数学基础知识丛书

解三角形

吴新萃

江苏人民出版社

解 三 角 形

吴 新 萃

江 苏 人 民 出 版 社

吴新革

*

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
宜兴印刷厂印刷

1979年3月第1版
1979年3月第1次印刷
印数：1—350,000册

书号：13100·023　定价：0.34元

内容提要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分解直角三角形、解任意三角形和几何问题的三角解法三个部分。全书比较系统地讲解了三角形的边角关系，三角形的解法，以及解三角形的应用。

本书第三部分几何问题的三角解法，由孔德熙、赵遂之、李宝林等同志编写。

目　　录

一、解直角三角形

毛主席教导我们："抓着了世界的规律性的认识，必须把它再回到改造世界的实践中去。"在本书中，我们将利用平面几何和三角函数的知识，进一步揭露三角形边角之间的关系．从而解决在工业、农业和军事等方面常遇到的解三角形的问题，以便更好地为实现四个现代化服务．

三角形的形状和大小，决定于它的六个组成元素：三个角和三条边．这六个元素不是彼此完全独立的，而是在某种程度上互相依赖和互相制约的．因此，如果我们知道了这六个元素中的三个元素（至少有一边）或元素间的关系，而这些已知量或已知关系如能符合于作三角形的条件，就可以从这些已知量及已知关系根据元素间的相依关系求出所有的元素，从而确定这个三角形的形状和大小．这样从已知量求出未知量再确定三角形的过程叫做**解三角形**．

§1　直角三角形中边与角之间的关系

1.两锐角之间的关系

在直角三角形ABC中，如果A、B为锐角，那么

$$A+B=90^\circ.$$

2.边边之间的关系

"中国是世界文明发达最早的国家之一"．早在三千年以前，我国劳动人民就已在生产实践中发现，有的直角三角形三边之间存在着"勾三股四弦五"的关系．就是说，如果一

个直角三角形的较短的直角边(勾)长是三个单位，较长的直角边(股)长是四个单位，那么其斜边(弦)长就是五个单位(图1). 由此不难算出:

$$3^2+4^2=5^2.$$

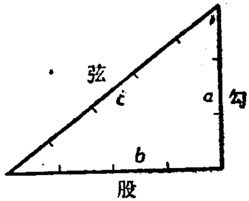

图 1

后来人们进一步发现，对于任何一个直角三角形都有“勾^2+股^2=弦^2”的关系，我们把它叫做:

勾股定理　在直角三角形中，两直角边平方的和等于斜边的平方.

如果勾用 a 表示，股用 b 表示，弦用 c 表示(图1)，那么勾股定理也可以写成:

$$a^2+b^2=c^2.$$

这个定理除利用相似形方法证明外，一般还可以采用下列两种方法证明:

第一，用割补的方法来证明勾股定理

如图2中实线部分是两个边长分别为 a 和 b 的正方形，显然它们的面积分别为 a^2 和 b^2.

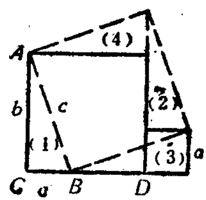

图 2

在面积为 b^2 的正方形一边 CD 上，截取 $CB=a$，连结 AB，把直角三角形 ABC 即(1)割下来，补到(2)的位置上；用同样的方法把直角三角形(3)补到(4)的位置上，则得到一个边长为 c 的正方形，其面积为 c^2.

由于c是直角三角形 ABC 的斜边长，这就证明：对于任何一个直角三角形，以两条直角边为边长的两个正方形面积的和等于以斜边为边长的正方形面积. 即 $a^2+b^2=c^2$.

第二，用面积的有关知识来证明勾股定理

已知：直角三角形 ABC，其中$\angle C=90°$（图 3）.

求证：$AC^2+BC^2=AB^2$

证 在直角三角形ABC的三边AC、CB和AB上分别作正方形$CAEF$，$CBGH$和$ABLK$，又作$CD\perp AB$并延长交KL于M，连结CK和BE.

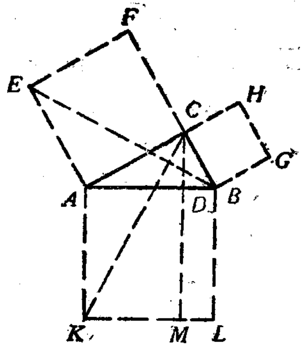

图 8

在$\triangle ABE$和$\triangle AKC$中：

$\because$ $AB=AK$，$AE=AC$，

$\angle BAE=\angle CAB+90°=\angle KAC$

$\therefore$ $\triangle ABE\cong\triangle AKC$.

