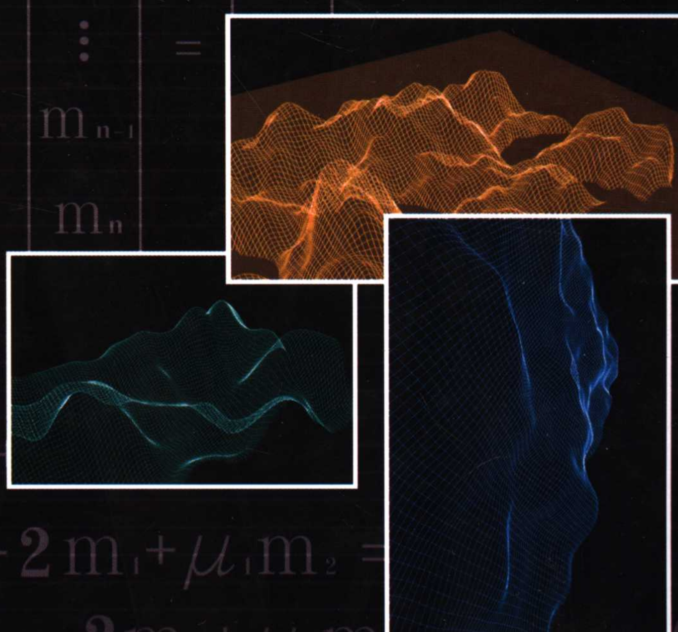
数值计算方法及其应用

朱长青　编著



科学出版社
www.sciencep.com

数值计算方法及其应用

朱长青　编著

解放军信息工程大学测绘学院出版基金资助

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了数值计算方法的基本方法和基本原理. 全书内容共分 7 章，主要有代数插值、样条函数插值、最佳逼近、二元函数插值与逼近、数值积分和数值微分、常微分方程数值解法、微分方程边值问题数值解法等. 同时，根据测绘等专业的需要，选取了一些专业上需要而一般教材上没有的内容以及作者推证的一些方法和公式. 另外，还穿插了一些数值计算方法在应用中的实例.

本书可作为理工科相关专业的研究生和高年级本科生“计算方法”等课程的教材，也可作为有关领域的教学、科研、生产人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法及其应用/朱长青 编著. —北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-016503-9

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 朱…　Ⅲ. 计算方法　Ⅳ. O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 139337 号

责任编辑：朱海燕　韩　鹏/责任校对：赵桂芬

责任印制：钱玉芬/封面设计：王　浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2006 年 1 月第　一　版　　开本：787×1092 1/16

2006 年 1 月第一次印刷　　印张：12 3/4

印数：1—3 000　　字数：289 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

序　言

在许多应用领域都涉及数值计算的问题.如何有效地进行数值计算,提高计算效率和计算精度,是许多理论和应用研究中十分重要的问题.

朱长青教授根据多年来讲授和研究数值计算方法的经验和体会,完成了这部《数值计算方法及其应用》.该书将数值计算方法与应用相结合,根据测绘等学科的需要,阐述了数值计算方法的基本理论、方法及其在测绘中的应用.特别地,包含了一些一般计算数学著作中没有的内容,例如测绘等领域广泛应用的二元函数插值逼近、样条函数插值等,同时融入作者一些新的数值计算研究成果,在理论和应用方面都有较大的创新性.

朱长青教授具有基础数学学士、应用数学硕士、地图制图学博士的学习经历,又有多年从事数学教学及地图制图学与GIS教学的经验,同时,在数学与测绘应用相结合方面做了大量研究.因此,该著作既有数学理论的严密性,又有应用的广泛性,是一本有特色的著作.同时,该书理论完整,应用广泛,叙述简捷,在相关专业教学、科研及生产等方面都有重要的理论和应用价值,可用于测绘等广泛的研究领域,具有较好的学术、理论和应用价值.

