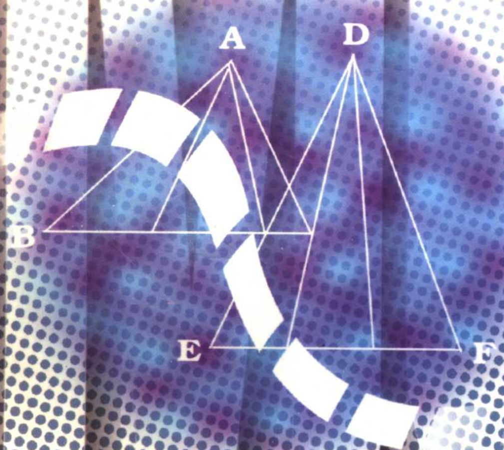
中学生精典文库

OLYMPIAD

中学数学竞赛培训题解

ZHONGXUE SHUXUE JINGSAI PEIXUN TIJIE

欧阳禄 主编



湖 南 教 育 出 版 社

中学生精典文库

中学数学竞赛培训题解

主编：欧阳禄

编者：吴克裘 李运樵 尤兆桢
孙希文 李求来 刘裔宏
陈贻泽 李宗铎 曾宪侯
朱石凡

审定：孙本旺

湖 南 教 育 出 版 社

中学数学竞赛培训题解

欧阳禄　主编

责任编辑:孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷一厂印刷

850×1168 毫米　32 开　印张:10.75　字数:277000

1980 年 3 月第 1 版　1998 年 10 月第 2 版第 4 次印刷

印数:113001——117000

ISBN 7—5355—2712—4/G·2707

定价:13.00 元

序

这本书是欧阳禄同志主持选编并解答出来的，目的是用来培训参加全国中学数学竞赛的学生. 内容丰富，解法新颖，富有启发性. 我们认为，值得推荐出版，以供本省中学生参考. 它不仅是准备参加竞赛的学生的良好读物，也是其他中学生以及具有相当程度的自学者的有价值的参考书.

当然，读者在读这本册子时，应该首先自己解决问题，然后参看本书解答，来验证自己的方法是否正确，要这样才有益处.

孙本旺

1979.7.15.

编 者 的 话

为了培训参加全省和全国中学数学竞赛的学生，省数学学会委托我省部分高等院校和有关部门，新编、改写和翻译了一些初等数学题，供各地辅导小组参考. 参加这项工作的有：

国 防 科 技 大 学　孙本旺　吴克裘　李运樵
湖 南 师 范 学 院　尤兆桢　孙希文　李求来
湖　南　大　学　刘裔宏
长 沙 基 础 大 学　欧阳禄
湖南省教学研究室　陈贻泽
长沙市教师进修学院　李宗铎
长 沙 市 第 一 中 学　曾宪侯
湖南师院附属中学　朱石凡

我们选编此书的原则是：加强基础、联系实际、启发思维、增长智慧，要求难而不怪，高而可攀. 考虑到在国际上要有个比较(选题中有些本来就是各国竞赛题)，又全部翻译了美国的历届数学竞赛题（少数原文不妥之处已修正）作为附录. 长沙市及省内数学界人士对此都很关心，不少同志寄来了题目及解答. 在此基础上进行了两次整理、编辑，最后由孙本旺同志作了全面的审定. 此项工作都是在业余时间进行的，比较匆促，希望读者把书中的问题和自己的意见及时告诉我们，不胜感谢.

本书所用符号说明如下：

(a,b)　在解析几何中表平面上的点；在代数中表开区间 $a<x<b$；在数论中表 a、b 两数的最大公约数，如 $(12,18)=6$.

(a,b,c)　a、b、c 三数的最大公约数，如 $(12,18,24)=6$.

$[a,b]$　在代数中表闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$；在数论中表 a、b 两数的最小

公倍数，如〔12，18〕=36.

〔a，b，c〕　a、b、c 三数的最小公倍数，如〔12，18，24〕=72.

