高中课程辅导

天津人民出版社

6

GAOZHONGKECHENGFUDAO

高中课程辅导 第六辑

编辑出版 天津人民出版社
（天津市赤峰道124号）
印　刷 天津新华印刷一厂
发　行 天津市新华书店

开本787×1092毫米 1/16 印张 4
1981年4月第一版第一次印刷

统一书号：7072·1217
定价：0.32元

高中课程辅导

〔理 科 复 习 专 辑〕

第六辑

目　录

※数　学※

※物　理※

※化　学※

※生　物※

数学

谈谈中学数学总复习

烟学敏　刘玉翘

复习是使我们对所学过的知识得到巩固和提高的有效方法。高中毕业总复习是中学学习的最后阶段，也是一个非常重要的阶段。通过总复习，要将五年来学习的数学知识进行全面、系统地归纳总结，以达到巩固知识、加深理解、提高认识的目的。

在复习时，一方面要重视对基础知识的理解、掌握和运用，另一方面要加强练习，努力提高自己的计算能力、逻辑推理能力、空间想象能力、综合运用知识的能力，同时还要注意总结解题、证题的一些思路、方法和技巧，努力提高分析问题和解决问题的能力。因此，总复习对每个毕业生今后的学习都有深远的影响，也是具有重要意义的一环。

很多同学面对学过的十来本教科书，一大堆数学概念、公式、定理和上千道数学题，感到复习无从下手。特别是今年，各科结课时间普遍较晚，而内容较过去又有所增加，所以越发感到时间紧、内容多，搞好复习不容易。怎么办呢？下面就这个问题谈谈我们的几点意见，供同学们复习时参考。

一　端正目的　明确要求

复习要有目的，要订出具体要求。这目的和要求要切合实际，有的放矢。同时，复习又不是简单的知识的重复学习，不是把学过的东西再从头念一遍，而是要突出重点，抓住关键，通过系统、概括、提高，从中得到一些新东西。特别是对综合能力的培养，复习起着尤为重要的作用。课是一节一节讲过来的，即使每节课都学得较好，也仍然缺乏纵观全局的观点，站得不高，眼界不宽，解决问题的方法也必然会受到限制，通过毕业复习要解决这个问题，因此，对复习就提出了较高的要求。

从内容上讲，通过复习要竭力沟通各个部分之间的内在联系，总结一些带规律性的东西，切不可读死书。

从方法上讲，通过复习要努力开阔自己的思路，提高灵活运用和综合运用的能力，切不可死记硬背。

另外，复习要重视对典型例题和习题的剖析，要力争做到，做一个通一片，由此及彼，举一反三，触类旁通。做题要认真，要有韧性。特别是对基础题要扎扎实实地去做，切不可轻视它，片面地追求难题。

总之，通过复习要作到系统知识，打开思路，提高解题能力。

二　紧扣教材　不离大纲

今年毕业班的同学是第一届使用新教材的毕业生，今年的高考，当然也要按新大纲的要求来进行（人民教育出版社编辑的《全日制十年制学校中学部分学科教学内容要点汇编》与教学大纲的要求是一致的），因此，新大纲是我们进行总复习的依据，它的具体体现是统编教材，所以，我们复习时，要紧扣教材，不离大纲。

这里需要注意的是，同学们在初中时，使用的是地方教材，而毕业总复习则要求以全国统编的数学课本为准。因此，对于初中时没学过的内容或原教材要求较低的部分，都要以新大纲和统编教材为准补齐。但对于解题、证题的方法，书写格式等可以灵活掌握，不必强求一致。

复习时，对教材中的重要性质、定理、公式、法则，不但要记住它的结论，更重要的是要理解它，并在理解的基础上加深记忆；此外，还要掌握每个重要性质、定理、公式、法则的作用以及它们的证明和推导过程所反映出来的思考方法和数学方法，并学会运用这些方法去解决其他数学问题，切不可死记硬背，生搬硬套。这既无助于记忆，也无益于提高解题和证题的能力。