该书不仅可以作为相关专业的本科生和研究生的公共教材,对于测绘等领域的教学、科研、生产人员也是一本很好的参考书.该书的出版,对于测绘等学科的发展、数值计算方法在测绘等学科中的深入应用等都具有重要意义.

中国工程院院士

王家耀

2005年6月于郑州

前　　言

数值计算方法是研究各种数学问题的数值解法的一门应用数学课程.由于其理论的重要性和应用的广泛性,已成为许多学科的研究生和高年级大学生的基础课程.在众多领域中,数值计算方法也得到了深入的应用.

本书系统地介绍了数值计算方法的基本思想、基本原理和基本方法.全书共分7章,主要有代数插值、样条函数插值与逼近、函数最佳逼近、二元函数插值与逼近、数值积分和数值微分、常微分方程初值问题的数值解法、微分方程边值问题的数值解法等.同时,根据测绘等专业的需要,选取了一些专业上需要而一般教材上没有的内容,如加权平均抛物线拟合法、张力样条函数、贝齐尔方法、移动曲面拟合法等.特别地增加了二元函数逼近等以及作者推证的一些方法和公式,如带有导数的双二次样条函数乘积型插值、二元函数数值微分、收敛性等.另外,还穿插了一些计算方法在测绘上的应用实例.在叙述中力求简捷明了,便于学习.在每章最后,还配备了相应的习题,以利于加深对内容的理解和掌握.

作者有多年讲授研究生"计算方法"课程的体会和研究数值计算方法在测绘中应用的体会,并在1997年出版《计算方法及其在测绘中的应用》一书.本书是在此基础上经修订而成.本书可作为理工科院校相关专业的研究生、本科生"数值计算方法"等课程的基础教材,也可作为相关专业的教学、科研、生产人员的参考用书.

由于作者水平所限,书中一定还有缺点和不妥之处,恳请读者批评指正.

朱长青

2005年于郑州

目　录

第1章 代数插值

导读:函数插值即是求过给定点的数学函数,几何上即是求过节点的曲线.本章首先给出函数插值的基本概念,并提出插值需要研究的几个问题.然后,给出了 n 次代数插值多项式的存在性、唯一性和余项估计,并给出代数插值的几种表达形式,其中有最基本的拉格朗日插值多项式、具有递推公式的牛顿插值公式以及等距节点的牛顿插值公式.另外,还研究了带有导数要求的埃尔米特插值多项式的存在性、唯一性、余项估计及表达式.最后,指出高阶代数插值存在的振荡现象,并给出几种有效的分段低次插值公式.

§1.1 引 言

在生产和科学研究中,经常用函数 $y=f(x)$ 来表示某种内在规律的变化关系.但在实际问题中,经常遇到这样的情况,虽然理论上知道函数 $y=f(x)$ 在某个区间 $[a,b]$ 上是连续的,例如地图上的等高线,但是有时很难找到它的解析表达式,而往往只能通过实验或测量等手段得到 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的有限个不同的点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的值 y_0, $y_1,\cdots,y_n$.显然,通过这有限个点来分析 $y=f(x)$ 的形态,研究 $y=f(x)$ 的变化规律,求出 $y=f(x)$ 在其他点的值都是困难的.因此,希望根据给定的函数值找出 $f(x)$.若不行,则构造一个函数 $y=P(x)$ 近似代替 $y=f(x)$.自然地,既希望 $P(x)$ 能反映 $f(x)$ 的特性,又便于计算,且利用 $P(x)$ 代替 $f(x)$ 的误差能尽量小.寻找这样的 $P(x)$ 就是计算方法中所要研究的主要问题.