〔a〕　a 的整数部分，即最接近 a 而不超过 a 的整数．如

〔$\sqrt{2}$〕=1，　〔−4〕=−4，　〔−2.3〕=−3.

（a）　a 的小数部分，即 a−〔a〕. 如（$\sqrt{2}$）=$\sqrt{2}-1$，

（−4）=0，（−2.3）=0.7.

$\max(a,b,\cdots,c)$　$a,b,\cdots,c$ 诸数中的最大者．如

$\max(3,\ 2.2,\ 4,\ 3.8)=4.$

$\min(a,b,\cdots,c)$　诸数中的最小者．如

$\min(3,\ 2.2,\ 4,\ 3.8)=2.2.$

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$　$a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的缩写记号．

$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$　$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ 的缩写记号．

$a|b$　a 能整除 b，即 b 是 a 的倍数，a 是 b 的约数．

$a\equiv b \pmod{c}$ 以 c 为模数时 a 与 b 同余，即 $c|(a-b)$.

欧阳禄　　1979.8.

目　录

I . 数　论

1. 把 1、2、3、4、5、6、7、8、9 九个数字，填进 3×3 的方格中，使得任何横行、竖行及对角线上三数之和都是 15.

解　设各格已填好各数如图(1)，其中 a、b、c、d、e、f、g、h、i 各不相等，但每个字母都限于在 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中取值. 由题设，当有

a	b	c
d	e	f
g	h	i

图 1

$$a+e+i=15,$$
$$b+e+h=15,$$
$$c+e+g=15,$$
$$d+e+f=15.$$

$\therefore$　$(a+b+c+d+e+f+g+h+i)+3e=60.$

而　$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45,$

$\therefore$　$3e=15$，$e=5$.

再看 1 应填入哪一格，设 $a=1$，则有 $i=9$.

如果 c 取 2、3、4，则有

$a+b+c=1+b+c<1+9+5=15.$

如果 c 取 6、7、8，则有

$c+f+i=c+f+9>5+1+9=15.$

故　$a\neq1$.

基于对称性，c、g、i 也都不能为 1.

于是，b、d、h、f 有可能为 1，基于对称性，任取一个，如果取 $b=1$，则 $h=9$，于是方格中填进三个数如图(2).

再看 2 当填入哪一格，显然 2 不能在第一行，若 2 在第二行，可取 $d=2$，容易证明，这样得不出所需的图形，故 $d\neq2$，同样，

$f \neq 2$.

取 $g=2$，于是 $c=8$，进而可按次填出 $a=6$，$i=4$，$f=3$，$d=7$，其形如图(3).

	1	
	5	
	9	

图 2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

图 3

注意：这种图形，在三千年以前我国即已作出，如图(4)．很多科学家认为，如果宇宙中别的星球上有智力发展程度很高的生物，而我们希望告诉他们，地球上也有智力发展很高的生物．那么，在语言、文字、符号都不通的情况下，如给他们看看这个图，他们也就会明白．

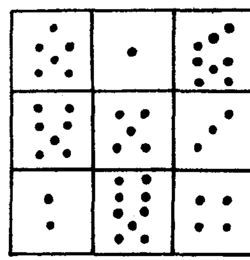


图 4

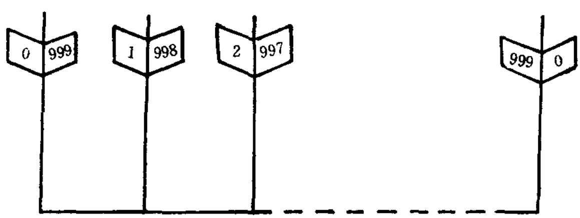


图 5

2. 连结 A、B 两城的公路长 999 公里，沿路每隔 1 公里竖立一个里程标，上面标出该处到 A、B 两城的距离．问只使用两个数字来标记公里数的里程标共有多少个？(例如，位于 A、B 两城的两个里程标都满足题目的要求，只用到 0 和 9 两个数字标记公里

