张 量 讲 义

数学教研室　胡秀吉

北 京 化 工 学 院

1982年3月

张 量 讲 义

§1 和式的简洁记号

为了介绍张量概念，我们先引入一个表达和式的简洁记号

设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n$ 为n维线性空间L的一个基。用带上标的记号：$X^1, X^2, \cdots X^n$ 表示向量$\vec{X} \in L$ 在这一基下的坐标，（对于基$\vec{e}_i$ 和坐标X^i 分别采用下标和上标的原因，将放在后面加以说明）。于是，有：

$$\vec{X}=X^1\vec{e}_1+X^2\vec{e}_2+\cdots+X^n\vec{e}_n=\sum_{i=1}^{n} X^i \vec{e}_i \qquad (1.1)$$

为了简化表示方法，今后，将采用一种简洁的记号，我们约定：如果同一个字母在一项中作为上标和下标各出现一次，那末，这一项就表示对这一指标从1到n的和，同时，不再写出总和记号“Σ”了。引用这种简洁记号（1.1）可改写为：

$$\vec{X}=X^i \vec{e}_i \qquad (1.2)$$

在线性空间L的基演化关系式

$$\begin{cases} \vec{e}_1{}'=\alpha_{11}\vec{e}_1+\alpha_{12}\vec{e}_2+\cdots+\alpha_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{e}_2{}'=\alpha_{21}\vec{e}_1+\alpha_{22}\vec{e}_2+\cdots+\alpha_{2n}\vec{e}_n \\ \cdots\cdots \\ \vec{e}_n{}'=\alpha_{n1}\vec{e}_1+\alpha_{n2}\vec{e}_2+\cdots+\alpha_{nn}\vec{e}_n \end{cases} \qquad (1.3)$$

中采用上，下标记号，以α_i^j 代替α_{ij}，则（1.3）改写成：

$$\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha^j_i \vec{e}_j \qquad (1.4)$$

再采用和式的简洁记号，得

$$\vec{e}'_i = \alpha^j_i \vec{e}_j \qquad i=1, 2, \cdots n \qquad (1.5)$$

由(1.4)得到

$$\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} \beta^i_j \vec{e}'_i \qquad j=1, 2, \cdots n \qquad (1.6)$$

这里

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^j_i \beta^k_j = \delta^k_i \qquad (1.7)$$

其中 $\delta^j_i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ 叫做克罗内克尔记号，并规定

$\delta^j_i = \delta_{ij} = \delta^{ij}$

从而：

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^j_i \beta^i_k = \delta^j_k \qquad (1.8)$$

采用简洁记号，(1.6)可以记成

$$\vec{e}_j = \beta^i_j \vec{e}'_i \qquad (1.9)$$

而(1.7)和(1.8)可写作

$$\alpha^j_i \beta^k_j = \qquad (1.10)$$

和

$$\alpha_i^j \beta_k^i = \delta_k^j \qquad (1.11)$$

设向量$\vec{X}$在线性空间L的旧基$\vec{e}_1, \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n$下的表达式为（1.2），在L的新基$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \cdots \vec{e}_n'$下的表达式为：

$$\vec{X} = X'^k \vec{e}_k' \qquad (1.12)$$

且由旧基演化为新基的关系式为（1.5），于是由（1.9）得

$$\vec{X} = X'^k \vec{e}_k' = X'^k \alpha_k^i \vec{e}_i \qquad (1.12)$$

因为在基$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots \vec{e}_n$下，$\vec{X}$的坐标是唯一的，所以有：

$$X^i = \alpha_k^i X'^k \qquad (1.13)$$

或

$$X'^k = \beta_i^k X^i \qquad (1.14)$$

这个结果，除记号上的差别外，就是过去得到的坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \cdots & & & \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'^1 \\ X'^2 \\ \vdots \\ X'^n \end{pmatrix} \qquad (1.15)$$

和

$$\begin{pmatrix} X'^{1} \\ X'^{2} \\ \vdots \\ X'^{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{1}_{1} & \beta^{1}_{2} & \cdots & \beta^{1}_{n} \\ \beta^{2}_{1} & \beta^{2}_{2} & \cdots & \beta^{2}_{n} \\ \cdots & & & \\ \beta^{n}_{1} & \beta^{n}_{2} & \cdots & \beta^{n}_{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{1} \\ X^{2} \\ \vdots \\ X^{n} \end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