如何根据给定的值寻找 $P(x)$ 呢?为了满足上面所希望的要求,通常要求 $P(x)$ 在点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上满足要求

$$P(x_i)=y_i,\qquad i=0,1,\cdots,n, \tag{1.1.1}$$

寻找满足上述条件的 $P(x)$ 的问题称为插值问题.条件(1.1.1)称为插值条件;$f(x)$ 称为被插值函数;$P(x)$ 称为插值函数;x_0, $x_1,\cdots,x_n$ 称为插值节点;除非特别声明,总设节点是互不相同的;$[a,b]$ 称为插值区间;$f(x)-P(x)$ 称为插值余项,记为 $R(x)$,即

$$R(x)=f(x)-P(x).$$

从几何上看,插值问题就是通过曲线 $y=f(x)$ 上的 $n+1$ 个互不相同的点 (x_i, y_i) $(i=0,1,\cdots,n)$,作曲线 $y=P(x)$ 来近似代替曲线 $y=f(x)$.见图1.1.

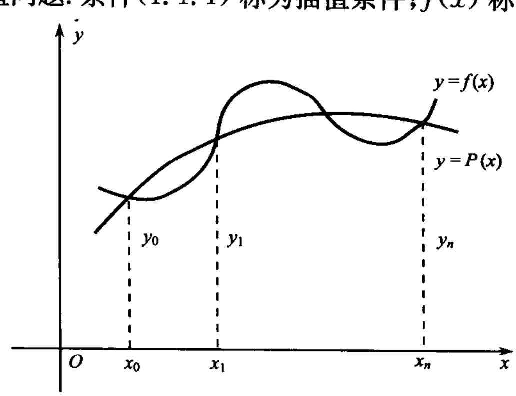


图1.1

寻找插值函数的方法称为插值法,它

是一种古老的、然而却是目前常用的方法，它不仅直接广泛地应用于生产实际和科学研究中，而且也是进一步学习数值计算方法的基础.

插值问题的首要工作是插值函数的选取，这常取决于使用上的需要及计算上的方便.常用的插值函数有代数多项式、三角多项式、有理函数等.若选取的插值多项式是代数多项式，则这样的插值问题称为代数插值问题.本章主要研究代数插值问题.在下一章，将选用样条函数作为插值函数.

在选取了插值函数的类型之后，自然要考虑下面的问题：

1）满足插值条件的插值函数是否存在？

2）插值函数 $P(x)$ 是否唯一？

3）插值函数 $P(x)$ 的表达式如何？

4）插值函数 $P(x)$ 与被插值函数 $f(x)$ 的误差如何？

5）插值问题有何具体应用？

下面将围绕这些问题来讨论代数插值问题.首先，给出 n 次代数插值多项式的存在唯一性和余项估计，进而给出拉格朗日形式和牛顿形式的 n 次代数插值多项式的具体表达式，最后讨论带有导数插值要求的埃尔米特插值多项式及分段低次插值.

§1.2　n 次代数插值多项式

本节给出 n 次代数插值多项式的概念、存在唯一性的证明及余项估计.

1.2.1　n 次代数插值多项式的概念

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，且在$[a,b]$上 $n+1$ 个不同的点

$$x_0, x_1, \cdots, x_n$$

上分别取值

$$y_0, y_1, \cdots, y_n,$$

若构造一个次数不超过 n 的代数多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \tag{1.2.1}$$

使之满足插值条件

$$P_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0,1,\cdots,n, \tag{1.2.2}$$

那么寻求这样的 n 次代数多项式 $P_n(x)$ 的插值问题称为 n 次代数插值问题，简称 n 次插值. $P_n(x)$ 称为函数 $f(x)$ 在节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的 n 次代数插值多项式，简称 n 次插值多项式.

1.2.2　n 次代数插值多项式的存在唯一性

要得到满足插值条件(1.2.2)的插值多项式(1.2.1)，只要得到插值多项式 $P_n(x)$ 的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 即可.由插值条件(1.2.2)可知，$P_n(x)$ 的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足下面的线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

由线性代数知，其系数行列式(记为 V)是 $n+1$ 阶范德蒙德(Vandermonde)行列式，且

$$V = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j),$$

由于 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 是区间$[a,b]$上互不相同的点，故上式右端乘积中的每一个因子 $x_i - x_j \neq 0$，于是 $V \neq 0$，因而由线性代数中的格拉姆(Gramer) 法则知，方程组(1.2.3)的解存在且唯一. 于是，得到下面的定理.