数．）

解　任一里程标上的公里数均可用一个三位数$(abc)=100\times a+10\times b+c$（其中$a$、$b$、$c$是十进制数字）表示．只需考虑由一个数字或两个数字组成的三位数，即如下形式的三位数：

(aab)；　(aba)；　(baa)；　(aaa)．

如果这些数表示相应里程标到一个城市的距离，则到另一个城市的距离可以表为：

$(9-a,\ 9-a,\ 9-b)$；$(9-a,\ 9-b,\ 9-a)$；

$(9-b,\ 9-a,\ 9-a)$；$(9-a,\ 9-a,\ 9-a)$．

根据题目要求必须有$b=9-a$．因此要找的里程标将是：

9	990	118	881	227	772	……	990	9
90	909	181	818	272	727	……	909	90
900	99	811	188	722	277	……	99	900
0	999	111	888	222	777	……	999	0

总共有40个．

3．证明和数$1+2+3+\cdots+n$（n为自然数）的末位数字不可能是2，4，7，9．

证　设　$1+2+3\cdots+n=k$，则

$$k=\frac{n(n+1)}{2},$$

由此得到　$n=\dfrac{-1+\sqrt{8k+1}}{2}$．　　　　*

由于n是自然数，故$8k+1$必是一个完全平方数；但一个完全平方数的末位数字不能是2，3，7，8，所以由（*）式推出k的末位数字不能是2，4，7，9．

4．设N是整数，证明N^5与N的末位数字一定相同．

证　只要证明$10\mid(N^5-N)$．

$$N^5-N=(N-1)N(N+1)(N^2+1)$$
$$=(N-1)N(N+1)(N^2-4+5)$$
$$=(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)$$
$$+5(N-1)N(N+1).$$

∵ $(N-2),(N-1),N,(N+1),(N+2)$是相邻的五个整数，其中必含有偶数及 5 的倍数．

∴ $10|(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)$.

又 $(N-1),N,(N+1)$是相邻的三个整数，其中必含有偶数，

∴ $10|5(N-1)N(N+1)$.

∴ $10|(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)$
$+5(N-1)N(N+1)=N^5-N$.

即 N^5-N 的末位数字相同．

5. 证明整数 $2^{55}+1$ 能被 11 整除．

证 利用恒等式

$(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$.

令 $a=2^5$，$b=-1$，$n=11$，得到

$2^{55}+1=(2^5+1)(2^{50}-2^{45}+2^{40}-\cdots-2^5+1)=33\cdot N$.

这里 N 是一个自然数．因此 $2^{55}+1$ 能被 33 整除，当然更能被 11 整除．

6. 当 n 为奇数时，证明 16 可以整除 n^4+4n^2+11.

证 $n^4+4n^2+11=n^4+4n^2-5+16$
$$=(n^2+5)+(n^2-1)+16.$$

由所设 n 为奇数，故令 $n=2m+1$.

从而 $n^4+4n^2+11=\{(2m+1)^2+5\}\{(2m+1)^2-1\}+16$
$$=8m(m+1)(2m^2+2m+3)+16.$$

但 $m(m+1)$为 2 的倍数，从而 n^4+4n^2+1 为 16 的倍数．故得所证．

另证 $n^4+4n^2+11=(2m+1)^4+4(2m+1)^2+11$

$=16m^4+32m^3+24m^2+8m+1+16m^2+16m+4+11$

$=16(m^4+2m^3+2m^2+m+1)+8m^2+8m$

$=16(m^4+2m^3+2m^2+m+1)+8m(m+1).$

对于一切整数 m,$8m(m+1)$都是 16 的倍数,故 n^4+4n^2+11 是 16 的倍数.

7. 证明:若 n 是偶数,则 24 可以整除 $n(n+1)(n+2)$.

证 由所设 n 是偶数,故设 $n=2m$.

