高等院校理工科教材

有限体积法基础

李人宪 编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

图书在版编目(CIP)数据

有限体积法基础/李人宪编. 北京:国防工业出版社, 2005.7

ISBN 7-118-03902-0

Ⅰ.有... Ⅱ.李... Ⅲ.计算流体力学 Ⅳ.035

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053301 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 11¾ 223 千字

2005 年 7 月第 1 版 2005 年 7 月北京第 1 次印刷

印数:1—3000 册 定价:16.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

内 容 简 介

本书论述了有限体积法的基本思想和特点，重点介绍了稳态条件下扩散问题的有限体积法、对流扩散问题的有限体积法、压力速度耦合问题的有限体积法，简要介绍了非稳态流动问题的有限体积法和边界条件处理，讨论了对方程求解收敛性和求解精度有重要影响的差分格式问题以及有限体积法离散方程的基本解法，最后讨论了实际应用中有重要意义的非规则网格及其计算问题。

本书内容由浅入深，循序渐进，例题较多，便于自学，可作为大专院校教材使用，也可以供工程技术人员参考。

前　言

有限体积法是求解流体流动和传热问题偏微分方程的数值方法之一。

最近二三十年，计算流体力学和计算传热学发展非常迅速，许多过去只能靠实验测量和风洞模拟来研究的流动和传热问题，现在都可以用数值计算的方法由计算机来解决。由于大型计算流体力学商用软件的出现，许多过去只能由从事力学或流体计算的专业人员来分析的问题，现在一般的工程师和技术人员也可以解决。例如土木工程中的风载荷问题，建筑物的通风和空调问题，机械工程中液体传动问题，动力工程中动力机械内气体流动和传热问题，车辆和飞行器的空气动力学问题等，都是这些专业的工程技术人员经常遇到的设计问题。过去多半靠经验公式近似计算，现在都可以借助于流体数值计算软件自行做仔细的分析计算。因此工科专业的学生，特别是研究生，应该学习和掌握计算流体力学的方法。

作者自 1999 年起为研究生开设计算流体力学课程，多年的教学实践表明，对于工科类专业的学生来说，流体流动和传热问题是比较复杂的问题，特别是土木类和机械类的学生，要在有限的课时内全面掌握流体力学和传热学的基本理论和数值计算方法有一定的困难，在应用已有软件做工程分析时常处于知其然而不知其所以然的尴尬境地。因此非常需要一本突出介绍流体流动和传热数值计算核心算法，而尽量少涉及复杂的流体力学和传热学原理内容的教材。当前，流体流动和传热问题的数值计算方法很多，如有限差分法、有限元法、有限分析法、边界元法、谱分析方法、各类格子类方法等，有限体积法也是其中的一种。应该说每种数值计算方法都有其特点和适用范围。但最近二三十年的计算实践表明，有限体积法在流体流动和传热数值计算领域内是适应面比较广、解题能力比较强、通用性较好的一种数值计算方法。与其他数值计算方法相比，有限体积法得到的离散方程具有能更好地保持原微分方程的守恒性、各项物理意义明确、方程形式规范等优点。目前主要的流体流动计算软件，如 STARCD、FLUENT、FLOW3D、PHOENICS、CFX，都采用有限体积法作为其核心算法。正因为此，突出介绍有限体积法的教材成为急需。

20 世纪 80 年代以来，国内出版了不少论述流体流动和传热数值计算的教材和专著。虽然对有限体积法有所介绍，但它们或内容较深，不适合非力学专业学生的学习；或篇幅过大，无法满足少课时的教学要求；或多种方法并行介绍，使初学者

难以取舍。H.K.Versteeg 和 W.Malalasekera 编写的 An Introduction to Computational Fluid Dynamics 一书较清楚地介绍了有限体积法的基本计算过程，难易适中，比较适合国内工科学生的基础水平。因此，作者在编写本教材时较大量地参考了此书的有关内容。希望读者能通过本书的学习对有限体积法的基本思想和计算原理有一个概括的了解，从而满足非力学专业学生和工程技术人员学习有限体积法和更好地应用已有软件进行工程流体分析的需求，为深入钻研打下基础。