定理 1.1 若插值节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互不相同，则满足插值条件(1.2.2) 的 n 次代数插值多项式(1.2.1) 存在且唯一.

唯一性表明了，不论用什么方法构造，也不论用什么形式来表示插值多项式 $P_n(x)$，只要满足同样的插值条件且次数不超过 n，其结果都是恒等的.

这里应当注意，若不限定插值多项式的次数，则满足插值条件(1.2.2) 的插值多项式并不唯一. 例如，设 $P_n(x)$ 是满足插值条件(1.2.2) 的 n 次代数插值多项式，则对于任何的多项式 $S(x)$，多项式

$$Q(x) = P_n(x) + S(x)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

也是满足插值条件(1.2.2) 的插值多项式.

通过解线性方程组(1.2.3)，可以得到满足插值条件(1.2.2) 的 n 次代数插值多项式(1.2.1). 后面几节将给出另外几种不同形式的满足插值条件(1.2.2) 的形式直观方便的插值多项式. 下面先讨论插值多项式的余项估计.

1.2.3 n 次代数插值多项式的余项估计

在插值区间$[a,b]$上，用满足插值条件(1.2.2) 的 n 次代数插值多项式 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$，即

$$f(x) \approx P_n(x),$$

那么，在节点 $x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 处，有

$$P_n(x_i) = f(x_i),$$

但在 $x \neq x_i$ 处，$P_n(x)$ 与 $f(x)$ 一般是不相等的，即存在误差 $f(x) - P_n(x)$，这称为插值余项，记为 $R_n(x)$，即

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{1.2.4}$$

不妨设互不相同的节点按由小到大的顺序排列

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b,$$

则有下面的余项估计定理.

定理 1.2 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上有直到 $n+1$ 阶的导数，则有

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n), \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

其中 $\xi_x \in (a,b)$.

证明 设 x 是$[a,b]$中的任一数，当 $x=x_i(i=0,1,\cdots,n)$时，(1.2.5)两端都为零，故定理成立. 因此下面总设 $x\neq x_i(i=0,1,\cdots,n)$.

由插值条件(1.2.2)，有

$$R_n(x_i)=f(x_i)-P_n(x_i)=0, \qquad i=0,1,\cdots,n,$$

因此，$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 都是$R_n(x)$的零点，因此可以设

$$R_n(x)=k(x)(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \tag{1.2.6}$$

若能确定出 $k(x)$，则问题就解决了. 为此引入辅助函数

$$\varphi(t)=R_n(t)-k(x)(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n),$$

则 $\varphi(t)$有 $n+2$ 个零点 $x,x_0,x_1,\cdots,x_n$，如果将这 $n+2$ 个零点按大小顺序排列，则由高等数学中的罗尔定理，$\varphi'(t)$在(a,b)上至少有 $n+1$ 个零点，$\varphi''(t)$在(a,b)上至少有 n 个零点，…，$\varphi^{(n+1)}(t)$在(a,b)上至少有一个零点，设此零点为 ξ_x(与 x 有关)，则有

$$\varphi^{(n+1)}(\xi_x)=f^{(n+1)}(\xi_x)-k(x)(n+1)!=0,$$

于是有

$$k(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!},$$

将上式代入(1.2.6)，即得(1.2.5).

利用余项估计式(1.2.5)，即可得到用 n 次代数插值多项式近似代替 $f(x)$的误差. 但在具体应用时，因为 ξ_x 在(a,b)内一般不能具体求出，所以计算 $R_n(x)$仍有困难，但对于某些函数 $f(x)$，如果在区间$[a,b]$上有

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_{n+1},$$

则有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|. \tag{1.2.7}$$

由此不等式即可求得插值多项式的误差界. 显见，误差不仅和 $f(x)$有关，而且也和因子$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$有关，因此，为使$|R_n(x)|$尽量小还需使$|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$尽量小，这在以后讨论.

