高中数学定理、公式的由来及用法

崔振中　孙增海
李清林　柳建民　岳正山　合编
张公道　赵建勋

河北教育出版社

前　言

中学数学中的定理和公式，是数学运算与推理论证的重要依据．能不能掌握好这些定理和公式，直接关系到数学能力和解题能力的高低。而要掌握好它们，就必须搞清其由来及如何运用．特别是通过对定理、公式的运用，对于理解和掌握它们具有极为重要的作用．

为了使高中学生便于掌握这些定理和公式，从而学好数学思想和数学方法，提高数学能力，我们按知识系统，分若干单元，对其中的定理、公式的由来及用法，进行了归纳整理．重点是对定理、公式的用法进行讨论，分门别类地配备了足够数量的例题．每部分后面又精选了适量的相应习题，供学生练习．书的末尾给出了习题的答案或提示．

本书内容的选取，以现行中学教学大纲及教材的要求为依据，并考虑到近年来高考数学试题所涉及到的知识范围及方法，进行了适当的增补．我们期望并相信，本书的出版会对高中数学教师的教学及学生的学习有一定指导意义．这也是我们编写本书的出发点．

参加本书编写工作的有中学特级教师赵建勋、李清林，高级教师崔振中、柳建民、张公道、岳正山，一级教师孙增海．尽管以上同志在编写过程中付出了努力，但由于水平所限，加之时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，敬请诸位读者批评、指正。

编者

目　录

第一篇　代数部分

第二篇　三角部分

第三篇 立体几何部分

第四篇 解析几何部分

第一篇　代数部分

一、有关集合的定理、公式

1．$A\cup B=B\cup A$．（并的交换律）

2．$A\cap B=B\cap A$．（交的交换律）

3．$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．（并对交的分配律）

4．$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$．（交对并的分配律）

5．$A\cup\bar{A}=I$．

6．$A\cap\bar{A}=\phi$．

7．$A\cup(A\cap B)=A$．

8．$A\cap(A\cup B)=A$．

9．$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$．（并的结合律）

10．$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．（交的结合律）

11．$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$．

12．$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$．

由来

以上12个公式都可以用维恩图验证．也可以由定义直接推得．这里，我们只推导3、4．

对于 3，先证 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$。设 $x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\cap C$。这时仅有两种可能性：

若 $x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

若 $x\in B\cap C\Rightarrow x\in B$ 且 $x\in C\Rightarrow x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

即如有 $x\in A\cup(B\cap C)$，必有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，所以 $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

同理可证 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$。

$\therefore\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

对于 4，先证 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。设 $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B\cup C\Rightarrow x\in A$，且 $x\in B$ 或 $x\in C$。

若 $x\in A$ 且 $x\in B\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

若 $x\in A$ 且 $x\in C\Rightarrow x\in A\cap C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

即 $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

同理可证 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$。故得

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

其它各公式的推证方法与此类似，可由读者自己完成。

【注】 有关集合的公式，除以上列举的外，还有其它一些，散见于课本的例题和习题中，大都比较简单，可以直接应用。

用法

(1) 在集合计算中的应用

例 1 设 A 是奇数的集合，B 是偶数的集合，Z 是整数的集合。在整数集合中求：

①$A\cup B$；②$A\cup Z$；③$A\cap B$；④$B\cap Z$；⑤$\bar{A}$；⑥$\bar{B}$；⑦$\bar{Z}$；⑧$\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}$；⑨$\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}$；⑩$\bar{A}\cup\bar{B}$；⑪$\bar{A}\cap\bar{B}$。

解：①$A\cup B=Z$。②$A\cup Z=Z$。③$A\cap B=\phi$。④$B\cap Z=B$。⑤$\bar{A}=B$。⑥$\bar{B}=A$。⑦$\bar{Z}=\phi$。⑧$\overline{\bar{A}\cup\bar{B}}=\bar{A}=B$。⑨$\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}=\bar{A}=B$。⑩$\bar{A}\cup\bar{B}=B\cup A=Z$。⑪$\bar{A}\cap\bar{B}=B\cap A=\phi$。

例 2 设 $A=\{x|x^2<16\}$，$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$。

解：$\because$ $A=\{x|x^2<16\}=\{x|-4<x<4\}$，

$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}=\{x|(x-1)(x-3)\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant 1\}\cup\{x|x\geqslant 3\}$。

$\therefore$ $A\cap B=\{x|-4<x<4\}\cap[\{x|x\leqslant 1\}\cup\{x|x\geqslant 3\}]=[\{x|-4<x<4\}\cap\{x|x\leqslant 1\}]\cup[\{x|-4<x<4\}\cap\{x|x\geqslant 3\}]=\{x|-4<x\leqslant 1\}\cup\{x|3\leqslant x<4\}$。