全书分为 9 章，第一章在比较了几种常用的流体流动数值计算方法特点的基础上着重介绍了有限体积法的基本思想和特点；第二章介绍扩散问题的有限体积解法，从一维稳态扩散问题入手，简要介绍了区域离散方法、离散方程的推导和控制容积界面值的近似计算；第三章介绍对流扩散问题的有限体积法，通过例题说明对流项对数值计算的影响；第四章从离散方程的守恒性、方程系数的有界性和流动过程的输运性出发讨论了有限体积法中重要的差分格式问题；第五章介绍压力速度耦合问题的有限体积算法，讨论了解决压力速度耦合问题数值计算中两个难点的方法，即交错网格算法和压力耦合问题的半隐算法(SIMPLE 算法及其改进算法)；第六章简要介绍了求解三对角方程的 TDMA 算法及其在高维问题中的应用；第七章讨论了非稳态流动问题的有限体积算法的过程；第八章介绍了有限体积法求解过程中对边界条件的处理方法；第九章着重讨论了有限体积法中非规则网格的生成和非规则网格条件下离散方程的求解过程。其中第二章、第三章，第五章～第八章的内容主要编译自 An Introduction to Computational Fluid Dynamics 一书，为使其适合一般工程专业学生学习的需求，编写过程中做了适当的增删，并补充了一些习题和思考题。

本书的编写过程中得到作者的同事及学生的鼓励和帮助，全书经西南交通大学刘应清教授和北京航空航天大学方韧教授审阅，在此一并表示感谢。由于编者水平所限，书中仍有不少缺憾之处，希望各位老师和同学在使用中不吝赐教。

编　者

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 概 述

有限体积法(Finite volume method)，也称为控制容积积分法，是20世纪六七十年代逐步发展起来的一种主要用于求解流体流动和传热问题的数值计算方法。流体流动和传热问题的研究已经有很长的历史，从17世纪的牛顿力学，18世纪的伯努利定律、达朗贝尔原理、欧拉流体运动基本方程和拉格朗日流体无旋运动条件，到19世纪粘性流体力学方程的导出和20世纪空气动力学和边界层理论的迅速发展，人们已经对流体流动和传热问题有了比较深刻的认识。尽管理论上还有一些不完善之处，如对紊流现象的认识、理解和描述，但绝大多数流动和传热问题都可以用数学公式来描述。例如，一般认为下面一组笛卡儿坐标系下的方程可以用来表述绝大部分流体流动和传热问题。

质量守恒方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1-1}$$

动量守恒方程：

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u \boldsymbol{u}) = \mathrm{div}(\mu \cdot \mathrm{grad}\ u) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_{Mx} \tag{1-2}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v \boldsymbol{u}) = \mathrm{div}(\mu \cdot \mathrm{grad}\ v) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_{My} \tag{1-3}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho w \boldsymbol{u}) = \mathrm{div}(\mu \cdot \mathrm{grad}\ w) - \frac{\partial p}{\partial z} + S_{Mz} \tag{1-4}$$

能量守恒方程：

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho i \boldsymbol{u}) = \mathrm{div}(\lambda \cdot \mathrm{grad}\ T) - p \cdot \mathrm{div}(\boldsymbol{u}) + \Phi + S_i \tag{1-5}$$

式中：

$$\Phi = \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\Bigg\}+\lambda(\mathrm{div}\boldsymbol{u})^2$$

流体状态方程：

$$P=P(\rho,T)\text{ 和 }i=i(\rho,T) \tag{1-6}$$

式中　$\boldsymbol{u}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}+w\boldsymbol{k}$；

u,v,w——流速在 x，y，z 坐标方向的分量；

ρ——流体密度；

μ——流体动力粘度；

i——流体内能；

λ——导热系数；

T——流体温度；

p——流体压力；

S_{Mx},S_{My},S_{Mz}——流体源(汇)；

S_T——热源。

$\mathrm{div}(\boldsymbol{A})$称为矢量 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的散度，定义为：$\mathrm{div}(\boldsymbol{A})=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$

$\mathrm{grad}(u)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 称为数量场 u 中一点的梯度。

如果流体流动状态为紊流，由于紊态流动的复杂性，直接求解上述方程组的难度加大。工程上常采用所谓时均方程加紊流模型的求解方法，即把紊流流动看作时间平均流动和脉动流动的叠加。这种方法将控制方程对时间作平均而把脉动流动的影响用紊流模型表示。此时一般还要额外求解关于紊流模型的方程。例如常用的 $k-\varepsilon$ 两方程紊流模型，还须求解下述两个方程。

紊动能 k 方程：

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho k\boldsymbol{u})=\mathrm{div}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\mathrm{grad}\ k\right]-\rho\varepsilon+\mu_t P_G \tag{1-7}$$