1.2.4 插值余项的事后估计法

许多情况下，要直接应用余项估计公式(1.2.5)或(1.2.7)来估计误差是困难的. 例如，只是给出函数 $y=f(x)$的一些点上的值而没有给出具体的解析表达式，当然不能用(1.2.5)或(1.2.7). 但这时，可以通过前后两个计算结果的偏差来估计误差.

以一次插值为例，设有三个插值节点 $x_0<x_1<x_2$，先用 x_0,x_1 进行一次插值，求出 $f(x)$的一个近似值，记为 P_1. 然后用 x_0,x_2 进行一次插值，求出 $f(x)$的一个近似值，记为 Q_1. 由余项公式(1.2.5)，有

$$f(x)-P_1=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0)(x-x_1),$$

$$f(x)-Q_1=\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-x_0)(x-x_2),$$

假设 $f''(x)$在插值区间变化不大，可认为 $f''(\xi_1)\approx f''(\xi_2)$. 将上面两式相除可得

$$\frac{f(x)-P_1}{f(x)-Q_1}\approx\frac{x-x_1}{x-x_2},$$

即有

$$f(x)-P_1\approx\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(Q_1-P_1). \tag{1.2.8}$$

上式表明，插值结果 P_1 的误差 $f(x)-P_1$ 可以通过两个插值结果的偏差 Q_1-P_1 来估计.

这种直接利用计算结果来估计误差的方法，称为插值误差的事后估计法.

对于更高次的插值，可推导类似于(1.2.8)的估计式.

§1.3 拉格朗日插值多项式

由上节知道，要求满足插值条件

$$P_n(x_i)=y_i,\qquad i=0,1,\cdots,n \tag{1.3.1}$$

的 n 次代数插值多项式 $P_n(x)$，只要解一个 $n+1$ 个方程组成的 $n+1$ 元方程组即可. 但在实际计算中，当 n 较大时，解 $n+1$ 元线性方程组较为困难. 下面将介绍几种简便的求 n 次插值多项式的方法，这一节给出拉格朗日(Lagrange)形式的代数插值多项式.

1.3.1 拉格朗日插值基多项式

为了构造满足插值条件(1.3.1)的 n 次代数插值多项式，先考虑一个简单的插值问题，即求一个 n 次插值多项式，使它在插值节点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 上的值为

$$l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\neq k\end{cases}\quad i,k=0,1,\cdots,n. \tag{1.3.2}$$

由条件 $l_k(x_i)=0(i\neq k)$ 知，$x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_n$ 都是 n 次多项式 $l_k(x)$ 的零点，故可设

$$l_k(x)=C_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n),$$

其中 C_k 是待定系数. 又由条件 $l_k(x_k)=1$，有

$$1=l_k(x_k)=C_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n),$$

注意到 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 互不相同，于是由上式可得

$$C_k=\frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)},$$

因此得

$$\begin{aligned}l_k(x)&=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\\&=\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i},\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

$l_k(x)$ 即为满足插值条件(1.3.2)的 n 次插值多项式. 取 $k=0,1,\cdots,n$，即得满足插值条件(1.3.2)的 $n+1$ 个 n 次插值多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$，这些多项式称为在 $n+1$ 个节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n 次基本插值多项式或 n 次拉格朗日插值基多项式.

1.3.2 拉格朗日插值多项式

利用$n+1$个n次拉格朗日插值基多项式$l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$为基础,就可以写出满足插值条件(1.3.1)的n次代数插值多项式.

定理 1.3 满足插值条件(1.3.1)的n次插值多项式可表示为

$$P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x). \tag{1.3.4}$$

证明 由于$l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$都是n次多项式,故它们的线性组合$P_n(x)$也是次数不超过n的多项式. 又由于

$$l_k(x_i)=\delta_{ki},\qquad k,i=0,1,\cdots,n,$$

于是,得

$$P_n(x_i)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x_i)=y_i,\qquad i=0,1,\cdots,n,$$

因此,$P_n(x)$是满足插值条件(1.3.1)的n次代数插值多项式.

