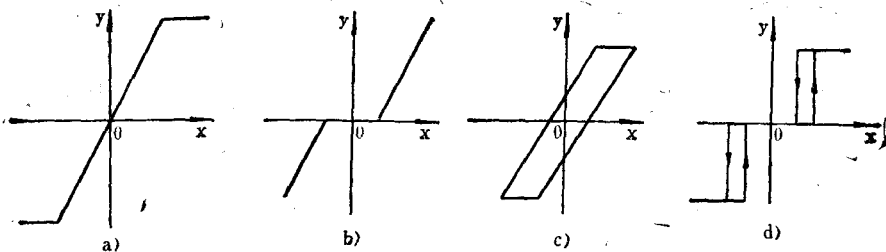


图 1-6 几种非线性特性

2. 离散控制系统

当控制系统中有一处或多处的信号是以脉冲序列或数码的形式传递，信号是不连续的，则该系统称为离散系统或采样系统。

离散（采样）系统是一个总称，如果信号以脉冲序列的形式传递，则称为脉冲控制系统；如果采用数字计算机，信号以数码的形式传递，则称为数字控制系统。

离散系统的动态性能是用差分方程描述，如果差分方程是线性的，则称线性离散系统。本书第八章将讨论线性离散系统。

三、恒值、程序和随动控制系统

这种分类方法是以参考输入按预定的变化规律为基础，可分为以下三种：

(1) 恒值控制系统 这种系统的特点是参考输入保持恒定或随时间只做缓慢的变化。要求系统有很好的抗干扰能力，以使输出维持恒定或随时间缓慢变化。

(2) 程序控制系统 参考输入按事先安排好的规律变化的控制系统。例如矿井提升机就是按事先规定的速度图运行的。

(3) 随动控制系统 这种系统的输入总是频繁变化，且变化规律是事先不知道的时间函数，而要求输出能以一定的精度跟随参考输入量的变化而变化，这样的控制系统称为随动控制系统，简称随动系统。随动系统的输出量往往是机械位移、速度或加速度等。

此外还有其它分类方法，如有静差系统和无静差系统；单输入单输出系统和多输入多输出系统；最优控制系统；自适应控制系统等等，后边几种系统属于现代控制理论内容，不在本书讨论。

第四节 对自动控制系统性能的要求及 本课程的基本内容和任务

一、对自动控制系统性能的一般要求

为了实现自动控制的基本任务，必须对自动控制系统性能提出一定的要求。

通常，当闭环系统的参考输入和扰动量都恒定不变时，被控量也恒定不变，这种状态称为平衡状态或静态，稳态。当参考输入或扰动量发生变化时，反馈量将与参考输入之间产生新的作用误差，通过控制作用，使被控量（输出量）又按新的参考输入值稳定下来，或者趋于恢复到原来的数值达到新的平衡。但由于系统总存在着惯性或储能元件，使达到新的平衡状态不能瞬时完成，要有过渡过程，从一个平衡状态到另一个平衡状态的过渡过

程称动态过程或暂态过程。过渡过程的形式不但与系统的结构和参数有关，还与参考输入或外加扰动函数的形式有关。当扰动量为零，初始条件为零，参考输入为如图 1-7 所示的阶跃函数时，输出的过渡过程称为阶跃响应。在自动控制系统中，阶跃响应是最常用的描述自动控制系统动态过程的方法之一，并且根据系统结构和参数的不同可能有如图 1-8 所示的几种形式，其中 a 是单调过程，b 是衰减振荡过程，c 是等幅振荡过程，d 是增幅振荡过程。由于 a、b 两种情况的输出量趋于新的平衡状态，所以它们是稳定的；c、d 两种情况不趋于新的平衡状态，它们是不稳定的。不稳定的系统不能工作，因此首先要求自动控制系统必须是稳定的，这是对自动控制系统的第一个要求。

