大学数学名师导学丛书

高等数学
名师导学

（上）

《大学数学名师导学丛书》编写组 编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

高等数学

名师导学

上册

《大学数学名师导学丛书》编写组 编

本册编写 牛庆银

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学理工科的《高等数学》的教学大纲为依据，结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测。

本丛书具有三“导”合一的特点：集中知识要点“导”学，典型例题与习题“导”讲，知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《高等数学》的大学理工科学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学名师导学.上/《大学数学名师导学丛书》编写组 编.—北京：中国水利水电出版社，2005
(大学数学名师导学丛书)
ISBN 7-5084-2559-6

Ⅰ.高… Ⅱ.大… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 127700 号

书　　名	大学数学名师导学丛书 **高等数学名师导学(上)**
作　　者	《大学数学名师导学丛书》编写组　编　本册编写　牛庆银
出版发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路 6 号　100044) 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010)63202266(总机)、68331835(营销中心)
经　　销	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	雪光科技发展有限公司
印　　刷	北京市优美印刷有限责任公司
规　　格	787mm×1092mm　16 开本　14.25 印张　255 千字
版　　次	2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷
印　　数	0001—6000 册
定　　价	19.00 元

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编： 牛庆银

副 主 编： 董玉才

编写人员： 牛庆银　董玉才　杨万利

郑素文　刘文学　陈建华

前　言

大学数学是高等院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，供学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1）**集中知识要点“导”学**。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2）**典型例题与习题“导”讲**。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试。

3）**知识点学习和自测紧密“导”练**。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004年6月

目录

第一章 函数与极限

一、知识要点

集合、映射的概念　函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　反函数、复合函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质和图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

二、知识要点分析

1. 函数

(1)集合　所谓**集合是指具有某种特定性质的事物的总体**.组成这个集合的事物称为该集合的元素.通常用大写拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合,小写拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 表示集合的元素.集合可分为有限集、无限集.集合的表示法通常有列举法和描述法.

(2)映射　设 X、Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**,记作

$$f:X\to Y;$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的**像**,记作 $f(x)$,即

$$y=f(x)$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个**原像**;集合 X 称为映射 f 的**定义域**,

记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

如果 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的**满射**；如果对 X 中任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的**单射**；如果映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为**一一映射**或**双射**.

(3)函数的概念　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**. 简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$. y 称为函数 f 在 x 处的**函数值**，$y=f(x)$. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为**函数 f 的值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值仅有(不只)一个，则这种函数叫做**单(多)值函数**.

(4)函数的几种特性

1)函数的有界性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**，即如果对任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使得 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

2)函数的单调性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的，单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

3)函数的奇偶性. 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**偶函数**.如果对于任一 $x\in D$,

$$f(-x)=-f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

4)函数的周期性.设函数 $f(x)$的定义域为 D,如果存在一个正数 l,使得对于任一 $x\in D$ 有$(x\pm l)\in D$,且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,l 称为$f(x)$的**周期**,通常周期函数的周期是指最小正周期,但并非每个周期函数都有最小正周期,如 Dirichlet 函数.

(5)初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成,并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

2. 极限

(1)数列的极限.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists$ 正整数 N,只要 $n>N$,就有$|x_n-a|<\varepsilon$.

(2)函数的极限.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,只要$|x|>X$,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要 $0<|x-x_0|<\delta$,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

左极限

$f(x_0^-)\xlongequal{\triangle}\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要 $0<x_0-x<\delta$,就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

右极限

$f(x_0^+)\xlongequal{\triangle}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,只要 $0<x-x_0<\delta$,就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

(3)无穷小与无穷大.

1)$f(x)$为某过程($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$等)中的无穷小$\Leftrightarrow\lim f(x)=0$.