以“三垂线定理”为例，同学们都知道它是立体几何的一个重要定理，但要问它究竟为什么重要，就不一定都能说得清楚。这对于理解、记忆和应用这个定理就是个障碍。大家都知道，立体几何是研究空间图形性质的一门学科，而对空间图形的研究又往往籍助于大家所熟知的平面图形的研究，而这种研究又是以线面关系、面面关系为基础的，然而，三垂线定理正是研究线面关系的一个非常重要的工具。从平面到空间（或从空间到平面）的问题中，一般是离不开三垂线定理（或逆定理）的。这就是三垂线定理能够广泛应用的原因。

再比如，对数换底公式的证明方法，它体现了指数与对数证明题中的常用的一个基本方法：指数式与对数式的互化，对指数式两端取对数，即

令 $x=\log_b N$，$N=b^x$，

$$\log_a N = x\log_a b,\quad \therefore\quad x=\frac{\log_a N}{\log_a b},$$

$$\therefore\quad \log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

如果掌握了这个方法，不但证明这个公式不会有什么困难，而且对指数与对数中的许多证明题都可以运用这个方法去解决。

另外，教材上的练习和习题体现了大纲的基本要求，同学们对这些题目所运用的基本方法和基本技能应熟练掌握。对课本上的复习题，也应力求掌握它，但不要就题论题，而要适当分类引伸，体会和掌握方法。例如在高中三册复习题四有关数学归纳法的题目中，除了运用数学归纳法证明的一些题目外，还有两个题是属于归纳求和的问题。这类题在教材内容中并未出现，而只做这两个题又难于掌握这种论证方法，所以可适当多做几个补充练习题，以便熟悉和掌握它。

大纲是复习的主要依据，它一方面明确提出了对同学们各种数学能力的要求，另一方面也具体规定了数学各分科的知识范围，因此，在复习中要高度重视它，要边复习、边逐条逐项对照落实，而不能离开大纲另搞一套。

三　寻找规律　沟通联系

中学数学共五个分科，概念多、公式多、定理多，同学们记忆起来就比较困难。然而我们也要看到数学的另一个特点：就是数学中的概念、公式、定理尽管很多，但彼此孤立存在的则很少，绝大部分是互相联系、互相依存的。所以复习时，应该紧紧抓住这个特点，揭示数学概念、公式、定理之间的内在规律，并利用这个规律加深理解，巩固记忆。例如，代数中函数部分概念较多，很多同学由于概念不清学习感到困难。其实中学数学所研究的几种函数无论从定义方法到研究方法，都有很多共同的地方。以定义方法为例，像二次函数是这样定义的：形如 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的函数叫做 x 的二次函数。依照这种定义方法自然应该有：形如 $y=kx+b$ 的函数叫 x 的一次函数；形如 $y=a^x$ 的函数叫做 x 的指数函数等等。这就是说，从定义方法来讲所有这些函数(包括三角函数)都是完全类似的，因此不用死记硬背这些定义。另外，从所研究的问题来说也基本类似。属于定义本身的有定义域、值域的问题，此外就是要研究诸如增减性，奇偶性，极值，周期性等一系列性质。教材上对图象的研究从某种意义上说是为研究函数的性质服务的。由此可见，尽管函数

概念多、涉及面广，但如果我们掌握了它们之间的内在规律，也就不会觉得它杂乱无章难以理解了。又如，三角学是公式较多的一个学科，但略分析一下会发现它主要有四组公式：一组是同角间的八个公式，它主要反映了三种关系，即属于倒数关系的有三个：

$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，　$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，

$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$；

属于比的关系的有两个：

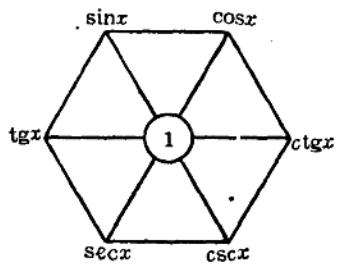
$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

属于平方关系的有三个：

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$，

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$。

利用下面的六边形能比较形象的表示出这八个关系式：用一句话来概括，即斜乘，颠除、平方和。



另一组是诱导公式，它是把任意角的三角函数通过终边相同的角的概念化到360°以内，再化成锐角的三角函数的重要工具。这组公式很多（写全了有54个），一个一个的记，很容易搞混，但这些公式的规律性很强，只要理解“竖变横不变，符号看象限”的意义就很容易记住了。