因此 $n(n+1)(n+2)=4m(m+1)(2m+1)$

$=4m(m+1)[(m+2)+(m-1)]$

$=4m(m+1)(m+2)+4m(m+1)(m-1).$

由于三位连续整数的乘积是 6 的倍数,因此 $4m(m+1)(m+2)$,$4(m-1)m(m+1)$是 24 的倍数. 故它们的和 $4m(m+1)(m+2)+4(m-1)m(m+1)$是 24 的倍数,从而得出,当 n 是偶数时,$n(n+1)(n+2)$是 24 的倍数,故得所证.

8. 证明:若 n 为奇数,则 24 可以整除$(n+2m)^n-(n+2m)$.

证 由所设 n 为奇数,故可设 $n=2k+1$(k 为整数),从而

$(n+2m)^n-(n+2m)$

$=(2k+2m+1)[(2k+2m+1)^{2k}-1]$

$=(2k+2m+1)\{[(2k+2m+1)^2]^k-1\}$

$=(2k+2m+1)[(2k+2m+1)^2-1][(2k+2m+1)^2]^{k-1}$
$+[(2k+2m+1)^2]^{k-2}+\cdots+(2k+2m+1)^2+1]$

$=(2k+2m+1)[(2k+2m+1)-1][(2k+2m+1)+1][(2k$
$+2m+1)^{2k-2}+(2k+2m+1)^{2k-4}+\cdots+1]$

$=4(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)[(2k+2m+1)^{2k-2}$
$+(2k+2m+1)^{2k-4}+\cdots+(2k+2m+1)^2+1].$

但是 $(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)$

$=(k+m)(k+m+1)[(k+m+2)+(k+m-1)]$

$=(k+m)(k+m+1)(k+m+2)+(k+m-1)(k+m)(k+m+1)$,

故　$(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)$为 6 的倍数．

因此　$4(2k+2m+1)(k+m)(k+m+1)$为 24 的倍数，故得所证．

9. 设 a 和 n 是任意自然数．证明 $a^{4n+1}-a$ 能被 30 整除．

证　设 $P_n=a^{4n+1}-a$. 当 $n=1$ 时有

$$P_1=a^5-a=a(a-1)(a+1)[(a^2-4)+5]$$
$$=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5(a-1)a(a+1),$$

式中第一项是 5! 的倍数，能被 30 整除，第二项是 $5\cdot 3!=30$ 的倍数，因此 P_1 能被 30 整除．设 P_n 能被 30 整除，则

$$P_{n+1}=a^{4n+5}-a=P_n+a^{4n+5}-a^{4n+1}$$
$$=P_n+a^{4n}\cdot P_1.$$

同样能被 30 整除. 所以根据归纳原理 $P_n=a^{4n+1}-a$ 能被 30 整除．

10. 设 x、y、z 是三个不同的整数．证明$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ 能被 $5(x-y)\cdot(y-z)\cdot(z-x)$整除．

证　令 $x-y=a$，$y-z=b$，$z-x=c$，则

$$a+b+c=0,\quad c=-(a+b).$$

于是

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$$
$$=a^5+b^5-(a+b)^5$$
$$=a^5+b^5-a^5-5a^4b-10a^3b^2-10a^2b^3-5ab^4-b^5$$
$$=-5ab(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)$$
$$=-5ab[(a+b)(a^2-ab+b^2)+2ab(a+b)]$$
$$=-5ab(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

故原式能被$-5ab(a+b)=5abc=5(x-y)(y-z)(z-x)$整除．

11. 证明多项式$(x+1)^m+x^m+1$ 能被 x^2+x+1 整除的充要条件是 $m=6n\pm2$，其中 n 是任意自然数．

证　设方程 $x^2+x+1=0$ 的两根为 x_1 和 x_2. 易知 $x_i^3=1$；$1+x_i=-x_i^2(i=1,2)$. 多项式 $f(x)=(x+1)^m+x^m+1$ 能被 x^2+x+1 整除的充要条件是 $f(x_i)=0$ $(i=1,2)$.

不难验证，

当 $m=6n$ 时，$f(x_i)=3$；

当 $m=6n+1$ 时，$f(x_i)=-2x_i^2\neq 0$；

当 $m=6n+2$ 时，$f(x_i)=0$；

当 $m=6n+3$ 时，$f(x_i)=1$；

当 $m=6n+4=6(n+1)-2$ 时，$f(x_i)=0$；

当 $m=6n+5$ 时，$f(x_i)=-2x_i$.