紊动耗散率 ε 方程：

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\varepsilon\boldsymbol{u})=\mathrm{div}\left[\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\mathrm{grad}\ \varepsilon\right]-\rho C_2\frac{\varepsilon^2}{k}+\mu_t C_1\frac{\varepsilon}{k}P_G \tag{1-8}$$

式中　$\mu_t=\rho C_\mu\dfrac{k^2}{\varepsilon}$；

$$P_G = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;$$

$C_\mu, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_1, C_2$ 为常数(适用面较广的一组为 0.09，1.00，1.30，1.44，1.92)。

显然，这一组方程在数学上太过复杂，目前还无法用解析的方法将其解出。因此，当前对流体流动和传热问题的研究除采用试验测量、试验模拟观察的方法外，在计算上主要采取两种措施：其一，根据具体问题中流体流动和传热的特征对方程进行简化，如无粘流、稳态流、不可压缩流、无热源传热、纯导热等；其二，采用数值计算的方法近似求解流动和传热方程。然而，即使经过简化，相当多的流动和传热方程仍然无法用解析的方法得到理论解。例如无粘、无旋、不可压缩流体所满足的拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{1-9}$$

是相当简单的偏微分方程。但当求解区域比较复杂时仍然无法得到解析解。因此，数值计算方法成为了求解工程中流体流动和传热问题的最主要的方法。

§1-2　求解流体流动和传热问题的常用数值计算方法

数值计算是将描述物理现象的偏微分方程在一定的网格系统内离散，用网格节点处的场变量值近似描述微分方程中各项所表示的数学关系，按一定的物理定律或数学原理构造与微分方程相关的离散代数方程组。引入边界条件后求解离散代数方程组，得到各网格节点处的场变量分布，用这一离散的场变量分布近似代替原微分方程的解析解。当前求解流体流动和传热方程的数值计算方法比较多，如有限差分法、有限元法、有限体积法、边界元法、特征线法、谱方法、有限分析法和格子类方法等。每种数值计算方法有各自的特点和各自的适用范围，其中通用性比较好、应用比较广泛的是前 4 种。

一、有限差分法

有限差分法是一种比较古老的算法，有很长的应用历史和众多的研究人员，曾经是求解各种复杂偏微分方程的最主要的数值计算方法。有限差分法用差商代替微商，用计算区域网格节点值构成差商，近似表示微分方程中各阶导数。例如：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,n} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \tag{1-10a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = \frac{\dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} - \dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}}{\Delta x} \tag{1-10b}$$

式(1-10)是用一阶向前差分来表示相应的一阶导数或二阶导数，类似的可以有一阶向后差分，如：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,n} \approx \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \approx \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{1-11a}$$

或中央差分：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,n} \approx \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t},\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,n} \approx \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \tag{1-11b}$$

等等。当然也可以用二阶差分(三点差分)来表示差商。将表示场变量一阶导数和二阶导数的差商近似式代入微分方程，就可以得到关于各网格点处的差分方程。求解这一组代数方程，可得各节点处的场变量数值解。例如一维稳态无源对流扩散方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) \tag{1-12}$$

按向前差分可写出差分方程：

$$\rho u\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x} = \Gamma\frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{(\Delta x)^2} \tag{1-13a}$$

则
$$(R-1)\varphi_{i+1} - (R-2)\varphi_i - \varphi_{i-1} = 0 \tag{1-13b}$$

式中　$R = \dfrac{\rho u\Delta x}{\Gamma}$。

采用向后差分或中央差分可得类似方程。

事实上，上述近似式的获得是通过对求解域中某点 Taylor 展开式得到的。例如欲求点(x_j，t_{n+1})处的未知函数值 u_j^{n+1}，由参考点(x_j，t_n)Taylor 展开，有

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,n} + \frac{\Delta t^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j,n} + \frac{\Delta t^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{j,n} + \cdots \tag{1-14a}$$

即
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2!}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{j,n} - \frac{\Delta t^2}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{j,n} + \cdots \tag{1-14b}$$

忽略掉二阶导数项及其更高阶导数项，就得到关于时间向前差分的一阶导数近似表达式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,n} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \tag{1-15}$$

同理可得关于时间的中央差分或关于空间的中央差分表达式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j,n} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{j,n} + \cdots \tag{1-16a}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j,n} = \frac{u_{j+1}^{n} - u_{j-1}^{n}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{j,n} + \cdots \tag{1-16b}$$