第三组是“加法定理”中的一套公式，这一组公式比较复杂，变化也较多，但通过分析可以发现，这组公式的基础是两角和的正、余弦公式，从这两个公式出发，可以推出其它一系列的公式。因此，要掌握这一组公式，只要记住两角和的正余弦公式，再根据这些公式间的内在联系，就可以由这两个公式推导出其他的公式。

第四组公式是正、余弦定理和三角形面积公式。这组公式较少，容易记忆，但其应用却非常灵活。比如正、余弦定理就是解三角形和解决涉及三角形的证明题的重要工具，需要在应用上下功夫。

再如，平面几何中定理较多，如果孤立地去背诵这些定理，那无论如何也背不过或背不全的。何况即使背过了也很难运用它呢！因此就需要摸索规律，寻找这些定理间的联系。比如圆幂定理就是由相交弦定理、割线定理、切割线定理组成，而这三个定理可视为由两条弦的交点在圆内、圆外，以及一条割线绕交点转动的特殊情况而构成。因此这些定理尽管形式上有某些不同，但实质是反映了一个东西，所以这些定理的证明方法及其作用非常类似。在等腰三角形中有一套关于底边上的中线是底边上的高和顶角的平分线定理，通常称之为“三合一定理”。这一套定理应用相当广泛，在涉及到等腰三角形的一些问题中，几乎无不用到它。这是因为这套定理有四个条件，只要已知任意两个条件就可以推出其他两个条件。实际上它不只是一个定理，而已构成一个定理组。同学们如果能把这些定理组成的规律搞清楚，那么就能比较熟练地掌握和运用这些定理了。总之，平面几何中尽管定理较多，但大部分是相依存在的，同学们复习时，要努力搞清楚它们之间的关系，存在条件，应用范围。这样就能较好地掌握这些定理了。

四　分类总结　概括提高

复习不同于日常学习，它要求在较短的时间里，把过去学过的知识系统、深化、巩固、提高。因此，在复习中通过概括总结，把问题类型化是非常必要的。不少同学在学习中存在就题论题或解题时盲目乱碰的现象，其原因之一是不注意将知识或习题分类，造成知识不系统，方法也不成套，解题

无章可循，因此解起题来自然心中无数．我们常说，学习要“触类旁通”，但如果连“类”都没触到，那就谈不到“旁通”，所以触类是旁通的前提．我们搞知识和习题分类正是为了摸索一点规律，寻找一套方法，力争做到“触类旁通”．比如，代数中不等式的内容分散在初一、初三、高二三个年级中学习，初学时这样分散是必要的，但在复习时就显得比较零乱．在复习时，我们可以把这一内容串起来成为一个单元，分为“证”、“解”、“论”三类问题，即按不等式的证明、解不等式、方程（或方程组）的讨论进行复习．这样做既便于综合、概括、突出其内在联系，又能节省时间提高复习效率．又如解析几何中求点的轨迹的问题，也可以作为一类，把求轨迹的一般方法如公式法、普通法、参数法、极坐标法等集中起来进行复习，还有些内容可以打破分科的界限，比如极值问题，就可以把五个分科中的这类问题集中到一起，作为一类进行复习．以上是按知识分类来复习．此外，复习时，还可以按解题方法把习题分类．但要注意习题分类的目的是为寻求解题技能中带规律性的东西，以便提高我们举一反三的能力，所以分类本身不是目的，重要的是总结规律寻找方法．下面我们用几组题来说明：

（一）关于实数的性质的应用

1．x、y 为实数，且 $x^2+y^2-12x+4y+40=0$，试求 $x\cos\left(\frac{-25\pi}{3}\right)+y\operatorname{tg}\left(\frac{-15\pi}{4}\right)$ 的值；

2．a、b、c 为实数，求证：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca;$$

3．若 $\lg(x^2+1)+\lg(y^2+4)=\lg 8+\lg x+\lg y$

求 $\lg x-\log_{\frac{1}{8}} y$

4．解方程组：

$$\begin{cases}5x^2+4y^2+3z^2=2yz+4xz+6xy\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

这一组题从形式上看似乎没有什么联系，但经过分析可以发现，这是一组以实数的平方非负这一性质为基础的综合练习题．事实上，第1题可以化成：

$$(x-6)^2+(y+2)^2=0;$$

第2题可以化成：

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0;$$

第3题可以化成：

$$(xy-2)^2+(2x-y)^2=0,$$

从而得方程组：

$$\begin{cases}xy=2,\\ 2x-y=2;\end{cases}$$

第4题可以化成：

$$\begin{cases}3(x-y)^2+(y-z)^2+2(x-z)^2=0,\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