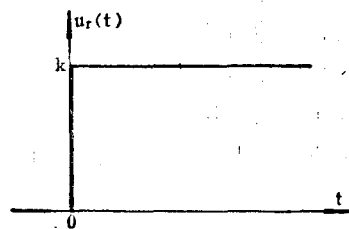


图 1-7 阶跃函数

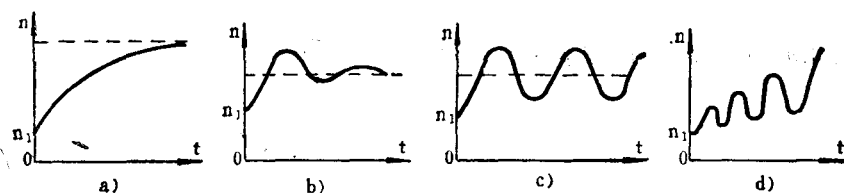


图 1-8 自动控制系统的动态过程

a—单调过程；b—衰减振荡过程；c—等幅振荡过程；d—增幅振荡过程

但是，只考虑系统的稳定性是不够的，还必须对过渡过程的时间、超调量、振荡次数等提出要求。它们可以用来描述系统过渡过程的快速性和平稳性，评价系统动态性能的优劣。因此称它们为控制系统的动态性能指标或暂态性能指标或动态品质，即控制系统必须满足一定的动态性能指标，这是对它的第二个要求。

最后，当输出量的过渡过程结束后，系统进入稳态，此时要求系统的输出量应准确地达到希望值，否则将产生稳态误差。稳态误差是衡量系统控制精度的指标，因此稳态误差应在所要求的范围之内，以保证所给定的控制精度，这就是对自动控制系统的第三个要求。

二、本课程的基本内容和任务

本课程的主要内容可以分为两大方面，一是根据系统的结构和参数确定系统的稳定性，动态性能指标和稳态误差，以及分析系统的抗干扰性能，这就是系统的分析；另一方面是按照所给的控制任务，设计一个既满足稳定性要求，又满足暂态性能指标和稳态误差要求的控制系统，或者要求它具有良好的抗干扰性能，确定其结构和参数，这就是系统的设计。分析的方法通常有三：一是建立在微分方程式基础上的时域分析法，此法物理概念直观，分析计算准确；但是对于高阶系统往往是比较复杂的，特别是不易确定参数变化对系统性能的影响。二是建立在传递函数基础上的根轨迹法，是图解解析法，它可以比较方便地分析高阶系统，而且能够直观地看出系统某一参数（或两个参数）变化时对系统性能的影响，但准确度比时域分析法低；三是建立在频率响应基础上的频域分析法，也是图解解析法。其突出优点是容易确定高阶系统的静态和动态性能；易于确定系统的结构和参数变化

对系统性能的影响；可以用实验的方法建立元件或系统的频率响应，对建立数学模型困难的系统提供了研究方法。此法所得的结果通常也是近似的，但它的应用是很广泛的。

这三个方法可以互相补充和印证，它们之间可通过微分方程、拉氏变换和富氏变换联系起来。三种方法将分别在第三、四、五章讨论。

系统设计的方法常用的有两种，即基于根轨迹的设计方法和基于频率响应的设计方法，将在第六章讨论。

此外，第七章与第八章分别讨论非线性控制系统和采样控制系统。

习 题

1-1 什么是负反馈？什么是正反馈？将图1-3所示的调速系统改为正反馈能否达到自动控制的目的？为什么？试加以分析说明。

1-2 在日常生活和工作中，试举出几个开环控制和闭环控制的例子，并画出它们的方块图，说明工作原理。

1-3 试画出图1-9所示的自动控制系统的方块图，并说明工作原理。

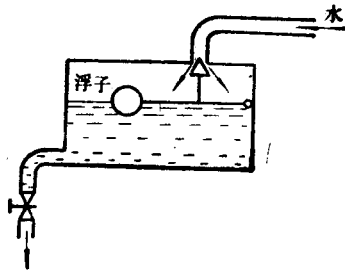


图 1-9

1-4 试在图1-3a原理图的基础上加入前馈控制（用方块表示）。

1-5 对自动控制系统有哪些要求？并举例说明它们的意义。

第二章 自动控制系统的数学模型

第一节 引言

为了对自动控制系统进行分析和设计,必须充分了解组成系统各元件的基本性能,这些基本性能一般都可以用数学表达式来描述,因而整个控制系统的基本性能也可以用数学表达式来描述,这就是控制系统的数学模型。数学模型是对系统进行分析和设计的依据,因此建立数学模型也是进行分析和设计系统最重要的工作之一。

