普通高等教育“十五”国家级规划教材

线性代数

第二版

张良云　主　编
毕守东　副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

线性代数

第二版

张良云　主　编
毕守东　副主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，第一版是面向21世纪课程教材。本书突出了矩阵的作用，强调了线性变换思想，力求在处理上深入浅出。全书共六章，分别为矩阵，行列式，向量组的线性相关性，线性方程组，特征值、特征向量与二次型，线性空间与线性变换。

本书是高等院校农林类、水产类各专业教材，也可作为教学要求相近的工科类学生或科研人员的教材、教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张良云主编.—2版.—北京:高等教育出版社,2003.7

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-04-011890-4

Ⅰ.线…　Ⅱ.张…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第025096号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
		版　　次	2001年1月第1版
开　　本	787×960　1/16		2003年7月第2版
印　　张	9.75	印　　次	2003年7月第1次印刷
字　　数	170 000	定　　价	10.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

主　　编　张良云　（南京农业大学）
副 主 编　毕守东　（安徽农业大学）
参编人员　张良云　（南京农业大学）
毕守东　（安徽农业大学）
杨明辉　（南京林业大学）
郑　奕　（上海水产大学）
许爱娟　（南京农业大学）

再版前言

本书第一版自2001年出版以来,得到了全国许多高等院校师生的关心和帮助,他们提出了很多有益的意见和建议。在教材使用过程中,我们也发现了一些问题和需要进一步充实完善的地方。本次修订在保持原貌的基础上,修改了原书中一些不确切之处;根据教学需要,补充了一些例题和习题,增强了教学适应性。

2002年,本书被评选为普通高等教育“十五”国家级规划教材,这对我们的修订工作提出了更高的要求。作为系列教材之一,该教材于2002年又荣获了江苏省优秀课程群奖,在此向关心和支持本书工作的广大教师表示衷心的感谢。

主编

2002年12月于南京

第一版前言

线性代数是大学数学教育中一门主要基础课程，对于培养面向21世纪人才起着重要的作用。本书是编者在进行多年教学实践和改革探索的基础上，为适应不同层次线性代数教学要求而编写的。

作为面向21世纪高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践(项目编号为04－6)的系列教材之一。本书主要适用于农、林、水产等高等院校各专业使用，课内学时为36至54学时的都可选用。同时还可作为教学要求相近的工科类学生及农、林、水产等科技人员的教材或参考书。

根据教学改革的精神和本科各专业对线性代数内容的不同要求，我们在内容、结构等方面做了精心选择和编排，具有如下几个方面的特点。(1) 凯莱(Cayley)在1885年的一篇文章中指出：在逻辑上，矩阵概念先于行列式，而在历史上，两者次序正好相反。在本书中，我们正是根据逻辑发展，先讲矩阵，后讲行列式，并且巧妙地处理好这两部分的内容与结构。(2) 为了帮助学生更好地学习并了解线性代数，我们有选择地介绍了矩阵、行列式以及克拉默(Cramer)法则等重要概念的数学历史，这样可以培养他们的学习兴趣，从而激发他们对学习线性代数的热情。(3)在第三章，我们用较少的篇幅介绍了向量组的线性相关性，既简捷又突出重点，易教又易学，使读者在学习中能一气呵成。(4) 引入矩阵的特征值和特征向量，是为了讨论矩阵的对角化问题(主要是实对称矩阵的对角化)。把二次型化为标准形，就是把实对称矩阵对角化。鉴于此，我们把这两部分内容安排在第五章讲授，以便读者系统地学习。(5) 对本书习题安排，我们进行了精心设计：每节安排了比较简单的练习题，使初学者在学完本节之后，就能做这些题目，从而加深对所学概念的理解，达到初学的目的；在每章之后，我们精选了部分习题，题型是根据近几年考研情况而定的，但难度适宜，具有一定的层次与坡度；选题新颖，尽管有的题目乍看上去比较熟悉，但解起来需要一定的灵活技巧。并在书后附上习题解答。

随着计算机的日益普及与应用的深入，我们深深感到计算机对现代数学教育的重要作用。本书作为系列教材之一，我们把这部分内容安排在《数学实验》一书中编写，由专业教师统一讲授。

本书由张良云任主编，毕守东任副主编。参加编写工作的有南京农业大学

的张良云(第一章、第六章)、安徽农业大学的毕守东(第四章)、南京林业大学的杨明辉(第五章)、上海水产大学的郑奕(第二章)和南京农业大学的许爱娟(第三章)。全书由毕守东、张良云统稿(部分由许爱娟统稿),最后由张良云定稿。特别值得一提的是,编委荣幸邀请到复旦大学李大潜院士作为本书的主审,在此表示诚挚的谢意。同时我们衷心感谢杨崇瑞教授对本书的关心与鼓励,以及王凯捷教授和编委会对本书的有益建议。