（二）关于公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 的一组题

1．若 $a+b+c=0$，

求证：$a^3+b^3+c^3=3abc$；

2．若 a、b、c 为正实数，

求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$；

3．若 a、b、c 为正实数，

求证：$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$；

4．若三角形的三边 a、b、c 满足 $a^3+b^3+c^3=3abc$，则这个三角形是等边三角形．

这里第1题由公式可直接得到；第2题应用公式再参照（一）组中第2题也不难得到；第3题是第2题的直接结果；而第4题利用这个公式也容易证明．显然这是一组以这个公式为基础的题目．如果掌握了这组题的规律，解起来并不难，如果孤立地去解决某一个题，就不那么容易．所以，复习时，能把问题归类的应尽量归类，这样会收到触类旁通的效果．

（三）求下列各式的值

1. $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$；

2. $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$，

3. $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

$+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$；

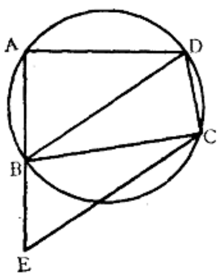
4. $\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}$；

5. $\mathrm{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\mathrm{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\mathrm{tg}\frac{3\pi}{7}$.

这一组题由易到难，由简到繁，互相紧密相关，用到的知识面也较广，如果不了解它们之间的变化规律，而单独做哪一个（特别是后两个）都会感到很困难。

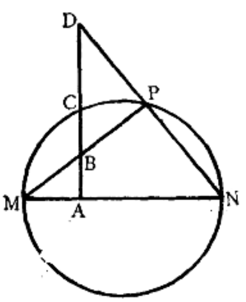
（四）关于平面几何成比例线段的一组证明题

1. 已知：四边形 $ABCD$ 的四个顶点共圆，过 C 作与 BD 平行的直线交 AB 延长线于 E.



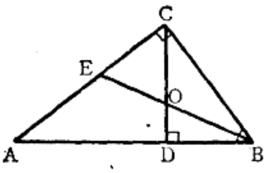
〔求证〕$BE\cdot AD=BC\cdot CD$.

2. 已知：MN 为圆的直径，P、C 为圆上两点，连 PM、PN，过 C 作 MN 的垂线与 MN，MP 和 NP 的延长线依次相交于 A、B、D.



〔求证〕 $AC^2=AB\cdot AD$.

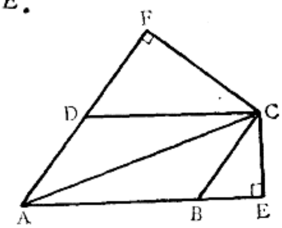
3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$. $\angle B$ 的平分线交 CD 于 O. 交 AC 于 E.



〔求证〕

$$\frac{OD}{OC}=\frac{EC}{EA}.$$

4. 已知：$ABCD$ 是平行四边形，$CF\perp AF$，$CE\perp AE$.



〔求证〕 $AC^2=AB\cdot AE+AD\cdot AF$.

这四个题是平面几何关于成比例线段的一组证明题。

第 1 题属基本类型，只要用下面的方法找出一对相似三角形即可：

$$BE\cdot AD=BC\cdot CD$$

故需连 AC 证 $\triangle BEC\backsim\triangle ADC$.

第 2、3 题不是基本类型，需要经过转化后才能找到相似三角形。转化的方法可以通过等式、等量以及比式转化。

如第 2 题只要用 $MA\cdot AN$ 代替 AC^2，就可以变成第 1 题类型，第 3 题把 $\frac{OD}{OC}$ 换成 $\frac{DB}{BC}$，$\frac{EC}{EA}$ 换成 $\frac{BC}{AB}$，原式化成证 $\frac{DB}{BC}=\frac{BC}{AB}$，这是基本类型，很容易证明。

