国内名校骨干教师

教辅 华东师大版

高考数学
百题大过关

张瑞炳　赵祥枝　编著

上册

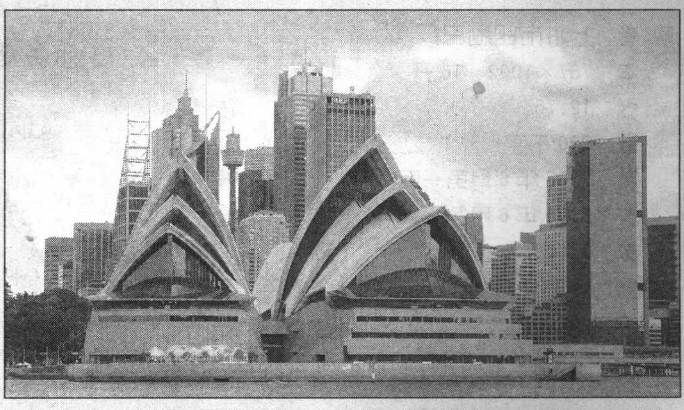
百题帮你过高考大关
百题助你创人生辉煌

华东师范大学出版社

编 著 张瑞炳 赵祥枝

高考数学百题大过关

上册



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学百题大过关. 上册/张瑞炳　赵祥枝编著. —上海:华东师范大学出版社,2005. 3

ISBN 7-5617-4172-3

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 张...　Ⅲ. 数学课-高中-习题-升学参考资料
Ⅳ. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 025832 号

高考数学百题大过关・上册

编　　著　张瑞炳　赵祥枝
策划组稿　李金凤　徐惟简
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　汪小玉　王爱峰
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话 021-62865537
　　　　　门市(邮购)电话:021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区 021-62232873
　　　　　华东　中南地区 021-62458734
　　　　　华北　东北地区 021-62571961
　　　　　西南　西北地区 021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路 3663 号
　　　　　邮编 200062

印 刷 者　上海市印刷三厂
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　12.75
字　　数　290 千字
版　　次　2005 年 6 月第一版
印　　次　2005 年 6 月第一次
印　　数　11000
书　　号　ISBN 7-5617-4172-3 /G・2397
定　　价　15.00 元

出 版 人　朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

丛书前言

目前，市面上有关中高考复习的训练用书不胜其多，但不少书的训练题或失之偏少，或庞杂无度。如果选择几种资料同时用，人们又发现重复者不少，而空白点依然多多。结果既费钱又费时，还未必能完全过关。怎样在有限的时间里让学生得到充分而全面的训练，怎样使这种训练既达到一定的量又保证相当高的质，这成为不少有识之士经常想到的问题。根据不少有经验的初三和高三老师的反映，如果在每一个中高考训练点，精心设计百把道互不重复且有一定梯度的训练题，那么，该训练点的要求就可以到位、可以过关了。为此，我们组织编写了这样一套中高考“百题大过关”。

丛书共21种，《中考百题大过关》9种，《高考百题大过关》12种，涵盖中高考语文、数学、英语、物理、化学五个主要学科。这套丛书，我们力求体现四个特点：

一是丰富性。丛书涉及的内容囊括了中高考所有知识点，所有知识点均由百把道题目组成。其覆盖面之广，内容之丰富，都是许多丛书所没有的。

二是层次性。题目不是杂乱无章地随意排列，而是富有层次性的。每个知识点题目的安排一般分为三个层次：第一层次是精选1990年以来的相关中高考题，第二个层次是难度稍小一点的训练题，第三层次是难度稍大一点的训练题。这样，既能让读者了解近年来的中高考命题特点及其走向，又能得到渐次加深的足够量的训练。

三是指导性。为了方便使用本丛书的老师和同学，对有一定难度的题目，丛书不仅提供准确的答案，还力求作最为详尽的解说，目的在于让读者知其然更知其所以然。同学们有了这套书，就等于请回了一位不走的辅导老师。

四是权威性。丛书的编写者都是国内名校骨干教师，有些还是参加国家教育部“名师工程”的著名特级教师，在省市区享有盛名。凝聚了这样一批既有丰富的实践经验，又有深厚理论修养的优秀教师群体的智慧，是本丛书高质量得以保证的重要原因。