称满足插值条件(1.3.1)的形如(1.3.4)的n次插值多项式为拉格朗日插值多项式,并记为$L_n(x)$,即

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x). \tag{1.3.5}$$

由n次代数插值多项式的唯一性可知,满足插值条件(1.2.2)或(1.3.1)的n次代数插值多项式是唯一的,因此这里所得的拉格朗日插值多项式和由方程组(1.2.3)所确定的n次代数插值多项式是恒等的,因而它们的余项也是同样的,所以拉格朗日插值多项式的余项公式即为(1.2.5),即

$$\begin{aligned}R_n(x)&=f(x)-L_n(x)\\&=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

为了便于上机计算,常将拉格朗日插值多项式改写为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[y_k\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)\right].$$

作为常用的特例,列出$n=1,2$时的拉格朗日插值多项式.

1.3.3 线性插值和抛物插值

1. 线性插值

在(1.3.5)中取$n=1$,则拉格朗日插值公式为

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x),$$

即

$$L_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \tag{1.3.7}$$

这是一个线性函数. 用$L_1(x)$近似代替$f(x)$称为线性插值,公式(1.3.7)称为线性插值公式. 在利用函数表计算函数值时,常常用到线性插值. 在几何上,线性插值就是用通过两点$A(x_0,y_0)$和$B(x_1,y_1)$的直线近似代替$y=f(x)$. 见图 1.2.

2. 抛物插值

在(1.3.5)中取 $n=2$,则拉格朗日插值公式(1.3.5)为

$$L_2(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x),$$

即

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \tag{1.3.8}$$

这是一个二次函数,用 $L_2(x)$ 近似代替 $f(x)$,在几何上就是利用通过三点 $A(x_0,y_0)$,$B(x_1,y_1)$ 和 $C(x_2,y_2)$ 的抛物线 $y=L_2(x)$ 近似代替 $y=f(x)$. 如图 1.3. 相应的插值问题称为抛物插值,公式(1.3.8)称为抛物插值公式.

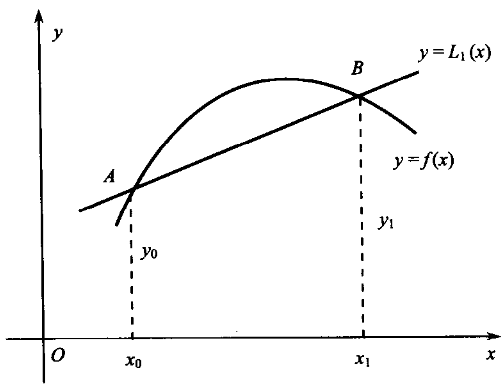


图 1.2

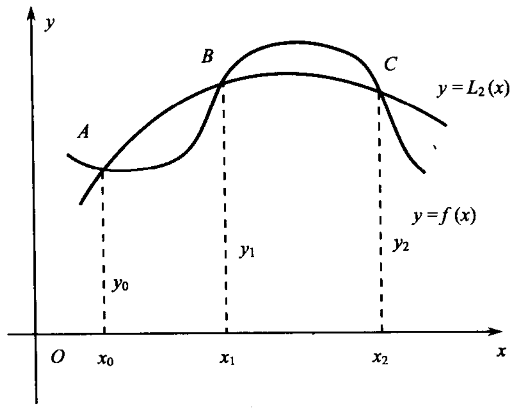


图 1.3

例 1.1 已知函数 $y=\sqrt{x}$ 的值 $\sqrt{1}=1$,$\sqrt{2}\approx1.414$,$\sqrt{3}\approx1.732$,试分别用线性插值和抛物插值求 $\sqrt{1.5}$ 的近似值,并估计误差.