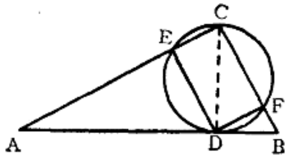
第 4 题较复杂但通过转化也可以化成基本类型，同学们可以自己试试看。

五　熟悉一般　学点技巧

所谓一般的思考方法，是指我们看到问题以后，有一套针对某一类问题的特定的思考方法。比如，见到分式方程就要想到去分母；证明不等式，应首先考虑综合、分析、比较三个基本方法；又比如在平面几何中，见到等腰三角形就应想到“三合一定理”；

见到直角三角形，就要想到"勾股定理"、"斜边上的中线是斜边之半定理"、"30°角所对的直角边是斜边之半定理"以及一套射影定理等等。凡符合一般思考方法的应要求作到"用得熟，下手快"。当然，并不是所有题目用一般思考方法都能解决的，也有的问题，虽然能用，但方法复杂，遇到这种情况就要分析题目的特点，寻找解决问题的特殊方法即技巧。请看下面的几个题目：

〔例1〕 设 $CEDF$ 是一个已知圆的内接矩形，过 D 点作该圆的切线与 CE 的延长线相交于点 A，与 CF 的延长线相交于 B 点，求证：$\dfrac{BF}{AE}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$。



这个题目的证法很多，我们介绍一个基本的思考方法：因为等式右端是 $\dfrac{BC}{AC}$ 的立方式，所以可找出与 $\dfrac{BC}{AC}$ 相等的所有比式，然后三、三相乘。事实上与 $\dfrac{BC}{AC}$ 相等的比式有以下几个：

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle DBF$，

$\therefore$ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BF}{DF}$ (1)

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$，

$\therefore$ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DE}{AE}$ (2)

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle DCE$，

$\therefore$ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EC}{ED}$ (3)

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle CDF$，

$\therefore$ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DF}{CF}$ (4)

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$，

$\therefore$ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CD}{AD}$ (5)

$\because$ $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$，

$\therefore$ $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{DB}{CD}$ (6)

显然，(1)～(6)中，任选三式将左端相乘都可以得到 $\dfrac{BC^3}{AC^3}$，而右端的三式相乘的结果，分子应有 BF，分母应出现 AE。但(1)式右端的分子为 BF，(2)式右端的分母是 AE，因而所选的三式中应包含(1)、(2)式，这样，再从余下的四个等式中任选一个即可。事实上，(1)×(2)×(3) 和 (1)×(2)×(4) 都可以直接得到要证的结论；(1)×(2)×(5) 和 (1)×(2)×(6) 经过简单的变换后，也能得到要证的结论。所以，从这个基本思路出发，可以很自然地找到此题的多种证法。

同学们请按照这个一般思路，证明下列问题：

1. 过 $Rt\triangle$ 的直角顶点 C，作 $CD\perp AB$，再以 AD 为直径画圆，使和 AC 交于 E 点，

〔求证〕$\dfrac{AE}{CE}=\dfrac{AC^2}{BC^2}$。

2. 过 $\triangle ABC$ 的顶点 A，作它的外接圆的切线交 BC 的延长线于 D。

〔求证〕 $\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{\sin^2\angle ABC}{\sin^2\angle ACB}$。