愿这套丛书，能帮助我们的考生闯过中高考大关，也愿我们的考生能以中高考为新起点，创造美好的未来。

华东师范大学出版社

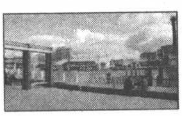
目　　录

引领导航 …………………………………………………… 1

第一章　集合与简易逻辑 …………………………………… 7

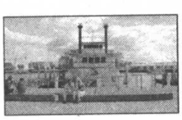
第二章　函数 ………………………………………………… 13

第三章　数列 ………………………………………………… 27

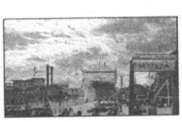


第四章　三角函数 …………………………………………… 37

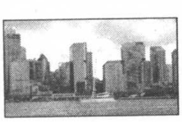
第五章　平面向量 …………………………………………… 47



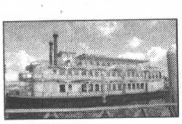
第六章　不等式 ……………………………………………… 53



第七章　直线与圆的方程 …………………………………… 61



第八章　圆锥曲线方程 ……………………………………… 69



第九章　直线、平面、简单几何体 ………………………… 77

第十章　排列、组合和概率 …………………………… 93

第十一章　概率与统计 ………………………………… 103

第十二章　极限与导数 ………………………………… 109

第十三章　复数 ………………………………………… 117

参考答案与提示 ………………………………………… 121

引领导航

随着数学课程改革的深入，作为检测中学生数学素养的选拔性考试——高考在考试形式、命题内容、评价手段等方面也进行了一系列的改革. 在高考数学命题设计的改革实践中，逐步形成以下趋势：(1)着重考查支撑学科知识体系的知识主干. 代数、立体几何、解析几何都是考查了该学科中的重点内容；(2)强化知识体系，从学科整体意义上设计试题；(3)深化能力立意，加强探索能力的考查；(4)加强数学应用，体现数学与传统、现代的文化交融；(5)支持课改，注重开发教材、加大新增内容的考查力度；(6)注重思想方法、理性思维的考查，检测考生后续学习的潜能.

一　选择题

高考中数学选择题具有概括性强、知识覆盖面宽、小巧灵活、有一定的综合性和深度的特点. 考生能否迅速、准确、全面、简捷地解好选择题成为得分的关键. 解选择题的关键在于“找”出正确的选择支，而不拘泥于用何种方法. 因此，充分利用题设和选择支两方面所提供的信息迅速作出判断，是解选择题的基本策略. 解选择题的具体解法很多，有直接法、筛选法、特例法、验证法、分析法、图解法、估算法、极限法等.

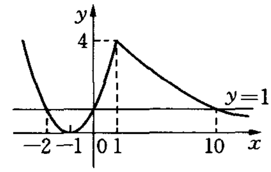
例 1　(2004 年全国卷Ⅲ)

设函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2,\ x<1,\\ 4-\sqrt{x-1},\ x\geqslant 1.\end{cases}$ 则使得 $f(x)\geqslant 1$ 的自变量 x 的取值范围为(　　).

(A) $(-\infty\ -2]\cup[0,\ 10]$　　(B) $(-\infty,\ -2]\cup[0,\ 1]$

(C) $(-\infty,\ -2]\cup[1,\ 10]$　　(D) $[-2,\ 0]\cup[1,\ 10]$

解法 1　如图，$y=f(x)$ 与 $y=1$ 交点横坐标分别为 -2、0、10，则 $f(x)\geqslant 1$ 的 x 的取值范围是 $(-\infty,\ -2]\cup[0,\ 10]$. 故选 A.



解法 2　利用各选择支特点取值验证，取 $x=0$，则 $f(x)=(0+1)^2=1$，符合 $f(x)\geqslant 1$，排除 C，取 $x=10$，则 $f(x)=1$，符合 $f(x)\geqslant 1$，排除 B，取 $x=-1$，则 $f(x)=0$，排除 D.

解法 3　当 $x<1$ 时，$f(x)\geqslant 1\Leftrightarrow(x+1)^2\geqslant 1\Leftrightarrow x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 0$，所以 $x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x<1$. 当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 1\Leftrightarrow 4-\sqrt{x-1}\geqslant 1\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\leqslant 3\Leftrightarrow x\leqslant 10$，所以 $1\leqslant x\leqslant 10$. 综上所述，$x\leqslant -2$ 或 $0\leqslant x\leqslant 10$.