由于水平有限,不妥或谬误之处在所难免,恳请读者和使用本教材的教师及专家批评指正。

主编

2000年8月于南京

郑重声明

策　　划　李艳馥

编　　辑　胡乃冏

封面设计　张　楠

版式设计　马静如

责任校对　刘　莉

责任印制　宋克学

目　　录

第一章　矩阵 …… (1)
§1.1　矩阵的概念 …… (1)
§1.2　矩阵的运算 …… (3)
1.2.1　加法运算 …… (3)
1.2.2　数乘运算 …… (4)
1.2.3　乘法运算 …… (5)
1.2.4　矩阵的转置 …… (8)
§1.3　方阵的逆阵 …… (10)
§1.4　矩阵的分块 …… (12)
§1.5　初等变换与初等矩阵 …… (15)
1.5.1　矩阵的初等变换 …… (15)
1.5.2　初等矩阵 …… (17)
习题一 …… (21)
第二章　行列式 …… (24)
§2.1　行列式及其性质 …… (24)
§2.2　行列式的应用 …… (37)
2.2.1　伴随矩阵 …… (37)
2.2.2　矩阵的秩 …… (41)
2.2.3　克拉默(Cramer)法则 …… (44)
习题二 …… (48)
第三章　向量组的线性相关性 …… (51)
§3.1　n 维向量及其运算 …… (51)
§3.2　线性相关性 …… (54)
3.2.1　线性组合 …… (54)
3.2.2　线性相关性 …… (56)
§3.3　极大线性无关组 …… (61)
习题三 …… (65)
第四章　线性方程组 …… (67)
§4.1　线性方程组的基本概念 …… (67)
§4.2　高斯消元法 …… (69)

§4.3 齐次线性方程组 …… (72)
§4.4 非齐次线性方程组 …… (78)
习题四 …… (86)
第五章 特征值、特征向量与二次型 …… (89)
§5.1 正交矩阵 …… (89)
5.1.1 向量的内积 …… (89)
5.1.2 向量组的正交化 …… (90)
5.1.3 正交矩阵 …… (93)
§5.2 特征值和特征向量 …… (95)
§5.3 实对称矩阵的对角化 …… (100)
§5.4 二次型 …… (108)
5.4.1 二次型的矩阵表示 …… (108)
5.4.2 化二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为标准形 …… (110)
5.4.3 正定二次型 …… (116)
习题五 …… (119)
第六章 线性空间与线性变换 …… (122)
§6.1 线性空间及其性质 …… (122)
§6.2 线性空间的基、维数和坐标 …… (125)
§6.3 线性变换 …… (130)
6.3.1 线性变换及其性质 …… (130)
6.3.2 线性变换的矩阵表示式 …… (132)
习题六 …… (134)
习题答案 …… (136)

第一章　矩　　阵

矩阵是线性代数的主要研究对象,是求解线性方程组的一个有力工具.它在许多数学分支中都有重要作用,许多实际问题还可以用矩阵表达并用有关理论得到解决.

§1.1　矩阵的概念

先看如下的一个例子.

例 1　某产品从产地 A_1,A_2,A_3 运到销地 B_1,B_2,B_3,B_4,其运输数量如下表所示.

运输量　销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}
A_2	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
A_3	s_{31}	s_{32}	s_{33}	s_{34}

其中 s_{ij} 表示从产地 A_i 运到销地 B_j 的产品数量,那么这个调运方案可用如下数表来表示:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \end{pmatrix},$$

这个数表我们称之为矩阵.

定义 1　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

叫做 m 行、n 列矩阵，简称为 $m \times n$ **矩阵**①.

这 $m \times n$ 个数叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，a_{ij} 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素. 元素都是实数的矩阵叫做**实矩阵**，元素都是复数的矩阵叫做**复矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外，均指实矩阵.

一般地，我们用黑体大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 来表示矩阵.

上述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij})，也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 成为 $(a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$，称为**行矩阵**.

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}$ 成为

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称为**列矩阵**.

当 $m=n$ 时，$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶**方阵**.

对于两个矩阵，如果它们的行数、列数分别相等，则称它们为**同型矩阵**. 对于两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，如果它们的对应元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是**相等矩阵**，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

下面介绍常用的几个特殊矩阵.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i \neq j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对角矩阵**.

如果对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{I}$

---

① 矩阵这个词是西尔维斯特(Sylvester,1814—1897)于 1850 年首先使用的.

James Joseph Sylvester 是犹太人，从 1841 年起他接受过一些较低的教授职位，经过一些年的努力，他终于成为霍布金斯(Hopkins)大学的教授，并于 1883 年 70 岁时重返英格兰成为牛津大学萨维尔(Sawilian)几何学教授. 他是美国纯数学研究的创始人之一，并创办了美国历史上第一种数学杂志《美国数学杂志》.