解

(1) 利用线性插值

1) 取节点为 $x_0=1$,$x_1=2$,则由线性插值公式(1.3.7),有

$$L_1(x)=\sqrt{1}\ \frac{x-2}{1-2}+\sqrt{2}\ \frac{x-1}{2-1}, \tag{1.3.9}$$

于是

$$\sqrt{1.5}\approx L_1(1.5)=\sqrt{1}\ \frac{1.5-2}{1-2}+\sqrt{2}\ \frac{1.5-1}{2-1}$$

$$\approx 0.5+0.5\cdot1.414=1.207,$$

下面看公式(1.3.9)的误差,由于

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

故由(1.3.6)有

$$R_1(x)=-\frac{1}{8}\xi_x^{-\frac{3}{2}}(x-x_0)(x-x_1),\qquad \xi_x\in[1,2], \tag{1.3.10}$$

而 $x=1.5, x_0=1, x_1=2$，故

$$|R_1(1.5)| \leqslant \frac{1}{8}|(1.5-1)(1.5-2)| \max_{1\leqslant\xi_x\leqslant 2}|\xi_x^{-\frac{3}{2}}|$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 1=0.03125. \tag{1.3.11}$$

2) 取节点 $x_0=2, x_1=3$，利用线性插值，则插值公式为

$$\widetilde{L}_1(x)=\sqrt{2}\ \frac{x-3}{2-3}+\sqrt{3}\ \frac{x-2}{3-2}, \tag{1.3.12}$$

利用上面的公式

$$\sqrt{1.5}\approx\widetilde{L}_1(1.5)=\sqrt{2}\ \frac{1.5-3}{2-3}+\sqrt{3}\ \frac{1.5-2}{3-2}$$

$$\approx 1.5\cdot 1.414-0.5\cdot 1.732\approx 1.255, \tag{1.3.13}$$

利用(1.3.10)，这里 $x_0=2, x_1=3, \xi_x\in[2,3]$，有

$$|\widetilde{R}_1(1.5)| \leqslant \frac{1}{8}|(1.5-2)(1.5-3)| \max_{2\leqslant\xi_x\leqslant 3}|\xi_x^{-\frac{3}{2}}|$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 0.5\cdot 1.5\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\approx 0.03315. \tag{1.3.14}$$

(2) 利用抛物插值求$\sqrt{1.5}$

取节点 $x_0=1, x_1=2, x_2=3$，由抛物插值公式(1.3.8)，有

$$L_2(x)=\sqrt{1}\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}+\sqrt{2}\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}+\sqrt{3}\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}, \tag{1.3.15}$$

则

$$\sqrt{1.5}\approx L_2(1.5)\approx 1\cdot\frac{(1.5-2)\cdot(1.5-3)}{(1-2)\cdot(1-3)}$$

$$+1.414\cdot\frac{(1.5-1)\cdot(1.5-3)}{(2-1)\cdot(2-3)}+1.732\cdot\frac{(1.5-1)\cdot(1.5-2)}{(3-1)\cdot(3-2)}$$

$$=\frac{0.5\cdot 1.5}{2}+0.5\cdot 1.5\cdot 1.414-\frac{1}{2}\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 1.732$$

$$\approx 1.219, \tag{1.3.16}$$

插值余项

$$R_2(x)=-\frac{1}{3!}f'''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \qquad \xi_x\in[1,3],$$

将 $x=1.5, x_0=1, x_1=2, x_2=3, f'''(\xi_x)=\frac{3}{8}\xi_x^{-\frac{5}{2}}$ 代入上式，有

$$|R_2(1.5)| \leqslant \frac{1}{3!}|(1.5-1)\cdot(1.5-2)\cdot(1.5-3)| \max_{1\leqslant\xi_x\leqslant 3}\left|\frac{3}{8}\xi_x^{-\frac{5}{2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{3!}0.5\cdot 0.5\cdot 1.5\cdot\frac{3}{8}\cdot 1\approx 0.02344.$$

实际上，$\sqrt{1.5}$的精确结果为 1.22474…. 将上述结果与精确值相比较可见，抛物插值的精度优于线性插值，而线性插值的近似值 $L_1(1.5)$ 又优于 $\widetilde{L}_1(1.5)$.