（2）在集合证明中的应用

例 3 设 $M_1=\{m|m=x^2-y^2,\ x\in Z,\ y\in Z\}$，$M_2=\{m|m=2k+1$ 或 $m=4k,\ k\in Z\}$，求证 $M_1=M_2$。

证明：设 $m\in M_1$，则 $m=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，$x\in Z$，$y\in Z$。若 x、y 一奇一偶，则 $x+y$ 与 $x-y$ 均为奇数，从而 m 为奇数，即存在整数 k，使 $m=2k+1$；若 x、y 同奇或同偶，则 $x+y$ 与 $x-y$ 都是偶数，从而 m 为 4 的倍数，即存在整数 k，使 $m=4k$。故 $m\in M_2$。这证明了 $M_1\subseteq M_2$。

反之，设 $m\in M_2$，若 $m=2k+1$，则 $m=(k+1)^2-k^2\in M_1$；若 $m=4k$，则 $m=(k+1)^2-(k-1)^2\in M_1$。因此 $M_2\subseteq M_1$。

$\therefore$ $M_1=M_2$。

例 4 求证 $A\subset B \Leftrightarrow \bar{B}\subset \bar{A}$.

证明：先证 $A\subset B\Rightarrow \bar{B}\subset\bar{A}$. 任取 $x\in\bar{B}$，则 $x\notin B$，但 $A\subset B$，于是 $x\notin A$，从而 $x\in\bar{A}$. 故 $\bar{B}\subseteq\bar{A}$. 又因为 $A\subset B$. 则 B 中至少有一个元素 y 不属于 A，即有 $y\in B$ 但 $y\notin A$，所以 $y\in\bar{A}$，而 $y\notin\bar{B}$，故 $\bar{B}\subset\bar{A}$.

再证 $\bar{B}\subset\bar{A}\Rightarrow A\subset B$. 任取 $x'\in A$，则 $x'\notin\bar{A}$，但 $\bar{B}\subset\bar{A}$，所以 $x'\notin\bar{B}$，于是 $x'\in B$. 由 $x'\in A$，而有 $x'\in B$，故 $A\subseteq B$. 又因为 $\bar{B}\subset\bar{A}$，则 $\bar{A}$ 中至少有一个元素 y' 不属于 $\bar{B}$. 即有 $y'\in\bar{A}$ 但 $y'\notin\bar{B}$，于是 $y'\in B$ 而 $y'\notin A$，所以 $A\subset B$.

例 5

证明：

① $\overline{A\cup B}\cap\overline{B\cup C}\cap\overline{C\cup A}=\overline{A\cup B\cup C}$.

② $\overline{A\cap B}\cup\overline{B\cap C}\cup\overline{C\cap A}=\overline{A\cap B\cap C}$.

证① $\overline{A\cup B}\cap\overline{B\cup C}\cap\overline{C\cup A}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{B}\cap\bar{C}\cap\bar{C}\cap\bar{A}$
$=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

②与(1)对偶，自然成立.

(3) 在集合化简中的应用

例 6 化简 $A\cup[\bar{B}\cup(\bar{A}\cap B)]$.

解：$A\cup[\bar{B}\cup((\bar{A}\cap B)]=(A\cup\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)=[(A\cup\bar{B})\cup\bar{A}]\cap[(A\cup\bar{B})\cup B]=[(A\cup\bar{A})\cup\bar{B}]\cap[A\cup(B\cup\bar{B})]=[I\cup\bar{B}]\cap[A\cup I]=I\cap I=I$.

例 7 化简 $[A\cup(\bar{A}\cap B)]\cap[B\cup(B\cap C)]\cap B$.

解：$[A\cup(\bar{A}\cap B)]\cap[B\cup(B\cap C)]\cap B=[A\cup(\bar{A}\cap B)]\cap B=(A\cup B)\cap B=B$.

【注】我们约定，字母个数较少的就为较简，当字母个数相同时，运算符号较少的就较简.