所以已给多项式能被 x^2+x+1 整除的充要条件是 $m=6n\pm 2$，其中 n 为自然数.

12. 已知 a、b、n 是自然数，并且对于任何不等于 b 的自然数 k，k^n-a 能被 $k-b$ 整除. 证明 $a=b^n$.

证 因为 $k^n-b^n=(k-b)(k^{n-1}+k^{n-2}b+k^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$，其中 k 和 b 是任何整数，$k\neq b$. 所以 k^n-b^n 能被 $k-b$ 整除. 于是 $(k^n-b^n)-(k^n-a)=a-b^n$ 能被 $k-b$ 整除，即能被任何不等于 0 的整数整除. 故必须 $a-b^n=0$，即 $a=b^n$.

13. 任给一 n 位数，把这个 n 位数的数字任意排列成一新数(例如把 1234 排列为 3142)，证明新数与原数的差是 9 的倍数.

解 任给一个 n 位数，记为 $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$，设 $\overline{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}}$ 是 $\overline{a_1a_2\cdots a_n}$ 的各位数字重排后的新数，则

$$\begin{aligned}\overline{a_1a_2\cdots a_n}&=a_1\times 10^{n-1}+a_2\times 10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\times 10+a_n\\&=a_1\times(10^{n-1}-1)+a_2\times(10^{n-2}-1)+\cdots\\&\quad+a_{n-1}\times(10-1)+(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=9\text{ 的倍数}+(a_1+a_2+\cdots+a_n).\end{aligned}$$

同样有

$$\overline{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}}=9\text{ 的倍数}+(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}).$$

但 $a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$

$\therefore$ $\overline{a_1a_2\cdots a_n}-\overline{a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}}=9$ 的倍数.

14. 在 1，2，3，…，100 这前 100 个自然数中任取 51 个数，证明这 51 个数中至少可以找出两个数，其中一个为另一个的倍数.

证 我们把这 100 个自然数都写成 2 的乘幂与一个奇数的乘

积的形式：$2^k \cdot p$（p 为奇数）的形式，将且只将所含奇数约数相同的数分作一类（例如，将且只将 $2^0 \cdot 7$，$2^1 \cdot 7$，$2^2 \cdot 7$，$2^3 \cdot 7$ 作为一类），因为 100 以内只有 50 个不同的奇数，所以百以内的自然数可以这样分成 50 类．这样的分类具有以下特点：

(1) 每个数都分在一个类内且只分在一个类内（即无重复，无遗漏）；

(2) 每个类中如有两个或两个以上的数，则其中任意两数必有一个是另一个的倍数．

我们从这 50 类中任取 51 个数，就至少在一个类里取了两个数，这两个数就有一个是另一个的倍数．

15. 在 1，2，3，…，100 这前 100 个自然数中任取 27 个数，证明这 27 个数中至少有两个数不互质．

证 我们把这 100 个自然数按以下的办法来进行分类：

(1) 1 单独作一类；

(2) 2 的倍数作为一类；

(3) 3 的倍数中不含约数 2 的数作为一类；

(4) 5 的倍数中不含约数 2，3 的数作为一类；…因为 100 以内共有 25 个质数，所以 100 以内的数可以这样分成 26 类．这样的分类具有以下的特点：

(1) 每个数都分在一个类内且只分在一个类内；

(2) 每个类中如有两个或两个以上的数，则其中任意两数不互质．

我们从这 26 类中任取 27 个数，就至少在一个类里取了两个数，这两个数就不互质．

16. 证明：当 a 与 b 两个正整数中至少有一个不是 3 的倍数时，则 3 不能整除 a^2+b^2.

证 (1) 当 a、b 中只有一个不为 3 的倍数时，不妨设 a 是 3 的倍数，b 不是 3 的倍数，

则 $a=3m$，$b=3n\pm1$.