一般说来，高次插值多项式的精度要优于低次插值多项式，插值点在节点之间的插值优于节点之外的插值.

插值点在节点之间的插值称为内插,插值点在节点之外的插值称为外插. 一般内插优于外插,所以实际应用中一般都用内插.

§1.4 差商和牛顿插值公式

在上节,介绍了拉格朗日型代数插值公式,拉格朗日公式含义直观,形式简单,规律明显,因而被广泛应用. 但是它有一个缺点,就是当插值精度不够,需要增加新的节点时,则整个计算工作必须从头开始,不能利用已有的结果. 为了克服这一缺点,本节介绍一种能灵活增加插值节点并且节省运算次数的牛顿(Newton)插值公式. 下面先给出差商的概念,然后给出牛顿插值公式.

1.4.1 差商的概念

设有函数 $f(x)$,它在互不相同的节点

$$x_0, x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n$$

上分别取值

$$f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_i), \cdots, f(x_j), \cdots, f(x_n),$$

则称

$$\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j} \tag{1.4.1}$$

为函数 $f(x)$在点 x_i, x_j 处的一阶差商,记为 $f[x_i, x_j]$. 例如

$$f[x_0, x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}.$$

称一阶差商的差商

$$\frac{f[x_i, x_j]-f[x_j, x_k]}{x_i-x_k} \tag{1.4.2}$$

为函数 $f(x)$在 x_i, x_j, x_k 处的二阶差商,记为 $f[x_i, x_j, x_k]$. 例如

$$f[x_0, x_1, x_2]=\frac{f[x_0, x_1]-f[x_1, x_2]}{x_0-x_2}.$$

一般地,可以通过函数 $f(x)$的 $k-1$ 阶差商来定义 $f(x)$的 k 阶差商. 例如,$f(x)$在 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 处的 k 阶差商定义为

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]=\frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]-f[x_1, x_2, \cdots, x_k]}{x_0-x_k}. \tag{1.4.3}$$

从差商的定义可见,当 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 给定时,k 阶差商就是一个具体的数值. 但当 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 中含有变量 x 时,则 k 阶差商就是一个关于 x 的函数. 例如

$$f[x, x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$f[x, x_0, x_1]=\frac{f[x, x_0]-f[x_0, x_1]}{x-x_1}.$$

为了便于计算应用,通常采用称为差商表的表格形式计算差商,如表 1.1 所示.

表 1.1

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…
x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0,x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1,x_2,x_3]$		…
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	
x_3	$f(x_3)$		$f[x_2,x_3,x_4]$		
		$f[x_3,x_4]$		…	
x_4	$f(x_4)$		…		
		…			
…	…				

1.4.2 差商的性质

性质 1 常数的各阶差商为零.

性质 1 由差商的定义立即可得.

性质 2 函数 $f(x)$的 k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$是由函数值 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$的线性组合而成的,即有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_j-x_i)}. \tag{1.4.4}$$

证明 应用数学归纳法来证明.

当 $k=1$ 时,由差商的定义,有

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0},$$

因此对于 $k=1$ 时,(1.4.4) 成立.

设 $k=m-1$ 时,(1.4.4) 成立,即有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}]=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_{m-1})},$$

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_m]=\sum_{j=1}^{m}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}.$$

下面我们证明 $k=m$ 时(1.4.4) 也成立,由 m 阶差商的定义及上面两式,有

$$\begin{aligned}
f[x_0,x_1,\cdots,x_m]&=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{m-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_m]}{x_0-x_m}\\
&=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{m-1})(x_0-x_m)}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_m)}\cdot\frac{(x_j-x_m)-(x_j-x_0)}{(x_0-x_m)}\\
&\quad+\frac{f(x_m)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})}
\end{aligned}$$