2)$f(x)$为某过程中的无穷大$\Leftrightarrow\lim f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$,

如$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\forall M>0;\exists\delta>0$,使当 $0<|x-x_0|<\delta$,就有

$$f(x)<-M.$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X>0$,使当$|x|>M$时,即有

$$|f(x)|>M.$$

在同一过程中,除零外的无穷小与无穷大互倒.

3)无穷小的比较.

设 $\lim\alpha=0, \lim\beta=0$.

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α **高阶的无穷小**,记作 $\beta=0(\alpha)$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α **低阶的无穷小**;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,则称 β 与 α 是**同阶无穷小**;特别地,当 $c=1$ 时,称 β 与 α 是**等价无穷小**,记作 $\alpha\sim\beta$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$,则称 β 是关于 α 的 **k 阶无穷小**.

4)常用的等价无穷小.

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$;$\tan x\sim x$;$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$;

$$\ln(1+x)\sim x;\mathrm{e}^x-1\sim x;\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

(4)极限的性质.

1)唯一性.若变量极限存在,则极限唯一.

2)有界性.极限存在的变量必有界.

3)保号性.

收敛数列的保号性.若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且 $a>0$(或 $a<0$),则$\exists N>0$,当 $n>N$ 时都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).若数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则有 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).函数极限的局部保号性.若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).若在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

4)充分必要条件.

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=A;$$

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\lim\alpha=0.$$

5)运算法则.

有限个存在极限的变量之和(积)的极限等于各自极限之和(积):两个极限的变量之差(商)的极限等于各自极限之差(商,分母的极限为零时除外).

注意 求两个无穷小之比的极限时,分子及分母都可用等价无穷小来代替,

有时可以简化计算.

6)两个准则.

单调有界的变量必有极限的准则和夹逼准则.

7)两个重要极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}.$$

3. 连续

(1) $f(x)$在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\\ \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{使当}|x-x_0|<\delta,\text{则有}\\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.\end{cases}$

$f(x)$在 x_0 处左连续$\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0)$,

$f(x)$在 x_0 处右连续$\Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0)$,

* $f(x)$在区间 I 上一致连续$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,对于$\forall x_1,x_2\in I$,使当$|x_1-x_2|<\delta$,则有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

(2) $f(x)$在点 x_0 处不连续$\Leftrightarrow$设 $f(x)$在 x_0 的某去心邻域内有意义,若函数$f(x)$有下列三种情形之一:

(a)在 $x=x_0$ 没有定义;

(b)虽在 $x=x_0$ 有定义,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

(c)虽在 $x=x_0$ 有定义,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$. 此时,点 x_0 称为函数 $f(x)$的**不连续点**或**间断点**;

若 x_0 为 $f(x)$的间断点:

1) x_0 为第一类间断点$\Leftrightarrow f(x_0^-)$与 $f(x_0^+)$均存在:

当 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$时,x_0 为**可去间断点**;

当 $f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$时,x_0 为**跳跃间断点**.

2) x_0 为第二类间断点$\Leftrightarrow f(x_0^-)$与 $f(x_0^+)$中至少有一个不存在. 无穷间断点和振荡间断点均为第二类间断点.

(3)连续与极限的关系

$f(x)$在点 x_0 处连续,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,但其逆命题不成立.

(4)性质

1)运算性质.

有限个在某点连续的函数的代数和(或积),仍在该点连续;两个在某点连续

的函数的商(分母在该点为零除外),仍在该点连续.

2)反函数、复合函数、初等函数的连续性.

若 $f(x)$在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续,那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$上单调增加(或单调减少)且连续.

设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成,$U(x_0)\subset D_{f\cdot g}$.若函数 $u=g(x)$在 $x=x_0$ 连续,且 $g(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$在 $u=u_0$连续,则复合函数 $y=f[g(x)]$在 $x=x_0$ 也连续.

初等函数在其定义区间内连续.

3)闭区间上连续函数的性质.