§2 向量

三维欧氏空间中的几何向量是最简单的一类张量，对它的研究，展示了张量研究中的基本矛盾。我们现在就从对向量的特征，以及对于向量的研究方法的进一步探讨开始，以引进张量的概念。

由数值和方向确定，并且满足特定的运算规律的物理量，叫做向量，例如：力、位移、速度、加速度…等等都是向量。

可以用有向线段来表示向量以及向量之间的运算规则。这种方法的优点是直接地反映向量的最本质的特征：大小和方向。但是，它的表达方式是很罗嗦的，不利于复杂运算及理论推理。为了克服这种表达方式上的困难，几何学中引进了笛卡儿坐标系，即：在空间任意选择互相垂直的单位向量组 $\vec{i}_1$，$\vec{i}_2$，$\vec{i}_3$，并组成右手系，建立直角坐标系 $O-X^1X^2X^3$，使 OX^1、OX^2、OX^3 轴的方向依次沿着 $\vec{i}_1$，$\vec{i}_2$，$\vec{i}_3$ 的方向，这个坐标系就称为空间笛卡儿直角坐标系。

于是，空间的任何一个向量 $\vec{X}$，都可以通过 $\vec{i}_1$，$\vec{i}_2$，$\vec{i}_3$ 线性表示：

$$\vec{X}=X^1\vec{i}_1+X^2\vec{i}_2+X^3\vec{i}_3=X^j\vec{i}_j \qquad (2.1)$$

其中 X^j（$j=1,2,3$）称为向量 $\vec{X}$ 在坐标系 $O-X^1X^2X^3$ 下的坐标或分量，（今后我们将更多地称它为分量）。

当我们引进了笛卡儿直角坐标系，向量以及向量的运算关系就都

能以十分简明的形式表达。

例如：设$\vec{a}=a^j\vec{i}_j$　　$\vec{b}=b^j\vec{i}_j$

则：1　相等：$\vec{a}=\vec{b} \rightleftharpoons a^j=b^j$　　(2.2)

2　和：$\vec{a}+\vec{b}=(a^j+b^j)\vec{i}_j$　　(2.3)

3　数乘：$\lambda\vec{a}=\lambda a^j\vec{i}_j$　　(2.4)

4　内积（点积）：

(1) 基向量的内积

$$\vec{i}_\ell\cdot\vec{i}_k=\delta_{\ell k}=\begin{cases}1 & \ell=k\\ 0 & \ell\neq k\end{cases}\qquad(2.5)$$

(2)
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{j=1}^{3}a^j b^j\qquad(2.6)$$

(3)
$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}(a^j)^2}\qquad(2.7)$$

5. 外积（叉积）：

(1) 基向量的外积

$$\vec{i}_\ell\times\vec{i}_k=e_{\ell km}\vec{i}_m\qquad(2.8)$$

其中

$$e_{\ell km}=\begin{cases}1 & \ell,k,m\text{是}1,2,3\text{的轮序置换}\\ -1 & \ell,k,m\text{是}1,2,3\text{的反序置换}\\ 0 & \ell,k,m\text{中有两个相同}\end{cases}\qquad(2.9)$$

称为置换记号，并规定：

$$e_{\ell km}=e^{\ell km} \tag{2.10}$$

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=a^{\ell}\vec{i}_{\ell}\times b^{k}\vec{i}_{k}$

$$=a^{\ell}b^{k}e_{\ell km}\vec{i}_{m}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} \tag{2.11}$$

不难体会，当我们进行了笛卡儿直角坐标系以后，向量$\vec{X}$就可以用三个数X^1，X^2，X^3来表征，并且，向量间的运算关系不仅转化为数的运算关系，而且表达式十分简洁。但是，必须注意到：向量的三个分量X^1，X^2，X^3是由所选择的坐标系唯一确定的。一般说来，坐标系改变了，同一向量的分量也随之改变。而且上面的那些运算关系的简明的表达式也只适用于笛卡儿直角坐标系。