对于控制系统,数学模型通常有状态变量描述和输入输出描述两大类型,状态变量描述实际上是描述系统运动状态的一组一阶微分方程式,并常用矩阵方程(状态方程)来表示。如果从状态方程和输出方程消去状态变量(中间变量)就可以得到表达系统输入输出关系的输入输出数学模型。由于本教材只讨论经典控制内容,一般也仅涉及输入输出的数学模型,简称数学模型。

根据不同的分析方法,可以建立不同的数学模型。对于线性连续●控制系统,微分方程是时域数学模型。它是时域分析的依据,也是数学模型的基本形式。当用拉氏变换对微分方程进行求解时,可以得到复域数学模型——传递函数;还可以得到频域数学模型——频率响应特性,它们是根轨迹法和频率响应法分析的基础。此外方块图、信号流图也是数学模型的另一种形式。上述这些数学模型一般都可以互相转换。

建立系统的数学模型,可以用分析和实验两种方法进行。用分析法建立数学模型时,常利用电、磁、热和力学中的有关定律,并且通常需要忽略一些次要因素或作一些近似处理。对于复杂的系统尤需如此,而且往往需要经过多次的反复才能建立出恰当的数学模型,因此在很多情况下,建立数学模型既是一门科学,又是一种技巧。用实验法建立数学模型时,可以对实际系统加入一定形式的参考输入信号,用求取系统输出响应的方法来获得。

工程中的绝大多数系统,在一定条件下都可以用线性微分方程式描述。对线性微分方程式的求解,一般都有标准的方法,求解也比较容易,因此研究线性系统具有很大的实际意义。另外线性系统还有两个主要特点:一是可以利用叠加原理,就是几个输入同时作用于某系统(并不一定在同一处)所产生的总响应,等于各个输入单独作用所产生的响应之和;二是它具有均匀性,即当作用在同一系统的输入信号增大几倍,系统响应也相应增加同样的倍数。在对线性系统进行分析时,利用这两个特点是很方便的。下面讨论建立微分方程式的一般方法。

第二节 自动控制系统微分方程式的建立

通常,当控制系统的参考输入发生变化或出现扰动以前,系统处于平衡状态,此时系统或处于稳态运行,或静止不动。当系统输入发生变化或出现扰动之后,输出量将离开平

● 对于离散系统,其数学模型是差分方程、脉冲传递函数等,将在第八章讨论。

衡位置,产生增量,增量的变化规律就是满足该系统微分方程式的解。因此在列写微分方程式时,应该以增量为变量,而不以它的绝对值为变量。但是以增量为变量和以绝对值为变量的微分方程式形式是相同的,为简化起见,今后不再指明这一条件,而将增量 Δx 、 Δy 、 Δr 、 Δc 、……写成 x 、 y 、 r 、 c 、……的形式。

列写控制系统的微分方程式常采用两个步骤:一是化整为零,将系统分解成若干个环节,并写出各环节的输入输出数学表达式;二是积零为整,通过上述各式消去中间变量,可得参考输入和输出之间的微分方程式。同时在列写微分方程式时,习惯上将输出量写在方程式的左边,输入量写在方程式的右边,现举例说明。

例 2-1 列写图2-1所示RC电路的微分方程式。

解 根据上述列写微分方程式的原则,分两步列出:

(1) 由克希霍夫定律列写原始方程

$$u_r = Ri + u_c$$

式中 $u_c = \frac{q}{C}$, q 为电容器上的电荷,它与中间变量 i 有下列关系

$$i = \frac{dq}{dt}$$

(2) 消去中间变量,将以上三个方程联立可得

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r \quad (2-1)$$

式(2-1)就是RC电路以电压 u_r 为输入,以电容电压 u_c 为输出的微分方程式,这是一个一阶微分方程。

例 2-2 设一机械阻尼系统(弹簧-质量-阻尼器系统),如图2-2所示。当外力 x 作用时,系统产生运动,位移 y 发生变化,设摩擦力与位移 y 的导数成正比,弹簧力与 y 成正比。试建立该系统以外力 x 为输入,以位移 y 为输出的微分方程式。

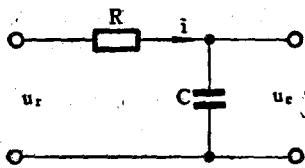


图 2-1 RC电路

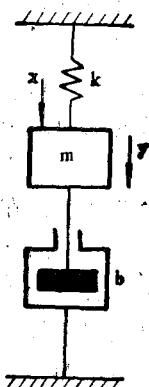


图 2-2 机械阻尼系统

解 设 k 表示弹性系数,即弹簧刚度; b 表示粘性摩擦系数,即阻尼系数。则根据牛顿第二定律可得

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -b \frac{dy}{dt} - ky + x$$

或

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = x$$

如果将上式写成

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{k} \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{k} x$$

并令 $T_M = \frac{m}{k}$, $T_b = \frac{b}{k}$, 则上式变为

$$T_M \frac{d^2 y}{dt^2} + T_b \frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{k} x \quad (2-2)$$

若用国际单位制计算各量, 即 $[x]$ 用 N , $[t]$ 用 s , $[m]$ 用 kg , $[y]$ 用 m , $[b]$ 用 $N \cdot s/m$, $[k]$ 用 N/m 表示, 则

$$[T_b] = [b/k] = s$$

$$[T_M] = [m/k] = [kg \cdot m/N] = s^2$$

因此 T_b 和 T_M 都表示时间常数。由式 (2-2) 可知, 机械阻尼系统的微分方程式是一个二阶微分方程。

例 2-3 写出图 1-3 a 所示闭环调速系统的微分方程式。

解

1. 首先化整为零, 写出各环节输入输出的数学描述。

(1) 由图知, 放大器的输入量为作用误差 Δe , 输出量为

$$u_k = K_P \cdot \Delta e \quad (2-3)$$

(2) 可控硅整流电路是一个功率放大环节, 该环节包括触发和整流两部分, 故又称触发整流环节, 它的输入量为 u_k , 输出量为 e_{da} 。当忽略可控硅整流电路的滞后时间和非线性因素时, 输入输出关系可表示为

$$e_{da} = K_{SCR} \cdot u_k \quad (2-4)$$

式中 K_{SCR} ——功率放大环节的电压放大系数;

u_k ——功率放大环节的输入电压, V ;

e_{da} ——整流器空载整流电势, V 。

(3) 根据克希霍夫定律, 可以写出电枢回路的电压平衡方程式

$$e_d + R_D i_d + L_D \frac{di_d}{dt} = e_{da} \quad (2-5)$$

式中 e_d ——电动机的反电势, V ;

R_D ——电动机电枢回路总等效电阻, Ω ;

L_D ——电动机电枢回路总等效电感, H ;

i_d ——电动机电枢回路电流, A 。

因为电动机的反电势与转速 n 成正比, 所以有

$$e_d = C_e n \quad (2-6)$$

式中 C_e ——电动机的电势常数, $V/r/min$

将式 (2-3)、(2-4)、(2-6) 代入式 (2-5) 得

$$C_e n + R_D i_d + L_D \frac{di_d}{dt} = K_{SCR} \cdot K_P \cdot \Delta e \quad (2-7)$$

(4) 当电动机的负载为常数时, 考虑到系统的变量实际上是增量, 所以电力拖动的