习 题 1-1

1. N 为自然数集，Z 为整数集，Q 为有理数集，$\bar{Q}$ 为无理数集，R 为实数集，D 为纯虚数集，E为虚数集，C为复数集．求：(1) $N\cup Z$；(2) $N\cap Z$；(3) $Q\cap\bar{Q}$；(4) $Q\cup\bar{Q}$；(5) $R\cup E$；(6) $D\cap E$；(7) $R\cup C$；(8) $R\cap E$．
2. 证明：集合 $A=\{x|x=14n+36m,\ m、n\in Z\}$ 与集合 $B=\{x|x=2k,\ k\in Z\}$ 相等．
3. 证明：若 $A\supseteq B$，则有 $(A\cap C)\supseteq(B\cap C)$．
4. 已知 $A\subseteq\phi$，求证：$A=\phi$．
5. 证明：$(A\cup B)\cup(\bar{A}\cap B)=A\cup B$．
6. 化简：$(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B})\cup(A\cap C)$．

二、有关反函数的定理、公式

1．可逆还原原理：

$$f[f^{-1}(x)]=x,\ f^{-1}[f(x)]=x.$$

$\boxed{\text{由来}}$

设 $y=f(x)$的定义域是 X，值域是 y，若 $x_0\in X$，$y_0\in y$，且 $y_0=f(x_0)$，则有 $x_0=f^{-1}(y_0)$，所以 $f[f^{-1}(y_0)]=f(x_0)=y_0$，此即 $f[f^{-1}(x)]=x$．

同理，$f^{-1}[f(x_0)]=f^{-1}(y_0)=x_0$，此即 $f^{-1}[f(x)]=x$．

2．反函数存在的充分条件：(严格) 单调函数必有反函数．

由来

只须证明此函数是一一映射，作为函数，当然满足从定义域到值域满射的条件，现在证明它也满足单射. 我们仅就（严格）单调递增的函数 $y=f(x)$ 来说明. 设 $x_1<x_2$ 为定义域内的任意两数，由 $y=f(x)$ 为（严格）递增，有 $f(x_1)<f(x_2)$，这说明 $x_1\neq x_2$ 时有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，即满足单射的条件.

3．互为反函数的函数单调的一致性

如果一个函数在定义域或在定义域的某个子区间上是单调递增（或递减）的函数，则它的反函数在其相应的区间上也是单调递增（或递减）的函数.

由来

设 $y=f(x)$ 的定义域是 A，值域是 B，我们仅就增函数的情况证明.

设 x_1、$x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$，由 $f(x)$ 在 A 上是增函数，$\therefore f(x_1)<f(x_2)$，且 $f(x_1)$，$f(x_2)\in B$.（原函数值域是其反函数定义域）.

又 $f^{-1}[f(x_1)]=x_1$，$f^{-1}[f(x_2)]=x_2$，而 $x_1<x_2$，即 $f^{-1}[f(x_1)]<f^{-1}[f(x_2)]$ 且 $f(x_1)<f(x_2)$.

故 $f^{-1}(x)$ 在 B 上也是增函数.

4．若奇函数有反函数，则它的反函数也为奇函数.

由来

设 $y=f(x)$ 为奇函数且有反函数，定义域为 A，值域为 B. 若 x_1、$-x_1\in A$，y_1、$-y_1\in B$ 且 $f(x_1)=y_1$，由奇函数

知，$f(-x_1)=-f(x_1)=-y_1$，由反函数知，$f^{-1}(y_1)=x_1$，$f^{-1}(-y_1)=-x_1$，即 $f^{-1}(y_1)=-f^{-1}(-y_1)$。

故 $y=f^{-1}(x)$ 为奇函数。

【注】 奇函数不一定有反函数，如：$y=\sin x$ 在 R 上是奇函数，它在 R 上没有反函数，但在 R 的某个子区间上有反函数。偶函数在定义域上不存在反函数。

5．互为反函数的函数图象间的关系

函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

由来

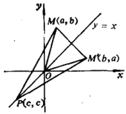

图 1-1

设 $M(a,\ b)$ 是 $y=f(x)$ 的图象上的任意一点，那么 $x=a$ 时 $f(x)$ 有唯一的值 $f(a)=b$。因为 $y=f(x)$ 有反函数 $y=f^{-1}(x)$，所以 $x=b$ 时，$f^{-1}(x)$ 有唯一的值 $f^{-1}(b)=a$，即点 $M'(b,a)$ 在反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上。

如果 $a=b$，那么 M，M' 是直线 $y=x$ 上的同一个点，因此它们关于直线 $y=x$ 对称。

现设 $a\neq b$（如图 1-1），在直线 $y=x$ 上任取一点 $P(c,c)$，连结 PM，PM' 及 MM'。由两点间距离公式：

$$PM=\sqrt{(a-c)^2+(b-c)^2},$$

$$PM'=\sqrt{(b-c)^2+(a-c)^2},$$

$\therefore\quad PM=PM'$.