在解析几何中，我们已经看到，选择笛卡儿直角坐标系，对于研究向量，并非永远是方便的。为了研究螺旋线，球等，就曾经引进了柱坐标系和球坐标系等。

现在摆在我们面前的，就是这样一个矛盾：为了研究向量，我们不得不选择坐标系，甚致是很特殊的坐标系。在我们选定的坐标系中表示和研究向量以及向量之间的各种关系。但是，不难理解，向量的本质的特征，例如：它的大小和方向，以及它所应遵循的规律（包括各种运算关系等等），却应该是与坐标系的选取无关的。因

此，为了解决这个矛盾，我们必须研究向量的分量在坐标系变换时的变换规律。张量就是根据分量在坐标系变换时的变化规律定义的量。

§3 张量定义

I、逆变分量

我们首先来看三维空间中的向量分量在坐标系变换下的变化规律。

取不共面（即线性无关）的三向量$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 作为基向量组（$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ 不一定互相正交，也不一定为单位向量），则空间任一向量均可由这一基向量线性表示：

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i \qquad (3.1)$$

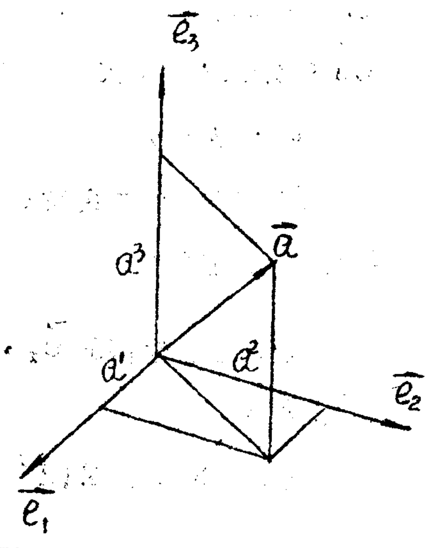

图1

其中a^i 是一个数量，称为向量$\vec{a}$在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的分量。显然，向量$\vec{a}$的分量a^i是依赖于坐标系的选择的。当坐标系变换时，它也随之改变。据线性空间中坐标变换的关系式，由（1.5）和（1.9），我们知道：当有一个非蜕化矩阵$\alpha=(\alpha^i_j)$ 把基$\{\vec{e}_i\}$改变到$\{\vec{e}'_j\}$ 时，即有$\vec{e}'_j=\alpha^i_j\vec{e}_i$，向量$\vec{a}$在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的分量a^i将变换为在$\{\vec{e}'_j\}$ 下的分量a'^j，即由$\vec{a}=a^i\vec{e}_i$ 转变为$\vec{a}=a'^j\vec{e}'_j$，由（1.14）得

$$a'^{j}=\beta^{j}_{k}a^{k} \qquad (3.2)$$

其中

$$\beta^{j}_{k}\alpha^{i}_{j}=\alpha^{j}_{k}\beta^{i}_{j}=\delta^{i}_{k}$$

即 $\beta=(\beta^{j}_{k})$是基演化矩阵α的逆转置矩阵。

这个关系表明，当基改变时，向量在旧基下的分量a^i借演化矩阵α的逆转置矩阵变换着。在这个意义下，我们说：向量的分量与基向量之间是逆变关系。称a^i是向量$\vec{a}$（在基$\{\vec{e}_i\}$下的）逆变分量，也称$\vec{a}$为逆变向量，并记为$\{a^i\}$。显然空间点A的坐标a^i就是向量$\vec{OA}$的分量，因此也是逆变分量。

Ⅱ、协变分量

为了介绍另一类变换关系——协变关系，我们先给出线性函数及其分量的概念。

设给定坐标基底$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$，空间任一点Z的坐标以Z^1、Z^2、Z^3表示。

对于空间的点$Z(Z^1、Z^2、Z^3)$规定唯一确定的数

$$f(Z)=a_1Z^1+a_2Z^2+a_3Z^3=a_iZ^i \qquad (3.3)$$

与之对应，这个从空间点到实数的对应"f"叫做点Z的（齐次）线性函数。显然，在选定的这个坐标基下，线性函数f由数组$\{a_1、a_2、a_3\}$唯一确定。我们把每一个数a_i（i=1，2，3）都称为线性函数f的一个分量。