但 $\triangle ABE$的面积$=\frac{1}{2}AE\cdot AC$

$=\frac{1}{2}\square CAEF$的面积，

$\triangle AKC$的面积$=\frac{1}{2}AK\cdot AD$

$=\frac{1}{2}\square AKMD$的面积.

$\therefore$ $\square CAEF$的面积$=\square AKMD$的面积.

同理可证

$\square CBGH$的面积$=\square BLMD$的面积.

$\therefore$ $\square CAEF$的面积$+\square CBGH$的面积

$=\square AKMD$的面积$+\square BLMD$的面积

$=\square ABLK$的面积.

即 $AC^2+BC^2=AB^2$.

3.边角之间的关系

在直角三角形ABC中，锐角A、B与各边a、b、c（如图4）之间有着下面的关系：

$$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B;$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B;$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\operatorname{ctg} B;$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\operatorname{tg} B.$$

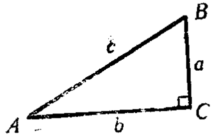

图 4

§2 直角三角形的解法

我们知道直角三角形中有一个角是直角，所以只要知道它的另两个元素(至少一个是边)，就可以作出这个直角三角形来. 因此，解直角三角形的问题只有：(1)已知两直角边；(2)已知一直角边和斜边；(3)已知斜边和一锐角；(4)已知一直角边和一锐角四种基本情况.

例1 在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，已知$a=37$毫米，$b=50$毫米，求c，A，B.

解 (1) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{37^2+50^2}=\sqrt{1369+2500}$

$=\sqrt{3869}\approx 62.2$(毫米)；

(2) $\because\quad \operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{37}{50}=0.74$,

查表 $\qquad \operatorname{tg} 36^\circ 30'=0.7400$,

$\therefore\qquad A=36^\circ 30'$;

(3) $B=90^\circ-A=90^\circ-36^\circ 30'=53^\circ 30'$,

或 $\qquad \operatorname{tg} B=\frac{b}{a}=\frac{50}{37}\approx 1.3513$,

查表 $\quad \text{tg}\,53°30'=1.3514,$

$\therefore \quad B=53°30'.$

例 2 在$\triangle ABC$中，C为直角，已知$b=47$毫米，$c=50$毫米，求a，A，B.

解 (1) $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{50^2-47^2}=\sqrt{2500-2209}$

$=\sqrt{291}\approx 17.06$(毫米)；

(2) $\because \quad \cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{47}{50}=0.94,$

查表 $\quad \cos 19°57'=0.9400,$

$\therefore \quad A=19°57'$；

(3) $\because \quad \sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{47}{50}=0.94,$

查表 $\quad \sin 70°3'=0.9400,$

$\therefore \quad B=70°3'.$

例 3 在$\triangle ABC$中，C为直角，已知$A=35°6'$，$c=25$厘米，求B、a、b.

解 (1) $B=90°-A=90°-35°6'=54°54'$；

(2) $\because \quad \sin A=\dfrac{a}{c}$，$\sin 35°6'=\dfrac{a}{25}$，

得 $\quad a=25\sin 35°6',$

查表 $\quad \sin 35°6'=0.5750,$

$\therefore \quad a=25\times 0.5750\approx 14.38$(厘米)；

(3) $\because \quad \cos A=\dfrac{b}{c}$，$\cos 35°6'=\dfrac{b}{25}$，

得 $\quad b=25\cos 35°6'.$

查表 $\quad \cos 35°6'=0.8181,$

$\therefore \quad b=25\times 0.8181\approx 20.45$(厘米).

例 4 在$\triangle ABC$中，C为直角，已知$B=22°37'$，

$a=12$厘米，求A、b、c.

解 (1) $A=90^\circ-B=90^\circ-22^\circ37'=67^\circ23'$;

(2) $\because$ $\operatorname{tg} B=\dfrac{b}{a}$, $\operatorname{tg} 22^\circ37'=\dfrac{b}{12}$,

得 $$b=12\operatorname{tg} 22^\circ37',$$

查表 $$\operatorname{tg} 22^\circ37'=0.4166,$$

$\therefore$ $b=12\times0.4166\approx5$(厘米);

(3) $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+12^2}$

$=\sqrt{169}=13$(厘米),

或 $$c=\frac{a}{\cos B}=\frac{12}{\cos 22^\circ37'}=\frac{12}{0.9231}\approx13\text{(厘米)}.$$

综合上述四例，将解直角三角形ABC (其中$C=90^\circ$)四种情况的一般解法分别说明如下:

(1) 已知直角边a和b，求A、B、c.