由此可知，直线 $y=x$ 上任意一点到两个定点 M，M' 的

距离相等，因此直线 $y=x$ 是线段 MM' 的垂直平分线，从而点 M，M' 关于直线 $y=x$ 对称。

因为点 M 是 $y=f(x)$ 的图象上的任意一点，所以 $y=f(x)$ 图象上任意一点关于直线 $y=x$ 的对称点都在它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象上。由 f，f^{-1} 的互逆性可知，函数 $y=f^{-1}(x)$ 图象上任意一点关于直线 $y=x$ 的对称点也都在它的反函数 $y=f(x)$ 的图象上。即 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

【注】 一个函数有反函数的充要条件是确定这个函数的映射是定义域到值域上的一一映射。一函数的定义域和值域，分别为其反函数的值域和定义域。对于函数 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$，若在同一坐标系中画图，图象是重合的。

用法

(1) 判定一函数有反函数并求出反函数

只要知道确定这个函数的映射是定义域到值域上的一一映射，或是这个函数是(严格)单调的就可知道它有反函数。

例 1 求函数 $y=\lg(4x-1)$ 的反函数。

解： $\because$ 该对数的底 $a=10>1$，$\therefore \lg(4x-1)$ 在定义域 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 上是单调递增的，故在定义域 $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 上存在反函数。

$\because \quad y=\lg(4x-1)$，$\therefore \quad 10^y=4x-1$，

$\therefore \quad x=\frac{1}{4}(10^y+1)$。

将 x，y 字母互换，得 $y=\frac{1}{4}(10^x+1)$

$\therefore$ 反函数是 $y=\frac{1}{4}(10^x+1)$，$x\in(-\infty,+\infty)$。

例 2 求函数 $y=x^2+1(x<0)$ 的反函数。

解： $\because$ 函数 $y=x^2+1$ 当 $x<0$ 时是单调递减的，
$\therefore$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上存在反函数。
将所给函数变形为 $x^2=y-1$，由 $x<0$，得 $x=-\sqrt{y-1}$.
将 x，y 字母互换得 $y=-\sqrt{x-1}(x>1)$，

$\therefore$ 反函数为 $y=-\sqrt{x-1}(x>1)$。

例 3 求函数 $y=\begin{cases}x^2-1 & (0\leqslant x\leqslant 1),\\ x^2 & (-1\leqslant x<0)\end{cases}$ 的反函数。

解： 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时函数为增，在这一段子区间上存在反函数。$y=x^2-1$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 段中有 $0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x^2-1\leqslant 0$，即 $-1\leqslant y\leqslant 0$，此即这段的值域。由这段的表达式解得 $x=\sqrt{y+1}$.

将 x，y 字母互换，得 $y=\sqrt{x+1}(-1\leqslant x\leqslant 0)$。

在 $-1\leqslant x<0$ 时函数为减，在这一段子区间上存在反函数。由 $y=x^2(-1\leqslant x<0)$ 段中有 $-1\leqslant x<0\Rightarrow 0<x^2\leqslant 1$，即 $0<y\leqslant 1$，此即这段的值域。由这段的表达式得 $x=-\sqrt{y}$.

将 x，y 字母互换，得 $y=-\sqrt{x}\ (0<x\leqslant 1)$。
故所求的反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ -\sqrt{x} & (0<x\leqslant 1).\end{cases}$$

【注】本题并非在整个定义域上是递增（或递减）的，但它是定义域到值域上的一一映射，所以存在反函数。

例 4　求 $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$的反函数。

解：在此区间上函数递减，因此存在反函数，并且函数的值域是$[-1,\ 1]$。

因 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$，故$(x-\pi)\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，从而$(\pi-x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，又由 $\sin x=\sin(\pi-x)$，所以原来的函数变为 $y=\sin(\pi-x)$且$(\pi-x)\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，根据反正弦函数的定义可得 $\pi-x=\arcsin y$，即 $x=\pi-\arcsin y$。

将x，y字母互换，所求的反函数为 $y=\pi-\arcsin x$，$x\in[-1,\ 1]$。

【注】本题的反函数不能直接写成 $y=\arcsin x$，因为两个函数即使对应法则互逆，也不一定就互为反函数。要保证是互为反函数，必须两函数的定义域和值域还要是互相对调的。这里 $y=\sin x$ 的定义域$\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$并不是 $y=\arcsin x$ 的值域$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$。处理反函数问题，定义域和值域是重要的。