3. 圆内接 $\triangle ABC$，过 B、C 引圆的切线，再过 A 引这二切线的平行线 AE、AD 交 BC（或 BC 的延长线）于 E、D，

〔求证〕$\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$。

一般的思考方法不一定只有一个，也可能有两个或多个。如：

〔例2〕 已知 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$，

〔求证〕$3ab-2ac-bc=0$。

处理指数式（或对数式），通常有两个基本思考方法，一个是取对数（或对数式化为指数式）；另一个是指数比较。比如，此题化成两个等式后，就可以用取对数或指数

比较进行证明。

原式可化成：

$$2^{6a}=6^{2c} \quad (1)$$

$$3^{3b}=6^{2c} \quad (2)$$

(1)、(2)两端取对数，得

$$6a\lg2=2c\lg6\Rightarrow 6ab\lg2=2bc\lg6 \quad (3)$$

$$3b\lg3=2c\lg6\Rightarrow 6ab\lg3=4ac\lg6 \quad (4)$$

(3)+(4)，得

$$6ab(\lg2+\lg3)=(2bc+4ac)\lg6,$$

$$\therefore\quad 3ab-2ac-bc=0.$$

如果采用指数比较的方法，关键是化成同底：由(1)、(2)，得

$$2^{6ab}=6^{2bc} \quad (3)'$$

$$3^{6ab}=6^{4ac} \quad (4)'$$

(3)′×(4)′，得

$$6^{6ab}=6^{4ac+2bc},$$

$$\therefore\quad 6ab=4ac+2bc,$$

即 $\quad 3ab-2ac-bc=0.$

用这个方法可以很容易地证明下面的问题，请同学们试试看。

1．已知 $2\cdot5^x=1000$，$0.25^y=1000$，

〔求证〕 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$；

2．已知 $2^x=5^y=10^z$，

〔求证〕 $z=\dfrac{xy}{x+y}$；

3．已知 $2^a\cdot5^b=2^c\cdot5^d=10$，

〔求证〕 $(a-1)(d-1)$
$=(b-1)(c-1)$。

上面的例子说明，数学中有不少问题按照人们的一般思路都可以解决，但这并不是说，所有问题都符合人的正常思路，这里大体可分三种情况：

一种情况是应用一般方法显然不能求解的；一种情况是题目本身有明显特征的；还有一种情况是用通常的方法太麻烦的。但应该注意，所谓技巧并不是绝对的，它有时恰好是基本方法的熟练运用，平常所说的“熟能生巧”就是这个道理。

〔例3〕 解方程：

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x.$$

这是个无理方程，按一般的思考方法是方程两边平方，去根号化成有理方程求解。但实际上，直接用两边平方的办法去根号很困难，因此我们考虑用特殊方法解决。事实上，如果我们令 $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=u$，则 $2\sqrt{x^2+7x}=u^2-2x-7$，于是方程可化成 $u^2+u-42=0$，从而问题可解。

〔例4〕 求证：

$$\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

证三角恒等式有一个基本思考方法，即统一角度和化同名函数（一般要化成正、余弦）。但如果我们注意到左、右两端的角与三角函数式的特点就会发现左端的两个角 3α、α 是右端两角 2α、α 的和与差，因此，我们可以把等式左端化成：

$$\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(2\alpha-\alpha),$$

然后将右端展开后相乘即可。

〔例5〕 若 A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角，

〔求证〕 $\operatorname{tg}^2\dfrac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{C}{2}\geqslant1.$

这是一个三角不等式的题目，如果按照证不等式和化三角函数式的一般方法去考虑，不容易下手。但如果我们熟悉代数不等式

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca,$$

那么很快就能证出这个不等式。事实上，

$$\because\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}>0,\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}>0,\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}>0,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}&\geqslant\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\\&\quad+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}\\&=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\\&=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\end{aligned}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\frac{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\times\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=1.$$

∴ 原不等式成立。显然，熟悉不等式

$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

是证明这个题的关键。然而不等式

$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$

却体现了不等式证明的基本方法，这是同学们所应该熟知的。

总之，同学们在复习时，要注意掌握解题的各种基本方法，力争做到"熟"，进一步作到掌握各种题的基本类型，最后作到"成套"。基本的搞熟了，并成了套，如果再学点技巧，这就有了坚实的基础。下一步就可以在综合运用方面多下些功夫了。

六 加强分析 注意综合

综合题常常涉及数学的不同分支或同一分支的多个方面的知识，要应用多方面的知识和技巧才能解决，其难度一般超过基本训练题。这种题有助于我们将所学的数学知识触会贯通，起到复习、提高的作用，也有利于沟通不同部分的知识和方法，培养综合运用知识的能力。

怎样解数学综合题呢？综合题千变万化，解法灵活，没有一定之规，但要解好综合题，大体应注意以下几点：

1．要弄清题目涉及的有关概念，熟悉它涉及的数学分支的常用定理、公式、方法、技巧。也就是说，必须以一定的基本训练为基础；

2．要剖析综合题的结构，找出题目的主要环节和次要环节，弄清它们之间的相互关系，还要会把综合题"肢解"为若干基础题；

3．推测、尝试可能的解题途径，若题中条件隐晦、迂回因而看不清解题途径时，应设法创造条件，化暗为明；

4．深入研究范例，比较范例与题目的异同，以达到触类旁通的目的。

下面举例说明：

（一）代数在三角中的应用

代数中的恒等变形、方程与不等式、函数、数列与极限等知识和方法经常用于解决三角学证明恒等式、求值以及解三角方程等问题，因此，在复习时，应充分注意沟通代数与三角部分的知识和方法。