例 2　(2004 年全国卷Ⅳ)

等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_2+a_3=-24$，$a_{18}+a_{19}+a_{20}=78$，则此数列前 20 项和等于(　　).

(A) 160　　(B) 180　　(C) 200　　(D) 220

解 因为 $\begin{cases} a_1+a_2+a_3=-24, \\ a_{18}+a_{19}+a_{20}=78, \end{cases} \Rightarrow (a_1+a_{20})+(a_2+a_{19})+(a_3+a_{18})=54 \Rightarrow 3(a_1+a_{20})=54 \Rightarrow a_1+a_{20}=18$,所以 $S_{20}=\dfrac{a_1+a_{20}}{2}\times 20=\dfrac{18}{2}\times 20=180$. 故选 B.

例 3 过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点,若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p、q. 则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于(　　).

(A) $2a$　　(B) $\dfrac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $\dfrac{4}{a}$

解法 1 (特例法)抛物线 $x^2=\dfrac{1}{a}y$ 的焦点为 $F\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$,特别取平行于 x 轴的弦 PQ 所在直线 $y=\dfrac{1}{4a}$,与 $y=ax^2$ 联立解出 $x=\pm\dfrac{1}{2a}$,有 $p=q=\dfrac{1}{2a}$,此时 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=4a$. 故选 C.

解法 2 过焦点 $F\left(0,\ \dfrac{1}{4a}\right)$ 的直线 $y=kx+\dfrac{1}{4a}$ 与抛物线 $y=ax^2$ 联立消去 y,得 $ax^2-kx-\dfrac{1}{4a}=0$. 设点 P、Q 的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$,$(x_2,\ y_2)$,则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{k}{a}, \\ x_1x_2=-\dfrac{1}{4a^2}. \end{cases}$ 所以 $p+q=|PQ|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{1+k^2}{a}$, $p\cdot q=|PF|\cdot|FQ|=(1+k^2)\,|x_1x_2|=\dfrac{1}{4a^2}(1+k^2)$,从而 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{p+q}{p\cdot q}=4a$.

解法 3 (极限法)当直线 PQ 的倾斜角无限趋近于 $90°$ 时,p 与 q 有一个趋向于正无穷大,另一个趋近于 $|OF|=\dfrac{1}{4a}$. 所以 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\to 4a$.

例 4 在正 n 棱锥中,相邻两侧面所成的二面角的取值范围是(　　).

(A) $\left(\dfrac{n-2}{2}\pi,\ \pi\right)$　　(B) $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$

(C) $\left(\dfrac{n-1}{n}\pi,\ \pi\right)$　　(D) $\left(\dfrac{n-2}{n}\pi,\ \dfrac{n-1}{n}\pi\right)$

解 (极限法)当正 n 棱锥的顶点无限趋近底面正多边形中心时,则底面正多边形便为极限状态,此时棱锥相邻两侧面所成二面角 $\alpha\to\pi$,且小于 π;当锥高无穷大且底面相对固定不变时,或底面无穷小而锥高相对固定不变时,则正 n 棱锥便又是另一极限状态,此时 $\alpha\to\dfrac{n-2}{n}\pi$,且大于 $\dfrac{n-2}{n}\pi$. 故选 A.

二　填空题

填空题中大部分题为计算题,只要求直接填写结果,它不需要表述解题的推理、计算过程,因而填空题的结果必须是数值准确、形式规范、表达式(数)最简. 近年来,高考数学填空题也出现了一些创新题型:如阅读理解型、发散开放型、多项选择型、实际应用型等. 解填空题的常用方法有直接解法、图解法和特殊化法.

例 5 设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正数数列,且 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0\ (n=1、2、$

3、…)，则它的通项公式是 $a_n=$ ________.

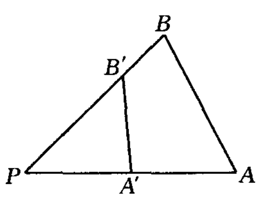
解法 1 令 $n=1$，得 $2a_2^2+a_2-1=0$，解出正数 $a_2=\frac{1}{2}$；令 $n=2$，得 $3a_3^2-2a_2^2+a_3a_2=0$，即 $6a_3^2+a_3-1=0$，解出正数 $a_3=\frac{1}{3}$；同理 $a_4=\frac{1}{4}$. 由此猜想 $a_n=\frac{1}{n}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$. 应填$\frac{1}{n}$.