现在来考察，当旧基底$\{\vec{e}_i\}$通过一非蜕化线性变换$\alpha=(\alpha^{i}_{j})$变

为新基底$\{\vec{e}'_j\}$时，线性函数f的分量a_i将如何变化。

由于点Z的坐标Z^i是逆变分量，所以，当基由$\{\vec{e}_i\}$变为$\{\vec{e}'_j\}$时，$\{Z^i\}$变为$\{Z'^j\}$，它们之间满足关系式

$$Z'^j=\beta^j_i Z^i \tag{3.4}$$

或

$$Z^i=\alpha^i_j Z'^j \tag{3.5}$$

因此，f(Z)将变为

$$f(Z)=a_i Z^i=a_i\alpha^i_j Z'^j$$

由此可以看出，在基底$\{\vec{e}'_j\}$下，函数f的表达式仍是点Z的坐标Z'^j（点Z在$\{\vec{e}'_j\}$下的坐标）的（齐次）线性函数。这时，只要取系数

$$a'_j=a_i\alpha^i_j \tag{3.6}$$

就有

$$f(Z)=a'_j Z'^j \tag{3.7}$$

公式（3.6）说明，当从旧基演化为新基时，线性函数f的分量a_i所经受的变换具有与基变换相同的矩阵。因此，我们说：线性函数的分量与基之间是协变关系。称a_i为线性函数f（在基$\{\vec{e}_i\}$下）的协变分量。也称线性函数f为协变向量，并记为$\{a_i\}$。

Ⅲ、张量的一般定义

从Ⅰ和Ⅱ可以看出，我们所研究的量，例如：向量和线性函数等，它们在由基底$\{\vec{e}_i\}$所构成的坐标系中，由一组数，即一个数

组来表示。我们把这个数组中的每一个数都称为这个量在基$\{\vec{e}_i\}$下的一个分量。当坐标基底由一个变换为另一个的时候，分量的数值随着改变，而有的量，例如向量，它的分量的变换矩阵是基演化矩阵的逆转置矩阵。而有的量的分量，例如线性函数的系数，它的变换矩阵恰好和基演化矩阵相同。张量就是通过这个量在给定坐标基底下的分量的变换特点来定义的量。

下面我们就给出张量的一般定义：

一个量T，在每个以基底为$\{\vec{e}_i\}$的坐标系下，由相应的数组$\{T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}\}$所确定，其中每一个数量$T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}$称为量T在基$\{\vec{e}_i\}$下的一个分量。设$\{\vec{e}_i\}$和$\{\vec{e}'_j\}$是两个基，T在这两个基下的分量分别为$T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}$和$T'^{\cdots k\cdots}_{i\cdots}$。而

$$\vec{e}'_j=\alpha_j^i\,\vec{e}_i \qquad \vec{e}_i=\beta_i^j\,\vec{e}'_j$$

从而

$$\alpha_j^k\beta_k^i=\beta_j^k\alpha_k^i=\delta_j^i$$

如果 $T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}$和$T'^{\cdots s\cdots}_{t\cdots}$恒满足关系式

$$T'^{\cdots s\cdots}_{t}=\beta_{k}^{s}\cdots\alpha_{t}^{i}\cdots T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots} \qquad (3.8)$$

则说这个量T是一个张量，并记为$\{T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}\}$。(3.8)式中矩阵的个数决定张量的阶数。如果(3.8)式中有n个(β_i^j)矩阵，称为n阶逆变，有m个(α_j^i)矩阵，就称为m阶协变，这时，T的分量

$T^{\cdots k\cdots}_{i\cdots}$ 就称为T 在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的n阶逆变，m阶协变分量，而张量$T=\{T^{\cdots k\cdots}_{i\cdots}\}$称为n阶逆变，m阶协变的n + m阶张量。分量的上指标称为逆变指标，几阶逆变就有几个上指标，下指标称为协变指标，几阶协变就有几个下指标。在本课程中以讨论三维空间中的张量为主，即：在和式中，一般求和指标由1至3。因此，n阶张量有3^n个分量。

向量和线性函数是最简单的张量，在三维空间中，它们各有三个分量，在取定基$\{\vec{e}_i\}$时，它们的分量的变换式中分别含有一个(β^j_i)矩阵和一个(α^i_j)矩阵。因此，向量$\vec{a}$的分量称为在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的一阶逆变分量，向量$\vec{a}$称为一阶逆变张量（或称逆变向量）。线性函数f 的分量称为在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的一阶协变分量，而线性函数f就称为一阶协变张量（或称协变向量）。