(2) 证明函数不存在反函数

例 5　证明 $y=x^2(x\in R)$不存在反函数。

证明：由于定义域集合 R 到值域集合 $\overline{R^-}$ 的对应不是一

一映射，例如，R 中的 1 与 -1 都对应 $\overline{R^-}$ 中的 1，因而不存在反函数。

例 6 证明 $y=\dfrac{x}{1+x^2}\ (x\in R)$ 不存在反函数。

证明： 设 x_1、$x_2\in R$，且 $x_1\neq x_2$，考察等式 $\dfrac{x_1}{1+x_1^2}=\dfrac{x_2}{1+x_2^2}$ 能否成立。由于分子不会为零，故只须 $x_1+x_1x_2^2=x_2+x_1^2x_2$ 成立。由此得 $(x_1-x_2)(1-x_1x_2)=0$，但 $x_1\neq x_2$，只要等式 $1-x_1x_2=0$ 成立，即只须 x_1 与 x_2 互为倒数且不等于 ±1。这样，我们取 $x_1=3$，$x_2=\dfrac{1}{3}$，虽然 $x_1\neq x_2$，但 $y_1=\dfrac{x_1}{1+x_1^2}=\dfrac{3}{10}$，$y_2=\dfrac{x_2}{1+x_2^2}=\dfrac{3}{10}$，即有 $y_1=y_2$，所给函数不是一一映射，因而没有反函数。

(3) 用反函数的定义域、值域研究原来函数的值域、定义域。

例 7 求函数 $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}$ 的值域。

解： 由函数解析式变形得 $10^{2x}=\dfrac{y+1}{y-1}$，反函数为 $x=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{y+1}{y-1}$。反函数的定义域是 $\dfrac{y+1}{y-1}>0$ 即 $y<-1$ 或 $y>1$。

故原函数的值域为 $\{y|y<-1 或 y>1\}$。

(4) 求某些函数的表达式

例 8 已知 $f(3^x)=x$，求 $f(x)$。

解： $\because$ $f[f^{-1}(x)]=x$，故 $f^{-1}(x)=3^x$。

$\therefore$ $f(x)=\log_3 x\ (x>0)$。

习　题 1-2

1．求 $y=-\sqrt{x}$ 的反函数。

2．求 $y=\dfrac{1}{3}\log_2\dfrac{x}{1-x}+1$ 的反函数。

3．求 $y=2^{x^2-2x}$，$x\in(-\infty,\ 1)$ 的反函数。

4．求 $y=x+6\sqrt{x-9}-1$ 的反函数。

5．求 $y=2\arcsin\dfrac{1}{x}$ 的反函数。

6．求 $y=x^3+3x^2+3x$ 的反函数。

7．证明 $y=(x-2)^2$，$(1\leqslant x\leqslant 3)$ 不存在反函数。

8．$y=\dfrac{2x+1}{x+a}\left(a\neq\dfrac{1}{2}\right)$ 的图象关于 $y=x$ 对称，求 a 的值，并写出这个函数。

9．若 $y=f(x)$ 在定义域内为增函数，且 $f(x)\equiv f^{-1}(x)$，证明 $f(x)\equiv x$。

三、有关单调函数的定理、公式

函数的单调性总是对于区间来说的，这个区间是定义域的子集，以下我们把它叫做定义区间。

1．若函数 $y=f(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数），则对任意常数 c，函数 $y=f(x)+c$ 在定义区间内也是增函

数（减函数）.

2．若函数 $y=f(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数），则：

1°．当 $c>0$ 时，$y=cf(x)$ 是增函数（减函数）.

2°．当 $c<0$ 时，$y=cf(x)$ 是减函数（增函数）.

3．若函数 $y_1=f(x)$ 和 $y_2=g(x)$ 在定义区间内都是增函数（减函数），则 $y=f(x)+g(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数）.

4．若两个正值函数 $y_1=f(x)$ 和 $y_2=g(x)$ 在定义区间内都是增函数（减函数），则 $y=f(x)\cdot g(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数）.

5．若两个负值函数 $y_1=f(x)$ 和 $y_2=g(x)$ 在定义区间内都是增函数（减函数），则 $y=f(x)\cdot g(x)$ 在定义区间内是减函数（增函数）.

6．若正值函数 $y=f(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数），则 $y=[f(x)]^2$ 在定义区间内是增函数（减函数）.

7．若负值函数 $y=f(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数），则 $y=[f(x)]^2$ 在定义区间内是减函数（增函数）.

8．若函数 $y=f(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数），则 $y=-f(x)$ 在定义区间内是减函数（增函数）.

9．若函数 $y=f(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数）且函数值符号保持不变，则 $y=\dfrac{1}{f(x)}$ 在定义区间内是减函数（增函数）.

10．若函数 $y=f(x)$ 在定义区间内是增函数（减函数），且 $f(x)>0$，则 $y=\sqrt{f(x)}$ 在定义区间内是增函数（减函