解法 2 将条件式分解变形为 $[(n+1)a_{n+1}-na_n](a_{n+1}+a_n)=0$，注意到 $a_{n+1}+a_n>0$，得 $(n+1)a_{n+1}=na_n$. 这说明数列 $\{na_n\}$ 是常数列，从而有 $na_n=(n-1)a_{n-1}=(n-2)a_{n-2}=\cdots=a_1=1$，即有 $a_n=\frac{1}{n}$.

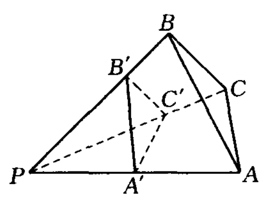
解法 3 将条件式两边同除以 a_n^2，得 $(n+1)\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2+\frac{a_{n+1}}{a_n}-n=0$. 由求根公式得正根 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{1+4n(n+1)}-1}{2(n+1)}=\frac{n}{n+1}$. 所以 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$.

例 6 （2004 年广东卷）

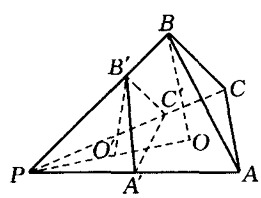
由图(1)有面积关系：$\frac{S_{\triangle PA'B'}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{PA'\cdot PB'}{PA\cdot PB}$，则由(2)有体积关系：$\frac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}}=$ ________.



图(1)



图(2)



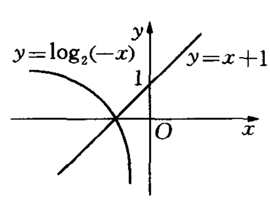
图(3)

解 如图(3)，过 B' 作面 PAC 的垂线 $B'O'$，垂足为 O'，过 B 作面 PAC 的垂线 BO，垂足为 O. 所以 $\angle BPO=\angle B'PO'$. 于是 $\frac{V_{P-A'B'C'}}{V_{P-ABC}}=\frac{V_{B'-PA'C'}}{V_{B-PAC}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PA'C'}\cdot B'O'}{\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAC}\cdot BO}=\frac{PA'\cdot PC'\cdot PB'\cdot\sin B'PO'}{PA\cdot PC\cdot PB\cdot\sin BPO}=\frac{PA'\cdot PB'\cdot PC'}{PA\cdot PB\cdot PC}$.

例 7 （2003 年全国卷）

使 $\log_2(-x)<x+1$ 成立的 x 的取值范围是________.

解法 1 由题知 x 的取值范围是 $x<0$，分段讨论：当 $x=-1$ 时，$\log_2(-x)=0$，$x+1=0$ 不符合题意；当 $x<-1$ 时，$-x>1$，$\log_2(-x)>0$，$x+1<0$，不合题意；当 $-1<x<0$ 时，$0<-x<1$，$\log_2(-x)<0$，$x+1>0$ 符合题意. 故得 x 的范围是 $-1<x<0$.



解法 2 作出函数 $y=\log_2(-x)$ 及 $y=x+1$ 的图象. 其中 $y=\log_2(-x)$ 与 $y=\log_2 x$ 的图象关于 y 轴对称，观察图象

知，$-1<x<0$.

三　解答题

在近几年的高考中，解答题考查的内容主要涉及函数、数列、不等式、平面向量、三角、立体几何、解析几何、概率与统计、导数等. 常见的有计算题、证明题、探索题、应用题等题型. 解答题的难度一般是按题号由小到大逐步提高，例如，前面的题可以是中等，中间的题可以是中高等，最后的题可以是高等. 完成解答题，要把握好以下各个环节：(1)审题；(2)寻求合理的解题思路和方法；(3)设计有效的解题过程和步骤；(4)力求表述得当.

例 8　(2004 年全国卷Ⅰ)

求函数 $f(x)=\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x}{2-\sin 2x}$ 的最小正周期、最大值和最小值.