由 $\operatorname{tg} A=\dfrac{a}{b}$，求得锐角$A$;

由 $\operatorname{tg} B=\dfrac{b}{a}$，求得锐角$B$;

由 $a^2+b^2=c^2$，求 得$c=\sqrt{a^2+b^2}$.

(2) 已知直角边a和斜边c，求A、B、b.

由 $\sin A=\dfrac{a}{c}$，求得锐角A;

由 $\cos B=\dfrac{a}{c}$，求得锐角B;

由 $a^2+b^2=c^2$，求得 $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

(3) 已知斜边c和锐角A，求B、a、b.

由 $A+B=90^\circ$，得$B=90^\circ-A$;

由 $\dfrac{a}{c}=\sin A$，得$a=c\sin A$;

由 $\dfrac{b}{c}=\cos A$，得$b=c\cos A$.

（4）已知直角边a和锐角A，求B、b、c.

由 $A+B=90°$，得$B=90°-A$；

由 $\dfrac{b}{a}=\operatorname{ctg} A$，得$b=a\operatorname{ctg} A$；

由 $a^2+b^2=c^2$，得$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\left(\text{或由}\dfrac{a}{c}=\sin A,\ \text{得}c=\dfrac{a}{\sin A}\right)$.

此外在解题过程中还要用解法中没有用过的公式检验所得的答案是否正确.

§ 3 三角函数对数表和它的用法

我们来看下面问题：

在直角三角形ABC中，$C=90°$，$A=35°$，$c=12.34$，求a.

这个问题可用对数来计算.

$$\because \quad a=c\sin A$$
$$=12.34\times\sin 35°$$
$$=12.34\times 0.5736,$$
$$\therefore \quad \lg a=\lg 12.34+\lg 0.5736.$$

$$\begin{array}{r}\lg 12.34=1.0913\\ \lg 0.5736=\bar{1}.7587\ (+\\ \hline \lg a=0.8500\end{array}$$

$$\therefore \quad a=7.079.$$

在上面这个问题的计算过程中，我们先利用正弦函数表查出sin 35°的值0.5736，然后再利用对数表查出0.5736的对

数$\overline{1}.7587$．这就告诉我们，$35°$角的正弦的对数是$\overline{1}.7587$，用式子来表示，就是：

$$\lg\sin 35° = \overline{1}.7587.$$

为了减少查表的手续，锐角的正弦、余弦、正切、余切的对数，也可以从三角函数对数表里直接查得，用法见《数学用表》．

下面我们来利用对数解直角三角形．

例1 已知直角三角形的直角边$b=97$米，$A=39°42'$，求a，c和B．

解 如图5，在直角$\triangle ABC$中，$b=97$，$A=39°42'$

(1) 由 $a = b\operatorname{tg} A$

$= 97\operatorname{tg} 39°42'$，

得 $\lg a = \lg 97 + \lg\operatorname{tg} 39°42'$．

$$\begin{array}{r} \lg 97 = 1.9868 \\ \lg\operatorname{tg} 39°42' = \overline{1}.9192 \ (+ \\ \hline \lg a = 1.9060 \end{array}$$

$\therefore$ $a = 80.54$(米)．

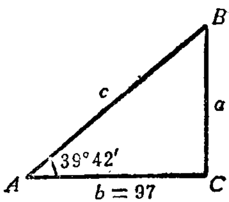

图 5

(2) $B = 90° - A = 50°18'$．

(3) 由 $c = \dfrac{b}{\cos A} = \dfrac{97}{\cos 39°42'}$，

得 $\lg c = \lg 97 - \lg\cos 39°42'$．

$$\begin{array}{r} \lg 97 = 1.9868 \\ \lg\cos 39°42' = \overline{1}.8862 \ (- \\ \hline \lg c = 2.1006 \end{array}$$

$c = 126.1$(米)．

这类计算题的计算步骤较多，所以应该重视最后的验算.

这个例题可用公式 $b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$ 两边取对数来验算.