1．代数的恒等变形在三角中的应用

〔例1〕 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$，求$16(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$的值。

〔解〕 把 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$两边平方，得

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4},$$

即 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$。

$$\therefore 16(\sin^3\theta+\cos^3\theta)=16[(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)]$$

$$=16\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]$$

$$=16\left(\frac{1}{8}+\frac{9}{16}\right)=11.$$

2．方程与不等式在三角中的应用

〔例2〕 方程

$$(2\cos\alpha-1)x^2-4x+2(2\cos\alpha+1)=0$$

具有两个不等正根，求锐角α的取值范围。

〔解〕∵方程有二不等正根，∴$\triangle>0$，

即 $(-4)^2-4(2\cos\alpha-1)\times2(2\cos\alpha+1)>0$ (1)

二根之和$=\frac{4}{2\cos\alpha-1}>0$ (2)

二根之积$=\frac{2(2\cos\alpha+1)}{2\cos\alpha-1}>0$ (3)

解(1)、(2)、(3)组成的不等式组，得

$$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{3}.$$

1980年全国高考试题第八题就是不等式

在三角上应用的一个题目。

3. 函数在三角中的应用

〔例3〕 设 $f(x)$ 是二次函数，且有 $f(\sin x)+f(\cos x)=0$，$f(0)=1$，求 $f(x)$ 的表达式。

〔解〕 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则

$$f(\sin x)+f(\cos x)$$
$$=(a\sin^2x+b\sin x+c)$$
$$+(a\cos^2x+b\cos x+c)$$
$$=a+b(\sin x+\cos x)+2c$$

$\because f(\sin x)+f(\cos x)=0$，$\therefore$ 上式只有当 $b=0$，$a+2c=0$ 时才成立。$\therefore a=-2c$。又 $\because f(0)=1$，$\therefore c=1$。于是 $a=-2$。

$\therefore\quad f(x)=-2x^2+1$。

4. 数列在三角中的应用

〔例4〕 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\sin(B+C-A)$、$\sin(C+A-B)$、$\sin(A+B-C)$ 成等差数列。

〔求证〕 $\mathrm{tg}A$、$\mathrm{tg}B$、$\mathrm{tg}C$ 也成等差数列。

〔证〕 由题设可得 $2\sin(C+A-B)=\sin(B+C-A)+\sin(A+B-C)$。

即 $\quad 2\sin[2(A+C)-\pi]$
$$=2\sin B\cos(C-A),$$
$$-2\sin[2(A+C)]$$
$$=2\sin(A+C)\cos(A-C),$$
$$-4\sin(A+C)\cos(A+C)$$
$$=2\sin(A+C)\cos(A-C).$$

$\because\ \sin(A+C)\neq0$，上式两边可同除以 $2\sin(A+C)$，化为

$$-2\cos(A+C)=\cos(A-C).$$

就是 $\quad -2(\cos A\cos C-\sin A\sin C)$
$$=\cos A\cos C+\sin A\sin C$$

$\therefore\quad 3=\mathrm{tg}A\,\mathrm{tg}C$

$3\mathrm{tg}B=\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}B\cdot\mathrm{tg}C=\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}B+\mathrm{tg}C$。

$\therefore\quad 2\mathrm{tg}B=\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}C$，结论得证。

5. 多种代数知识在三角中的应用

〔例5〕 已知 $\lg2=0.3010$，试求 $\lg1000+\lg(1000\cos60^\circ)+\lg(1000\cos^260^\circ)+\cdots+\lg(1000\cos^{n-1}60^\circ)+\lg(1000\cos^n60^\circ)+\cdots$ 前多少项的和为最大？

〔解〕 原数列可化为

$$\lg1000+(\lg1000+\lg\cos60^\circ)+(\lg1000+\lg\cos^260^\circ)+\cdots+(\lg1000+\lg\cos^{n-1}60^\circ)$$
$$+\cdots=3+\left(3+\lg\frac{1}{2}\right)+\left(3+2\lg\frac{1}{2}\right)+\cdots$$
$$+\left[3+(n-1)\lg\frac{1}{2}\right]+\cdots$$
$$=3+(3-\lg2)+(3-2\lg2)+\cdots$$
$$+[3-(n-1)\lg2]+\cdots$$