忽略掉三阶导数项及其后面的高阶导数项即得中央差分近似式。当然也可以得到其他差分格式的近似表达式。所忽略掉的各项之和引起的误差叫做截断误差，所忽略掉的最低阶导数前系数中的 Δt 或 Δx 的次数表示了截断误差的阶数，阶数越高表明截断误差越小。如前述向前差分格式的截断误差为一阶，而中央差分格式的截断误差为二阶。因此中央差分格式的计算精度比向前差分格式计算精度要高。

有限差分法形式简单，对任意复杂的偏微分方程都可以写出其对应的差分方程。但是有限差分方程的获得只是用差商代替微分方程中的微商(导数)，而微分方程中各项的物理意义和微分方程所反映的物理定律(如守恒定律)在差分方程中并没有体现。因此具有不同流动或传热特征的实际问题在微分方程中所表现的特点，在差分方程中没有得到体现。所以差分方程只能认为是对微分方程的数学近似，基本上没有反映其物理特征。差分方程的计算结果有可能表现出某些不合理现象。

二、有限元法

有限元法是 20 世纪 60 年代出现的一种数值计算方法。它最初用于固体力学问题的数值计算，如杆系结构，梁系结构，板、壳、体结构的受力和变形问题。20 世纪 70 年代在英国科学家 Zienkiewicz O.C.等人的努力下，将它推广到各类场问题的数值求解，如温度场、电磁场，也包括流场。

有限元法离散方程的获得方法主要有直接刚度法、虚功原理推导、泛函变分原理推导或加权余量法推导。直接刚度法是直接从问题的物理定律、物理公式中得到有限元离散方程。它只适用于比较简单的问题，如梁单元受力变形的有限元离散方程。虚功原理一般只用于推导弹性力学中物体受力和变形问题的计算过程。变分原理是将微分方程求解问题转换为某泛函求极值问题，再对泛函的表达式进

行一定的运算得到有限元离散方程。它可以被用于各类场问题的有限元离散方程的推导，但是首先要找到与所求解问题的微分方程对应的泛函。这不是一件容易的事情。在许多情况下所要求解的微分方程没有对应的泛函，例如前述流体流动和传热的控制微分方程组就没有对应的泛函，因此变分原理推导法不能应用。这时一般采用加权余量法推导。加权余量法的思想很简单，设某物理问题的控制微分方程及其边界条件分别为

$$f(\varphi)=0 \quad (\text{在域}\,\Omega\,\text{内}) \tag{1-17a}$$

$$g(\varphi)=0 \quad (\text{在域}\,\Omega\,\text{边界}\,S\,\text{上}) \tag{1-17b}$$

φ 为待求函数。首先选定一个试探函数

$$\tilde{\varphi}=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i \tag{1-18}$$

式中，c_i 为待定常数；φ_i 为试探函数项。

将试探函数代入式(1-17a)和式(1-17b)，一般来讲不可能正好满足，在域 Ω 内和边界 S 上会产生误差，即

$$f(\tilde{\varphi})=R \tag{1-19a}$$

$$g(\tilde{\varphi})=R_b \tag{1-19b}$$

式中，R 和 R_b 称为余量。加权余量法的基本思想是在域 Ω 内或边界 S 上寻找 n 个线性无关的函数 $\delta W_i(i=1,2,\cdots,n)$，使余量 R 和 R_b 在加权平均的意义上等于零，即

$$\int_{\Omega}R\cdot\delta W_i\mathrm{d}\Omega=0 \tag{1-20a}$$

$$\int_{\Omega}R_b\cdot\delta W_i\mathrm{d}\Omega=0 \tag{1-20b}$$

这里 δW_i 称为权函数。

式(1-20a)和式(1-20b)表明了这样一个思想：尽管 $\tilde{\varphi}$ 本身不能满足微分方程式(1-17a)和式(1-17b)，但是当其余量与许多线性无关的权函数相乘并积分时，这个余量在总体上接近于零，也就是说 $\tilde{\varphi}$ 在积分的意义上满足微分方程式(1-17a)和式(1-17b)。当 n 足够大时，$\tilde{\varphi}$ 就趋近于真解 φ。

例如前述一维稳态对流扩散方程式(1-12)，按照加权余量法的思想，其解函数 φ 在有限元网格系统中的每个单元内应满足

$$\int_e\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u\varphi)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\right]\delta W\mathrm{d}x=0 \tag{1-21}$$