西尔维斯特一生致力于纯数学的研究. 他的成就主要在代数方面，他同凯莱(Cayley)一起发展了矩阵和行列式理论，共同奠定了不变量的理论基础.

或 $\boldsymbol{I}_n$，即

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{pmatrix},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**上三角形矩阵**；类似可定义**下三角形矩阵**

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&&&\\b_{21}&b_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}.$$

上三角形矩阵和下三角形矩阵统称为**三角形矩阵**.

练习 1.1

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4×5 矩阵，若其元素 $a_{ij}=i\quad j$，试求出 $\boldsymbol{A}$.
2. 在下列矩阵中，指出对角矩阵，三角形矩阵，单位矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&1\\0&4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&0\\0&3&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

§1.2 矩阵的运算

1.2.1 加法运算

定义 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和

定义为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

简记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

注意:只有当两个矩阵为同型矩阵时这两个矩阵才能进行加法运算.

不难证明,矩阵加法适合下面运算律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$,其中 $\boldsymbol{O}$ 为零矩阵.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$,则称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵.显然有

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

由此,我们可规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 数乘运算

定义 3 数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘定义为

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

简记 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的加法与数乘运算称为**矩阵的线性运算**,它们满足下面的运算律:

(1) 结合律 $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(2) 分配律 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$;

$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(3) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;$0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

其中 k,l 均为实数,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$,且 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解 在 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 两端同时加上$(-3\boldsymbol{A})$得

$$-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9&3\\-6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&-2\\8&-4\end{pmatrix}.$$

两端再乘以$\left(-\dfrac{1}{2}\right)$得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4&1\\-4&2\end{pmatrix}.$$

1.2.3 乘法运算

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**乘积**定义为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{pmatrix},\tag{1.4}$$

其中 $c_{ij}=\sum\limits_{t=1}^{s}a_{it}b_{tj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$,即乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和,如下式所示:

$$\begin{array}{c}\\ i\text{ 行}\end{array}\begin{pmatrix}\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{is}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{pmatrix}\begin{array}{c}j\text{ 列}\\ \begin{pmatrix}\vdots&b_{1j}&\vdots\\\vdots&b_{2j}&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&b_{sj}&\vdots\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}j\text{ 列}\\ \begin{pmatrix}&\vdots&\\\cdots&c_{ij}&\cdots\\&\vdots&\end{pmatrix}\end{array}\ i\text{ 行}.$$

从上述定义可以看出,只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时,两矩阵乘法 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义,且乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数相同,$\boldsymbol{C}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数相同. 例如,设 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 3×4 矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 为 2×4 矩阵,但 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

一般地,矩阵的乘法运算律与数的乘法运算律有如下区别:

(1) 矩阵乘法不满足交换律. 一般地,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$(见下面的例 4),这样,在进行乘法运算时,注意矩阵的前后位置不要任意调换,否则会出错. 特别地,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,我们就说 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换**.

(2) 在数量乘法运算中,若 $ab=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$. 但在矩阵乘积运算中,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}.$$

但

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$,则未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,即对矩阵乘法消去律一般不能成立.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&2\\4&-4\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix},$$

则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-2&-4\\4&8\end{pmatrix}$,但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

容易证明,矩阵乘法满足下面运算律:

(1) 结合律　$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$;

(2) 左分配律　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

　　右分配律　$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$;

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$;

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times s$ 矩阵,则 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{AI}_s=\boldsymbol{A}$;

(5) $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$.

由上面运算律我们知道,在矩阵乘法中,单位矩阵及零矩阵有类似于数字乘法中数“1”和“0”的作用.

有了矩阵乘法,我们就可以定义 n 阶方阵的幂. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,定义

$$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA},\cdots,\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A},$$

其中 k 为正整数. 这就是说 $\boldsymbol{A}^k$ 是 k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘.

由这个定义,我们有如下指数律:

$$A^kA^l = A^{k+l},(A^k)^l = A^{kl},$$

其中 k,l 皆为非负整数.

必须注意,在一般情况下 $(AB)^k \neq A^kB^k$,只有当 A 与 B 可交换时,才有 $(AB)^k = A^kB^k$.

例 4 设 $A=(1\quad 2\quad 3)$,$B=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

(1) 求 AB 和 BA; (2) 设 $C=BA$,求 C^n(n 为正整数).

解 (1) $AB=(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=1\times(-1)+2\times1+3\times0=1.$

$$BA=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}(1\quad 2\quad 3)=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}(2)\ C^n &=(BA)^n=(BA)(BA)\cdots(BA)\\&=B(AB)(AB)\cdots(AB)A\\&=B(AB)^{n-1}A\\&=BA\\&=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\0&0&0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

即对任意的正整数 $n\geqslant2$,$C^n=BA$.

例 5 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n,记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式:$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(2) 若 $\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$,求 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$.

解 (1) 由题意得