有界性与最大值最小值定理 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

介值定理 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \text{ 及 } f(b)=B,$$

那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使得

$$f(\xi)=C,(a<\xi<b).$$

特别地,当 $f(a)$与 $f(b)$异号时,有

零点定理 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),那么在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使

$$f(\xi)=0.$$

三、学 习 要 求

1. 函 数

(1)理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题的函数关系式.

(2)了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

(3)理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4)掌握基本初等函数的性质及其图形.

2. 极 限

(1)理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

(2)掌握极限的性质及四则运算法则.

(3)掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

(4)理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

3. 连　续

(1)理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

(2)了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性与最大值、最小值定理,介值定理),并会应用这些性质.

四、典型例题与方法解析

1. 函　数

例 1　求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{\lg|x-1|}{\sqrt{2x+1}}$;(2)$y=\arcsin(\lg\dfrac{x}{10})$.

思路分析　求函数的定义域,就是求使运算有意义的自变量的可取范围,往往是先列出不等式组,再解不等式组.

解　(1)$\lg|x-1|$的定义域为$|x-1|>0$,

$\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$的定义域为$2x+1>0$.

所以,y的定义域为$\begin{cases}|x-1|>0,\\2x+1>0,\end{cases}$得

$$(-\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty).$$

(2)$\begin{cases}\dfrac{x}{10}>0\\\left|\lg\dfrac{x}{10}\right|\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\10^{-1}\leqslant\dfrac{x}{10}\leqslant10,\end{cases}$

所以　$x\in[1,100]$.

注　求函数定义域是各类考试中常见题型,这类问题要首先熟知以下几个简单函数的定义域:

1)$y=\dfrac{1}{x}$,定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2)$y=\sqrt{x}$,定义域为$[0,+\infty)$.

3)$y=\log_a x(a>0)$,定义域$(0,+\infty)$.

4) $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, 定义域均为$(-1,1]$.

5) $x!$ 定义域为 N(自然数).

例 2 下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同?为什么?

(1) $f(x)=(\sqrt{x})^2$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2x}$, $g(x)=\sin x$;

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$, $g(x)=-\lg(x-\sqrt{x^2-1})$;

(4) $f(x)=3x^2+2x-1$, $g(t)=3t^2+2t-1$.

思路分析 函数的定义域和对应关系通常称为函数的两大要素.判定两个函数是否相同,要分别比较它们的定义域和对应关系是否完全相同.两个函数当(且仅当)定义域、对应关系完全相同时才相同,否则不同.并且函数关系仅与定义域、对应关系有关而与自变量、因变量用什么字母表示无关.

解 (1) $f(x)$的定义域是$[0,+\infty)$, $g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,显然, $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(2) $f(x)$与 $g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$,但整理 $f(x)$得 $f(x)=|\sin x|$,而 $g(x)=\sin x$,故 $f(x)$与 $g(x)$不相同.

(3)整理 $0<x+\sqrt{x^2+1}\neq1$,得 $f(x)$的定义域为$[1,+\infty)$,同样地,得 $g(x)$的定义域为$[1,+\infty)$.

又
$$\begin{aligned}g(x)&=\lg(x-\sqrt{x^2-1})^{-1}\\&=\lg\left(\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\\&=\lg(x+\sqrt{x^2-1}).\end{aligned}$$

故 $f(x)$与 $g(x)$相同.

(4)显然, $f(x)$与 $g(t)$表示同一函数.

例 3 已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, x\leqslant0,\\1, x>0\end{cases}$,求 $f(x-2)$, $f(-x)$.

思路分析 求函数表达式,此类题目为已知 $f(x)$和 $g(x)$的表达式,求 $f[g(x)]$.实质上就是根据复合函数的概念和函数符号的意义来求 $f[g(x)]$.

解
$$f(x-2)=\begin{cases}1+(x-2), x-2<0,\\1, x-2\geqslant0\end{cases}=\begin{cases}x-1, x<2,\\1, x\geqslant2.\end{cases}$$

$$f(-x)=\begin{cases}1-x, -x<0,\\1, -x\geqslant0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-x, x>0,\\1, x\leqslant 0.\end{cases}$$

例 4 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$.