解　$f(x)=\dfrac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x}{2-2\sin x\cos x}=\dfrac{1-\sin^2 x\cos^2 x}{2(1-\sin x\cos x)}=\dfrac{1}{2}(1+\sin x\cos x)=\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{2}$. 所以函数的最小正周期是 π，最大值是 $\dfrac{3}{4}$，最小值是 $\dfrac{1}{4}$.

例 9　(2004 年福建卷)

甲、乙两人参加一次英语口语考试，已知在备选的 10 道试题中，甲能答对其中的 6 题，乙能答对其中的 8 题，规定每次考试都从备选题中随机抽出 3 题进行测试，至少答对 2 题才算合格.

(Ⅰ) 求甲答对试题数 ξ 的概率分布及数学期望；

(Ⅱ) 求甲、乙两人至少有一人考试合格的概率.

解　(Ⅰ) 依题意，甲答对试题数 ξ 的概率分布如下：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

甲答对试题数 ξ 的数学期望 $E\xi=0\times\dfrac{1}{30}+1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{9}{5}$.

(Ⅱ) 设甲、乙两人考试合格的事件分别为 A、B，则 $P(A)=\dfrac{C_6^2C_4^1+C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{60+20}{120}=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=\dfrac{C_8^2C_2^1+C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{56+56}{120}=\dfrac{14}{15}$. 因为事件 A、B 相互独立.

方法一：所以甲、乙两人考试均不合格的概率为 $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\left(1-\dfrac{14}{15}\right)=\dfrac{1}{45}$. 所以甲、乙两人至少有一人考试合格的概率为 $P=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-\dfrac{1}{45}=\dfrac{44}{45}$. 答：甲、乙两个至少有一人考试合格的概率为 $\dfrac{44}{45}$.

方法二：所以甲、乙两人至少有一人考试合格的概率为 $P=P(A\cdot\overline{B})+P(\overline{A}\cdot B)+P(A\cdot B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)+P(A)P(B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{14}{15}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{14}{15}=\dfrac{44}{45}$.

答：甲、乙两人至少有一个人考试合格的概率为 $\dfrac{44}{45}$.

例 10 （2003 年全国卷）

已知 $c>0$. 设

P:函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

Q:不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确,求 c 的取值范围.

解法 1 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$. 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 1.

因为 $x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\geqslant 2c,\\ 2c, & x<2c.\end{cases}$

所以函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.

故不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\dfrac{1}{2}$.

如果 P 正确,且 Q 不正确,则 $0<c\leqslant\dfrac{1}{2}$.

如果 P 不正确,且 Q 正确,则 $c\geqslant 1$.

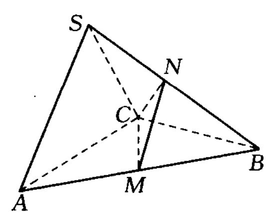
所以 c 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

解法 2 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于 $1\Leftrightarrow y_{\min}>1$.

因为 $x+|x-2c|\geqslant|x-(x-2c)|=2c$,即 $y_{\min}=2c>1$,所以 $c>\dfrac{1}{2}$.（以下同解法 1）

例 11 （2004 年福建卷）

在三棱锥 $S-ABC$ 中,$\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形,平面 $SAC\perp$ 平面 ABC, $SA=SC=2\sqrt{3}$, M、N 分别为 AB、SB 的中点.



（Ⅰ）证明:$AC\perp SB$;

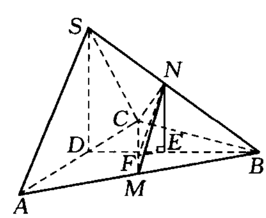
（Ⅱ）求二面角 $N-CM-B$ 的大小;

（Ⅲ）求点 B 到平面 CMN 的距离.

解法 1 （Ⅰ）取 AC 中点 D,连结 SD、DB.

因为 $SA=SC$, $AB=BC$,所以 $AC\perp SD$ 且 $AC\perp BD$,所以 $AC\perp$ 平面 SDB.

又 $SB\subset$ 平面 SDB,所以 $AC\perp SB$.