特别地，纯量（或称标量），即不随坐标系变化的数量，例如：物体的质量，物体在一点处的温度等叫做0阶张量。

Ⅳ、张量举例：

1. 数量函数$\varphi(X^1, X^2, X^3)$的三个偏导数所作成的数组$\{\nabla_i\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\}$是一个一阶协变张量。

设$\varphi(X^1, X^2, X^3)$是点M(X^1, X^2, X^3)的一个数量函数，$\alpha=(\alpha^i_j)$为由基$\{\vec{e}_i\}$改变到$\{\vec{e}'_j\}$的演化矩阵。

由前所述，M的坐标X^i是基$\{\vec{e}_i\}$ 下的逆变分量，即

$$X'^j=\beta^j_i X^i$$

于是有：

$$X^i = \alpha^i_j X'^j$$

$$\therefore \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \alpha^i_j \tag{3.9}$$

$$又 \because \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x'^j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \alpha^i_j \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \tag{3.10}$$

$\therefore \quad \nabla_i \varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ 是在基$\{\vec{e}_i\}$下的一阶协变分量。

2. 线性变换T在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的矩阵$C = (C^j_i)$ 是一个二阶混合张量（一阶逆变，一阶协变的二阶张量称为二阶混合张量）。

由线性变换在不同基下的矩阵的关系式，可知，当由基$\{\vec{e}_i\}$改变到基$\{\vec{e}'_j\}$ 的演化矩阵是$\alpha = (\alpha^i_j)$时，T在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的矩阵是$C = (C^j_i)$，则T在基$\{\vec{e}'_j\}$ 下的矩阵$\bar{C} = \alpha^{-1} C \alpha$，令$\bar{C} = (C'^s_k)$

于是有：

$$C'^s_k = \beta^s_j C^j_i \alpha^i_k = \beta^s_j \alpha^i_k C^j_i \tag{3.11}$$

$\therefore \quad C^j_i$ 是在基$\{\vec{e}_i\}$ 下的一阶逆变，一阶协变的二阶混合张量的分量。

3. 度量张量

我们来考察空间两点M(X^1, X^2, X^3)和M'$(X^1+\Delta X^1, X^2+\Delta X^2,$

$X^3+\Delta X^3$）之间的位移向量$\Delta\vec{r}$，有：

$$\Delta\vec{r}=\Delta X^i\vec{e}_i$$

此向量的模$|\Delta\vec{r}|$决定点M和M'之间的矩离ΔS，得到：

$$\Delta S^2=|\Delta\vec{r}|^2=\Delta X^i\cdot\Delta X^k\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k \quad (>0)$$

令 $g_{ik}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k$

则有

$$\Delta S^2=g_{ik}\Delta X^i\cdot\Delta X^k \qquad (3.12)$$

是一个关于$\{\Delta X^i\}$的二次型。下面我们来证明这个二次型的系数g_{ij}是张量$\{g_{ij}\}$在基$\{\vec{e}_i\}$下的二阶协变分量。

设由基$\{\vec{e}_i\}$改变到基$\{\vec{e}_j\}$的演化矩阵为$\alpha=(\alpha^i_j)$

$\because$ $$g_{ik}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k$$

$\therefore$ $$g'_{j\ell}=\vec{e}'_j\cdot\vec{e}'_\ell=\alpha^i_j\vec{e}_i\cdot\alpha^k_\ell\vec{e}_k$$

$$=\alpha^i_j\alpha^k_\ell\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k=\alpha^i_j\alpha^k_\ell g_{ik} \qquad (3.13)$$