也就是说解函数 φ 在积分的意义上满足原微分方程。在选定权函数 δW 后(有限元法常取单元形状函数为权函数)，将式(1-21)经过一定的运算可得有限元离散方程。

有限元法的优点是解题能力强，可以比较精确地模拟各种复杂的曲线或曲面边界，网格的划分比较随意，可以统一处理多种边界条件，离散方程的形式规范，便于编制通用的计算机程序。因此，有限元法在固体力学方程的数值计算方面取得了巨大的成功。但是在应用于流体流动和传热方程求解过程中却遇到了一些困难。其原因仍可归结为按加权余量法推导出的有限元离散方程也只是对原微分方程的数学近似。当处理流动和传热问题的守恒性、强对流、不可压缩条件等方面的要求时，有限元离散方程中各项还无法给出合理的物理解释。对计算中出现的一些误差也难以进行改进。因此有限元法在流体力学和传热学中的应用还存在一些问题。

三、有限体积法

有限体积法是在有限差分法的基础上发展起来的，同时它又吸收了有限元法的一些优点。有限体积法生成离散方程的方法很简单，可以看成有限元加权余量法推导方程中令权函数 $\delta W=1$ 而得到的积分方程。但是方程的物理意义完全不同。首先，积分的区域是与某节点相关的控制容积；其次，积分方程表示的物理意义是控制容积的通量平衡。例如前述一维稳态对流扩散方程有限体积法离散方程的出发点为下列方程：

$$\int_V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u\varphi)\mathrm{d}V=\int_V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}V \tag{1-22}$$

等式左边表示了通过控制容积 V 的对流量，等式右边表示通过控制容积 V 的扩散量。将方程改写为：

$$\int_V\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho u\varphi)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\right]\mathrm{d}V=0 \tag{1-23}$$

式(1-23)意味着在稳定状态时通过控制容积的对流量与扩散量的和(总通量)为零，即通量平衡。因此，有限体积法推导其离散方程时是通过控制容积中的积分方程作为出发点，这一点与有限差分法直接从微分方程推导完全不同。另外，有限体积法获得的离散方程，物理上表示的是控制容积的通量平衡，方程中各项有

明确的物理意义，这也是有限体积法与有限差分法和有限元法相比更具优势的地方。正因为此，有限体积法是目前在流体流动和传热问题求解中最有效的数值计算方法，已经得到了广泛的应用。

四、边界元法

边界元法是 20 世纪 70 年代后期针对有限差分法和有限元法占用计算机内存资源过多的缺点而发展起来的一种求解偏微分方程的数值方法。它的最大优点是降维，只在求解区域的边界进行离散就能求得整个流场的解。这样一来，三维问题降维为二维问题，二维问题降维为一维问题。使人们通过小机器求解大问题的愿望有可能实现。

边界元法的基本思想并不复杂，用边界积分方程将求解域的边界条件与域内任意一点的待求变量值联系起来，然后求解边界积分方程即可。但是边界积分方程的导出却不很简单。下面采用加权余量法，以拉普拉斯方程为例简要说明边界积分方程的导出过程。

设有拉普拉斯方程及其边界条件构成的定解问题(图 1-1):

$$L(u) \equiv \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{在求解域}\ \Omega\ \text{内}) \tag{1-24a}$$

$$u\big|_{S_1} = \bar{u} \quad (\text{在求解域}\ \Omega\ \text{的}\ S_1\ \text{边界}) \tag{1-24b}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_2} = \bar{q} \quad (\text{在求解域}\ \Omega\ \text{的}\ S_2\ \text{边界}) \tag{1-24c}$$

式中，$\bar{u}, \bar{q}$ 均为已知函数；n 为边界外法线方向。

设定解问题的近似解为 u，将近似解代入上述三式，通常不会正好满足各方程，将会产生余量(或残差)，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varepsilon_1 \tag{1-25a}$$

$$u - \bar{u} = \varepsilon_2 \tag{1-25b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q} = \varepsilon_3 \tag{1-25c}$$