（Ⅱ）因为 $AC\perp$ 平面 SDB, $AC\subset$ 平面 ABC,所以平面 $SDB\perp$ 平面 ABC,过 N 作 $NE\perp BD$ 于 E,则 $NE\perp$ 平面 ABC;过 E 作 $EF\perp CM$ 于 F,连结 NF,则 $NF\perp CM$. 所以 $\angle NFE$ 为二面角 $N-CM-B$ 的平面角.

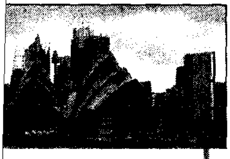
因为平面 $SAC\perp$ 平面 ABC,$SD\perp AC$,所以 $SD\perp$ 平面 ABC. 又因为 $NE\perp$ 平面 ABC,所以 $NE\parallel SD$. 因为 $SN=NB$,所以 $NE=\dfrac{1}{2}SD=\dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2-AD^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{12-4}=\sqrt{2}$,且 $ED=EB$. 在正 $\triangle ABC$ 中,由平面几何知识可求得 $EF=\dfrac{1}{4}MB=\dfrac{1}{2}$,在 $\mathrm{Rt}\triangle NEF$ 中,$\tan\angle NFE=\dfrac{EN}{EF}=2\sqrt{2}$,所以二面角

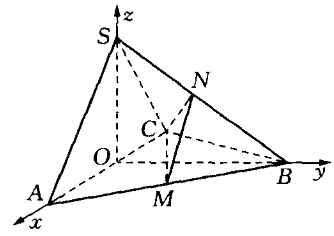
$N-CM-B$ 的大小是 $\arctan 2\sqrt{2}$.

(Ⅲ) 在 $Rt\triangle NEF$ 中, $NF=\sqrt{EF^2+EN^2}=\frac{3}{2}$,所以 $S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}CM\cdot NF=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}BM\cdot CM=2\sqrt{3}$.

设点 B 到平面 CMN 的距离为 h,

因为 $V_{B-CMN}=V_{N-CMB}$, $NE\perp$ 平面 CMB,所以 $\frac{1}{3}S_{\triangle CMN}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle CMB}\cdot NE$,所以 $h=\frac{S_{\triangle CMB}\cdot NE}{S_{\triangle CMN}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.即点 B 到平面 CMN 的距离为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.





解法 2 (Ⅰ) 取 AC 中点 O,连结 OS、OB.

因为 $SA=SC$, $AB=BC$,所以 $AC\perp SO$ 且 $AC\perp BO$.

因为平面 $SAC\perp$ 平面 ABC,平面 $SAC\cap$ 平面 $ABC=AC$,所以 $SO\perp$ 平面 ABC,所以 $SO\perp BO$.

如图建立空间直角坐标系 O-xyz. 则 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2\sqrt{3}, 0)$, $C(-2, 0, 0)$, $S(0, 0, 2\sqrt{2})$, $M(1, \sqrt{3}, 0)$, $N(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$.

则 $\overrightarrow{AC}=(-4, 0, 0)$, $\overrightarrow{SB}=(0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{SB}=(-4, 0, 0)\cdot(0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{2})=0$, 所以 $AC\perp SB$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得 $\overrightarrow{CM}=(3, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{MN}=(-1, 0, \sqrt{2})$,设 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$ 为平面 CMN 的一个法向量,则 $\begin{cases}\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}=3x+\sqrt{3}y=0,\\ \overrightarrow{MN}\cdot\boldsymbol{n}=-x+\sqrt{2}z=0.\end{cases}$ 取 $z=1$,则 $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{6}$,所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 1)$.

又 $\overrightarrow{OS}=(0, 0, 2\sqrt{2})$ 为平面 ABC 的一个法向量,所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}, \overrightarrow{OS}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OS}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{OS}|}=\frac{1}{3}$.

所以二面角 $N-CM-B$ 的大小为 $\arccos\frac{1}{3}$.

(Ⅲ) 由(Ⅰ)(Ⅱ)得 $\overrightarrow{MB}=(-1, \sqrt{3}, 0)$, $\boldsymbol{n}=(\sqrt{2}, -\sqrt{6}, 1)$ 为平面 CMN 的一个法向量,所以点 B 到平面 CMN 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

集合与简易逻辑是高中数学的基础内容之一，在高考中“集合”与“充分必要条件”这两部分内容每年都有题目，有关集合的高考试题，考查重点是集合与集合之间的关系，近年试题加强了对集合的计算化简的考查，并向无限集发展，考查抽象思维能力，在解决这些问题时，要注意利用几何的直观性，注意运用文氏图解题方法的训练，注意利用特殊值法解题，加强集合表示方法的转换和化简的训练．有关“充要条件”、“命题真伪”的试题，主要是对数学概念有准确的记忆和深层次的理解．

第一章 集合与简易逻辑

一、选择题

1 如果 $S=\{x\mid x=2n+1,\ n\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{x\mid x=4k\pm1,\ k\in\mathbf{Z}\}$，那么(　　).