$\therefore$ g_{ik} 是在基$\{\vec{e}_i\}$下的二阶协变分量。

由于二次型$g_{ik}\Delta X^i\Delta X^k$确定了空间任两点之间的距离，所以，系数$\{g_{ik}\}$称为度量张量。

$g_{ij}=\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j$是由坐标基唯一确定的，例如对笛卡儿直角坐标系$\{\vec{i}_j\}$，度量张量分量

$$g_{ij}=\vec{i}_i \cdot \vec{i}_j=\delta_{ij} \qquad (3.14)$$

由向量内积的性质，容易得到度量张量诸分量具有性质

$$g_{ik}=g_{ki} \qquad (3.15)$$

具有这样性质的张量称为对称张量。

一般地有定义：若二阶张量$\{T_{ik}\}$的分量满足条件

$$T_{ik}=T_{ki} \qquad (3.16)$$

则称二阶张量$\{T_{ik}\}$为二阶对称协变张量。

类似地可定义二阶对称逆变张量。

必须注意：当坐标变换时，对称性质并不改变，即对称性是关于坐标变换不变的性质。事实上

$$T'_{ik}=\alpha_i^j\alpha_k^\ell T_{j\ell}=\alpha_k^\ell\alpha_i^j T_{\ell j}=T'_{ki} \qquad (3.17)$$

在三维空间中，二阶对称张量实际上只有六个独立的分量。

§4 张量的代数运算

I、张量相等

若两张量，在任一基底下（从而在一切基底下）对应分量相等，则称两张量相等。

II、张量的和（或差）

只能对相同的阶数的同类张量求和（或差）

要将几个张量相加，只须相加其具有相同指标数的对应分量。

容易看出，两个同类张量在某一指定基下的对应分量，如$R_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}$与$S_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}$相加（或相减）而成的数

$$T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}=R_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}+S_{i\cdots}^{\cdots k\cdots} \qquad (4.1)$$

$$\left(\text{或}\quad T_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}=R_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}-S_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}\right)$$

是一个与$\{R_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}\}$和$\{S_{i\cdots}^{\cdots k\cdots}\}$有相同阶数的同类（指协变、逆变阶数和指标位置都一样）张量在同一基下的相应分量，这后一个张量叫做前两个张量的和（或差）。

例如：两个逆变向量的和就是两个一阶逆变张量的和的例子。

当向量$\vec{a}$和$\vec{b}$在基$\{\vec{e}_i\}$下的第i个分量分别是a^i和b^i，则

$$a^i+b^i=C^i$$

就是和向量$\vec{C}=\vec{a}+\vec{b}$在基$\{\vec{e}_i\}$下的第i个分量。

又如：线性函数的和就是两个一阶协变张量的和的例子，因为它们在同一基底下的分量满足关系式

$$C_i=a_i+b_i$$

必须注意：(1)不同阶或不同类的张量不能相加。

(2)在某一坐标系中，一个等于诸张量之和的张量，在其它任一坐标系中仍等于这些张量之和，就此而言，张量的加法关于坐标变换是不变的。

在前一节，介绍度量张量时，我们介绍了关于对称张量的概念，现在我们再介绍反对称张量的概念。

定义：一个二阶张量，如果调换它的分量的两个指标所得到的新分

量与原分量成相反数，如：$T_{ij}=-T_{ji}$，则称这个张量（$\{T_{ij}\}$）为反对称张量。

张量的反对称性和对称性一样，也是关于坐标变换不变的性质。

下面作为应用加法的例子，介绍二阶张量的一个重要性质。

定理：任何一个二阶张量均可表示为一个二阶对称张量和一个二阶反对称张量的和，且此表示唯一。

证明：我们以二阶协变张量为例，对其它类型的二阶张量可以用完全同样的方法证明。

(1) 设二阶张量A_{ij}，可以表示为一个对称张量和一个反对称张量之和，则此表示法唯一。

即设

$$A_{ij}=B_{ij}+C_{ij}$$

其中

$$B_{ij}=B_{ji} \qquad C_{ij}=-C_{ji}$$

则

$$A_{ij}+A_{ji}=(B_{ij}+C_{ij})+(B_{ji}+C_{ji})=2B_{ij}$$

$$A_{ij}-A_{ji}=(B_{ij}+C_{ij})-(B_{ji}+C_{ji})=2C_{ij}$$

$$\therefore \quad B_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji}) \qquad C_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji})$$

即

B_{ij} 和 C_{ij} 由 A_{ij}唯一确定。

(2)作 $B_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji}) \qquad C_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji})$

$$\therefore \quad A_{ij}=B_{ij}+C_{ij}$$

而且

$$B_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})=\frac{1}{2}(A_{ji}+A_{ij})=B_{ji}$$