即
$$\begin{array}{r} \lg(c+a)=2.3152 \\ \lg(c-a)=1.6586\ (+ \\ \hline \lg(c^2-a^2)=3.9738 \end{array}$$

$$\text{而}\ 2\lg b=3.9736,$$

这两个对数仅相差0.0002，可见以上计算结果是正确的.

例 2　等腰三角形的腰长30.02cm，底边长19.8cm，求它的各角(图 6).

解　$\because$　$AB=AC=30.02cm$,

$BC=19.8cm$,

作底边上的高 AD，那么 AD 平分顶角A和底边BC.

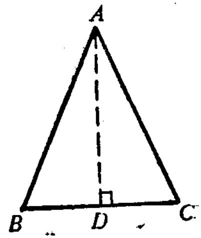

图 6

$$\therefore\quad BD=\frac{1}{2}BC=\frac{19.8cm}{2}=9.9cm$$

$$\cos B=\frac{BD}{AB}=\frac{9.9}{30.02}$$

$$\lg\cos B=\lg 9.9-\lg 30.02$$

$$\begin{array}{r} \lg 9.900=0.9956 \\ \lg 30.02=1.4774\ (- \\ \hline \lg\cos B=\overline{1}.5182 \end{array}$$

$$\therefore\quad B=70°45'.$$

$$\therefore\quad C=B=70°45'.$$

$\therefore\quad A=180°-2B=38°30'.$

答：这个等腰三角形的顶角等于38°30′，两个底角各等于70°45′.

§4 应 用 举 例

1.坡度计算

为了防止水土流失，在修造山坡时，要考虑山坡的陡缓；为了堤坝、渠道的稳定可靠，它们的边坡要有一定的倾斜；为了保证行车的安全，公路上、下坡段和拐弯处路面，要有一定的倾斜；为了便于屋顶泄水，屋顶面也有一定的倾斜度等等.地(屋)面的倾斜度，一般称为**坡度**.我们常用下式来表示坡度的大小(图7).

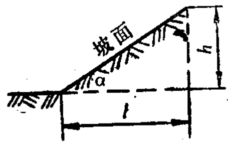

图 7

$$坡度i=\frac{垂直距离h}{水平距离l}$$

这就是说：如果斜坡坡面部分的高度为h，坡面的水平距离为l，那么h与l的比值叫做该斜坡的**坡度**i.设坡面与水平面所夹的角为α，由正切函数的定义，得

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{l}=i, \tag{1}$$

即
$$i=\operatorname{tg}\alpha.$$

通常坡度i用分子为1的分数来表示

$$i=1:m. \tag{2}$$

其中m叫做**边坡系数**，例如渠道的边坡度有1∶0.75，1∶1，1∶2等，相应的边坡系数m为0.75、1、2等.

由(1)、(2)两式，就可得垂直距离h、水平距离l和坡

度 i 的表达式

$$h=\frac{l}{m} \quad 或 \quad l=mh.$$

例 1 图 8 是一拦水坝的横断面，坝顶宽 DC 是 3 米，坝高 DE 是 4 米，迎水面坡度是1：2，背水面坡度是1：1. 设背水坡、迎水坡与水平面的夹角分别为 α、β. 求 α、β 和坝底宽 AB.

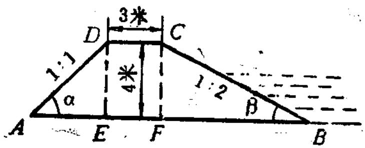

图 8

解 在图 8 中，

由背水面坡度1：1可知

$$\operatorname{tg}\alpha=1$$

$$\therefore \quad \alpha=45°;$$

由迎水面坡度1：2，可知

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}=0.5,$$

查表，得 $\beta=26°34'$;

又坝底宽 $AB=AE+EF+FB=AE+DC+FB$,

而 $AE=4\times1=4$(米),

$DC=3$(米),

$FB=4\times2=8$(米),

$\therefore \quad AB=15$(米).

答：迎水坡、背水坡与水平面的夹角分别是 $26°34'$、$45°$，坝底宽是15米.

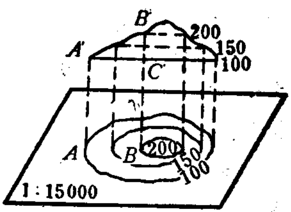

图 9

例 2 如图 9，A 地的高程是100米，B 地的高程是200