(A) $S\subsetneqq T$　　(B) $T\subsetneqq S$　　(C) $S=T$　　(D) $S\neq T$

2 (2003 年北京春卷)

若集合 $M=\{y\mid y=2^{-x}\}$，$P=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则 $M\cap P$ 等于(　　).

(A) $\{y\mid y>1\}$　　(B) $\{y\mid y\geqslant1\}$　　(C) $\{y\mid y>0\}$　　(D) $\{y\mid y\geqslant0\}$

3 (2004 年全国卷Ⅱ)

已知集合 $M=\{x\mid x^2<4\}$，$N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$，则集合 $M\cap N=$(　　).

(A) $\{x\mid x<-2\}$　　(B) $\{x\mid x>3\}$

(C) $\{x\mid -1<x<2\}$　　(D) $\{x\mid 2<x<3\}$

4 满足 $\{0\}\subseteq A\subsetneqq\{0,1,2,3\}$ 的集合 A 的个数是(　　).

(A) 5　　(B) 6　　(C) 7　　(D) 8

5 已知全集 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<9\}$，集合 $A=\{(x,y)\mid |x|\leqslant2,\ |y|\leqslant1\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant5\}$，则下列式子表示空集的是(　　).

(A) $A\cap B$　　(B) $B\cap\complement_S A$

(C) $A\cap\complement_S B$　　(D) $\complement_S A\cap\complement_S B$

6 如图 1-1 所示，I 是全集，M、P、S 是 I 的 3 个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　).

(A) $(M\cap P)\cap S$

(B) $(M\cap P)\cup S$

(C) $(M\cap P)\cap\complement_I S$

(D) $(M\cap P)\cup\complement_I S$

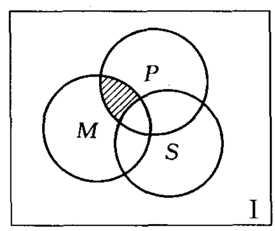


图 1-1

7 集合 A 和 B 各含 6 个元素，$A\cap B$ 含 3 个元素，C 同时满足三个条件：①$C\subsetneqq A\cup B$；②C 中含有 3 个元素；③$C\cap A\neq\varnothing$，则这样的集合 C 的个数是(　　).

(A) 82　　(B) 83　　(C) 84　　(D) 219

8 设 $P\cup Q=\{a,b\}$，求 P、Q，此题解答共有(　　).

(A) 9 组　　(B) 8 组　　(C) 7 组　　(D) 5 组

9 已知 50 名学生参加跳远和铅球两项测验，跳远和铅球及格的分别有 40 人和 31 人，二项测验均不及格的有 4 人，那么二项测验都及格的人数是(　　).

(A) 35　　(B) 25　　(C) 28　　(D) 15

10 设两个集合 $S=\{x\mid x=12m+8n,\ m、n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=20p+16q,\ p、q\in\mathbf{Z}\}$，则下列关系正确的是(　　).

(A) $S\subsetneqq P$　　(B) $S\supsetneqq P$

(C) $S=P$　　(D) S 与 P 关系无法确定

11 (2004 年北京卷)

函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in P,\\ -x, & x\in M,\end{cases}$ 其中 P、M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集，又规定 $F(P)$

$=\{y \mid y=f(x),\ x\in P\}$, $F(M)=\{y \mid y=f(x),\ x\in M\}$. 给出下列四个判断：①若 $P\cap M=\varnothing$,则 $F(P)\cap F(M)=\varnothing$, ②若 $P\cap M\neq\varnothing$,则 $F(P)\cap F(M)\neq\varnothing$, ③若 $P\cup M=\mathbf{R}$,则 $F(P)\cup F(M)=\mathbf{R}$, ④若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$,则 $F(P)\cup F(M)\neq\mathbf{R}$. 其中正确判断有(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 0 个

12 (2004 年北京卷)

函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间$[1, 2]$上存在反函数的充分必要条件是(　　).