思路分析 相当于已知 $f[g(x)]$的表达式,求 $f(x)$. 这是上例的反问题,一般解法是令 $g(x)=u$,解出 $x=\varphi(u)$,求出 $f(u)$的表达式,再将 u 换成x,即得 $f(x)$的表达式,但往往在解 $g(x)=u$ 时,不易求出 $\varphi(u)$. 因此,此类题目很多是将表达式凑成 $g(x)$的函数,从而简化计算.

解一 令 $e^x+1=u$,解得 $x=\ln(u-1)$. 因为 $u-1>0$,于是

$$\begin{aligned}f(u)&=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1\\&=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2-u+1.\end{aligned}$$

将 u 换成x,得

$$f(x)=x^2-x+1.$$

解二 将 $f(e^x+1)$凑成(e^x+1)的函数.

$$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1=(e^x+1)^2-(e^x+1)+1,$$

故 $f(x)=x^2-x+1$.

例 5 已知$2f(x)+f(1-x)=x^2$,求 $f(x)$.

思路分析 题目已知为 $f(x)$和 $f(1-x)$的一个线性组合,取适当形式建立另外一个线性组合,从而解联立关系组得 $f(x)$.

解 令 $u=1-x$,得到

$$2f(1-u)+f(u)=(1-u)^2,$$

即
$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2,$$

与
$$2f(x)+f(1-x)=x^2 \text{ 联立},$$

得
$$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}.$$

例 6 设 $f(0)=0$,且 $x\neq 0$ 时,$f(x)$满足

$$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}\quad (a,b,c \text{ 为常数}, |a|\neq|b|).$$

证明 $f(x)$为奇函数.

思路分析 由上例可以得到启示,解出 $f(x)$. 从而由奇函数、偶函数定义做出判断.

证 先求 $f(x)$.

当 $x\neq 0$ 时,令 $x=\frac{1}{t}$,得

$$af(\frac{1}{t})+bf(t)=ct$$

即 $$af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx.$$

与条件 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$联立,得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx),$$

故
$$\begin{aligned}f(-x)&=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{-x}+bcx)\\&=-\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx)\\&=-f(x).\end{aligned}$$

又 $f(0)=0$,所以 $f(x)$为奇函数.

2. 极 限

极限概念及求极限的运算贯穿高等数学的始终,全面掌握求极限的方法与技巧是学好高等数学的基本要求.

数列的极限

例 1 已知 $x_1=2, x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}, n\geqslant 1$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

思路分析 此类题目已知数列的前有限项及通项的表达式,求数列的极限.一般利用极限的定义求解或利用单调有界数列必有极限定理来解.本题试用极限定义求解,步骤如下:

①先令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项两边取极限得出 l 的数值;

②证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性,通常利用 $|x_n-l|$ 逐步放大得出小于某一无穷小量.

解 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,由 $x_{n+1}=2+\frac{1}{x_n}$,两边对 n 求极限,

得 $l=2+\frac{1}{l}$ 解得 $l=1\pm\sqrt{2}$.

由题设易知 $x_n\geqslant 2$,故 $l=1-\sqrt{2}$不合题意,舍去.

因此,$l=1+\sqrt{2}$,且满足 $l=2+\frac{1}{l}$.

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性.

$$\begin{aligned}|x_n-l|&=\left|2+\frac{1}{x_{n-1}}-(2+\frac{1}{l})\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{l}\right|\\&=\left|\frac{x_{n-1}-l}{lx_{n-1}}\right|<\frac{|x_{n-1}-l|}{4}<\frac{|x_{n-2}-l|}{4^2}<\cdots<\frac{|x_1-l|}{4^{n-1}}\\&=\frac{\sqrt{2}-1}{4^{n-1}},\end{aligned}$$