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= (3m)^2+(3n\pm1)^2 \\
&= 9m^2+9n^2\pm6n+1 \\
&= 3(3m^2+3n^2\pm2n)+1.
\end{aligned}
$$

故　a^2+b^2 不是 3 的倍数．

(2) 当 a，b 都不是 3 的倍数时，

∵　$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$，

∴　a^2+b^2 及 $(a+b)^2+(a-b)^2$ 同时都为 3 的倍数或都不为 3 的倍数．

若 a、b 被 3 除时余数相同，则 $a-b$ 是 3 的倍数而 $a+b$ 不是 3 的倍数．根据(1)，$(a+b)^2+(a-b)^2$ 不是 3 的倍数，而 a^2+b^2 亦不是 3 的倍数．

若 a，b 被 3 除时余数不相同，则余数分别为 1 和 2；故 $a+b$ 是 3 的倍数而 $a-b$ 不是 3 的倍数，根据(1)，$(a+b)^2+(a-b)^2$ 不是 3 的倍数，而 a^2+b^2 亦不是 3 的倍数．

综上所述，本题得证．

17. 若 n_1、n_2 是正整数，并且都能表成两个整数的平方和，则 n_1n_2 也能表成两个整数的平方和，试证明之．

证　由所设，n_1、n_2 是两个整数的平方和，故令

$$n_1=a_1^2+a_2^2,\quad n_2=b_1^2+b_2^2,$$

这里 a_1、a_2、b_1、b_2 是整数．

因此
$$
\begin{aligned}
n_1n_2 &= (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) \\
&= (a_1b_1+a_2b_2)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2.
\end{aligned}
$$

故得所证．

18. 若 2^n+1 是质数($n>1$)，则 n 是 2 的方幂，试证明之．

证　反设 n 不是 2 的方幂，则令 $n=2^k\cdot m$，m 是大于 1 的奇数，k 是非负整数．

因此
$$
\begin{aligned}
2^n+1 &= 2^{2^k\cdot m}+1 \\
&= (2^{2^k})^m+1
\end{aligned}
$$

$$=(2^{2^k}+1)[(2^{2^k})^{m-1}-(2^{2^k})^{m-2}+\cdots-(2^{2^k})+1].$$

$2^{2^k}+1>1$，$(2^{2^k})^{m-1}-(2^{2^k})^{m-2}+\cdots-(2^{2^k})+1>1$，此与 2^n+1 是质数矛盾，故得所证．

19. 如果 x、y、z 都是正整数，$x^2+y^2=z^2$，则称 x、y、z 为一组勾股数．假设 x、y、z 是一组互质的勾股数．证明：一定可以找到一对正整数 m、n，使

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn,\quad z=m^2+n^2.$$

证 由所设条件知，x、y 不能同时是偶数，否则 z 亦为偶数，从而 x、y、z 不互质，x、y 也不能同时是奇数，倘若不然，设 $x=2h+1$，$y=2k+1$，则

$$\begin{aligned}z^2&=x^2+y^2=(2h+1)^2+(2k+1)^2\\&=4(h^2+k^2+h+k)+2.\end{aligned}$$

由此可见，z^2 是偶数，因之 z 也是偶数，故 z^2 是 4 的倍数，但上式表明 z^2 不是 4 的倍数，可见所设不真．

因为 x、y 必为一奇一偶，不妨设 x 为奇，y 为偶，从而 z 为奇．

由 $$y^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x),\tag{1}$$

此中之 $z+x$，$z-x$ 均为偶，故可设

$$z+x=2a,\quad z-x=2b,$$

从而得

$$z=a+b,\qquad x=a-b.$$

因 x、z 均为奇，故 a、b 亦必一奇一偶，而且 a、b 也应互质，由(1)知

$$y^2=4ab.$$

因而 a、b 也是平方数，否则，可设 a 含有某因子 z 奇数次，于是 b 亦当有此因子至少一次，从而 a、b 不互质．

命 $a=m^2$，$b=n^2$，即得

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn,\quad z=m^2+n^2.$$