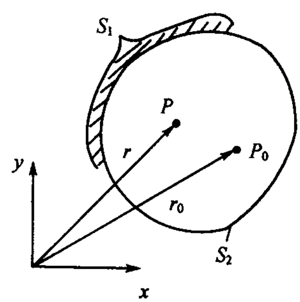

图 1-1　求解域及边界条件

按加权余量法的思想，若能找到适当的权函数 w，使上述误差在加权平均的意义上在整个求解域(包括边界)等于零，则近似解与真解的误差足够小。可以证明，加权余量法的这一要求可表述为

$$\iint_{\Omega}\varepsilon_1 w\mathrm{d}\Omega+\int_{S_1}\varepsilon_2\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}S-\int_{S_2}\varepsilon_3 w\mathrm{d}S=0 \tag{1-26a}$$

或
$$\iint_{\Omega}\Delta u\cdot w\mathrm{d}\Omega=\int_{S_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{q}\right)w\mathrm{d}S-\int_{S_1}(u-\bar{u})\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1-26b}$$

利用格林公式

$$\iint_{\Omega}(w\Delta u-u\Delta w)\mathrm{d}\Omega=\int_{S_1+S_2}\left(w\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{1-27a}$$

有
$$\iint_{\Omega}\Delta u\cdot w\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Omega}u\Delta w\mathrm{d}\Omega+\int_{S_1+S_2}\left(w\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{1-27b}$$

代入式(1-26b)

$$\iint_{\Omega}u\Delta w\mathrm{d}\Omega+\int_{S_1+S_2}\left(w\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial w}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\int_{S_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{q}\right)w\mathrm{d}S-\int_{S_1}(u-\bar{u})\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1-28}$$

经合并同类项整理后可得

$$\iint_{\Omega}u\Delta w\mathrm{d}\Omega=\int_{S}qw\mathrm{d}S-\int_{S}u\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1-29}$$

上述运算的目的是使近似函数 u 在方程中仅以其本身形式出现，而换掉了原来的二阶导数形式。但这样一来对权函数 w 的要求提高了。边界元法选取的权函数比较特殊，与有限元法中的权函数完全不同。通常取为下列方程的解：

$$\Delta w+\delta=0$$

即
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=-\delta \tag{1-30}$$

式中，δ 为 Dirac(狄拉克)函数，定义为

$$\delta(r|r_0)=\begin{cases}0 & (r\neq r_0)\\ \infty & (r=r_0)\end{cases} \tag{1-31a}$$

而且
$$\iint_{\Omega}\delta(r|r_0)\mathrm{d}\Omega=1 \tag{1-31b}$$

r_0 为求解域 Ω 内固定点 P_0 的矢径，r 为域内任一点的矢径。

方程式(1-31)的解称为算子 Δw 的基本解。基本解的特点是可以满足方程式(1-31)，但在某点有奇异性。基本解为

$$w=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\ln|r-r_0| & (\text{二维问题})\\ \dfrac{1}{4\pi|r-r_0|} & (\text{三维问题})\end{cases} \tag{1-32}$$

将 w 作为权函数代入式(1-29)，方程左端为

$$\iint_{\Omega} u\cdot\Delta w\mathrm{d}\Omega=\iint_{\Omega} u(-\delta_i)\mathrm{d}\Omega=-u_i \tag{1-33}$$

从而式(1-29)成为

$$u_i=\int_S u\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S-\int_S qw\mathrm{d}S \tag{1-34}$$

式(1-34)表明求解域内任意一点处的变量值 u_i 可以由边界上函数的积分获得。这就是边界积分方程。将区域边界按一定方式离散可得出边界元法的离散方程组。

一般来讲，边界元法由于降维导致占用计算机内存资源少，计算精度较高，更适宜于大空间外部绕流计算，特别是无粘势流的计算采用边界元法有一定的优势。但是，若流体描述方程本身比较复杂时，如粘性 N-S 方程，则对应的权函数算子基本解不一定能找到。因此，边界元法的应用受到很大限制。

§1-3 有限体积法的基本思想和特点

一、通用变量方程

考察式(1-1)~式(1-5)、式(1-7)和式(1-8)，尽管它们是关于不同变量的方程，但它们有非常相似的形式。如果我们引入一个通用变量(或特征变量)φ，则方程式(1-1)~式(1-5)，式(1-7)和式(1-8)可以写成统一的形式：

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\varphi\boldsymbol{u})=\mathrm{div}(\Gamma\cdot\mathrm{grad}\ \varphi)+S_{\varphi} \tag{1-35}$$

将 φ 取为不同的变量，并取扩散系数 Γ 和源项为适当的表达式，可得到连续性方程、动量方程、能量方程、紊动能方程和紊动耗散率方程，如表 1-1 所列。