(A) $a\in(-\infty, 1]$　　(B) $a\in[2, +\infty)$

(C) $a\in[1, 2]$　　(D) $a\in(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$

13 有下列四个命题：

(1) “若 $xy=1$, 则 x, y 互为倒数”的逆命题；

(2) “面积相等的三角形全等”的否命题；

(3) “若 $m\leqslant 1$,则 $x^2-2x+m=0$ 有实根”的逆否命题；

(4) “若 $A\cap B=B$,则 $A\subseteq B$” 的逆否命题. 其中真命题是(　　).

(A) (1)(2)　　(B) (2)(3)　　(C) (1)(2)(3)　　(D) (3)(4)

14 (2004 年福建卷)

命题 P:若 a、$b\in\mathbf{R}$,则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件. 命题 Q: 函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是$(-\infty, -1]\cup[3, +\infty)$. 则(　　).

(A) “P 或 Q”为假　　(B) “P 且 Q”为真

(C) P 真 Q 假　　(D) P 假 Q 真

二、填空题

1 已知 $M=\{-1, 0, 1\}$, $N=\{y \mid y=\cos x,\ x\in M\}$,则 $M\cap N=$ ________.

2 (2003 年上海卷)

设集合 $A=\{x \mid |x|<4\}$, $B=\{x \mid x^2-4x+3>0\}$,则集合$\{x \mid x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$ ________.

3 设集合 $A=\{x \mid 2\lg x=\lg(8x-15),\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, \cos\dfrac{x}{2}>0,\ x\in\mathbf{R}\right\}$, 则 $A\cap B$ 的元素有 ________ 个.

4 已知集合 $A=\{(x, y) \mid x+y-2=0\}$, $B=\{(x, y) \mid x-2y+4=0\}$, $A\cap B\subsetneqq\{(x, y) \mid y=3x+b\}$,则 $b=$ ________.

5 已知集合 $A=\{x, xy, \lg xy\}$,集合 $=\{0, |x|, y\}$,且 $A=B$,则 $x=$ ________, $y=$ ________.

6 设 I 是全集,非空集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq I$. 若含 P、Q 的一个集合运算表达式,使运算结果为空集$\varnothing$,则这个运算表达式可以是________(只要写出一个表达式).

7 已知 α、β 是实数,下列四个论断：① $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$; ② $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha+\beta|$; ③ $|\alpha|>2\sqrt{2}$, $|\beta|>2\sqrt{2}$; ④ $|\alpha+\beta|>5$. 以其中的两个论断为条件,其余两个论断作为结论,写出你认为正确的一个命题：________.

8 有以下 5 个命题：①没有男生爱踢足球；②所有男生都不爱踢足球；③至少有一

个男生不爱踢足球；④所有女生都爱踢足球；⑤所有男生都爱踢足球. 请找出其中互为否命题的一对命题：________.

三、解答题

① (2004 年上海卷)

记函数 $f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]\ (a<1)$ 的定义域为 B.

(Ⅰ) 求 A；

(Ⅱ) 若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

② 设 P：关于 x 的不等式 $a^x>1$ 的解集是 $\{x \mid x<0\}$. Q：函数 $y=\lg(ax^2-x+a)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 a 的取值范围.

③ (2004 年辽宁卷)

设全集 $U=\mathbf{R}$.

(Ⅰ) 解关于 x 的不等式 $|x-1|+a-1>0\ (a\in\mathbf{R})$；

(Ⅱ) A 为(Ⅰ)中不等式的解集，集合 $B=\left\{x \mid \sin\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right)=0\right\}$. 若 $B\cap \complement_U A$ 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围.

④ 已知 A 是由实数组成的数集. 满足 $a\in A$，则 $\frac{1}{1-a}\in A$；且 $1\notin A$.

(1) 若 $2\in A$，则 A 中至少含有哪些元素？

(2) A 能否为单元素集合？若能，求出集合 A；若不能，说明理由.

(3) 若 $a\in A$，则 $1-\frac{1}{a}$ 是 A 中的元素吗？说明理由.