显然，这是等差数列，公差 $d=-\lg2$。因此，到某项之后必然出现负数。只要把这个数列的所有正项都加起来，它的和就是最大的了。

现假设第 n 项为最后一个正项，则第 $n+1$ 项就是第一个负项，可得

$$\begin{cases}3-(n-1)\lg2>0,\\3-n\lg2<0.\end{cases}$$

$$\text{解之得}\begin{cases}n<\dfrac{3+\lg2}{\lg2}\approx10.9,\\[2mm] n>\dfrac{3}{\lg2}\approx9.9.\end{cases}$$

$\because n$ 为自然数，$\therefore n=10$，即这个数列的前10项和为最大。

（二）代数在几何中的应用

把代数知识应用于几何，有时可以使几何问题易于解决，而还有些几何问题必须借助代数知识才能解决。

1. 恒等变形在几何中的应用

〔例6〕 已知 $\triangle ABC$ 的三条高线分别为 h_a、h_b、h_c，r 为其内切圆半径，且 $h_a+h_b+h_c=9r$。证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形。

〔证〕 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，三边分别为 a、b、c，由 $h_a=\frac{2S}{a}$，$h_b=\frac{2S}{b}$，$h_c=\frac{2S}{c}$ 可得

$$h_a+h_b+h_c=2S\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\quad(1)$$

又　$S=\frac{r}{2}(a+b+c)$，　(2)

由已知 $h_a+h_b+h_c=9r$ 及(1)、(2)，得

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9.$$

即　$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b-6abc=0$，

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2=0.$$

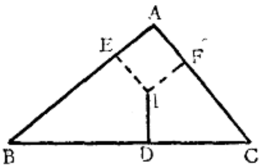
∵　$a>0$、$b>0$、$c>0$。

∴　$(b-c)^2=0, (c-a)^2=0, (a-b)^2=0$。

∴　$a=b=c$，即△ABC为等边三角形。

2．方程（组）在几何中的应用

〔**例7**〕　如图，设I为△ABC的内心，$ID\perp BC$，$AC\cdot AB=2BD\cdot DC$，



〔**求证**〕　$\angle A=90°$。

〔**证**〕　作$IE\perp AB$，$IF\perp AC$，a、b、c分别表示三角形的三边，且$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则$BD=S-b$，$DC=S-c$，$AC=b$，$AB=c$。由已知可得

$$bc=2(S-b)(S-c),$$
$$2S^2-2(b+c)S+bc=0.$$

解之，得 $S=\frac{b+c\pm\sqrt{b^2+c^2}}{2}$

但 $S=\frac{a+b+c}{2}>\frac{b+c}{2}$，

所以 $S=\frac{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}{2}$。

即　$\frac{a+b+c}{2}=\frac{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}{2}$。

于是 $a^2=b^2+c^2$，∴ $\angle A=90°$。

3．代数求极值的方法在几何中的应用

常用的方法有两个：(1) 函数 $y=ax^2+bx+c$ 当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$（$a>0$为最小值，$a<0$为最大值）；

(2) 对于正数 x_1、x_2、x_3，由公式$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$可得，若它们的和$x_1+x_2+x_3$为定值，则当$x_1=x_2=x_3$时，它们的积$x_1x_2x_3$有最大值，简称“和一定，积最大”；若它们的积$x_1x_2x_3$为定值，则当$x_1=x_2=x_3$时，它们的和$x_1+x_2+x_3$有最小值，简称“积一定，和最小”。

〔**例8**〕　扇形的周长为定值，试问该扇形具有怎样的中心角时，面积最大？

〔**解**〕　设此扇形的周长为l，半径为r，圆心角为α，面积为S。则由题意有

$$\begin{cases} l=2r+\alpha r, \\ S=\frac{1}{2}\alpha r^2. \end{cases}$$

可得 $S=\frac{1}{2}r(l-2r)=-r^2+\frac{1}{2}lr$。

∵ $a<0$，∴ S有最大值，当

$$r=-\frac{\frac{1}{2}l}{2(-1)}=\frac{l}{4}\text{时，}S\text{ 最大，}$$

此时 $\alpha=\frac{l-2r}{r}=\frac{l-\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}}=2$。

∴当扇形周长取定值，中心角为2弧度时，它的面积最大。

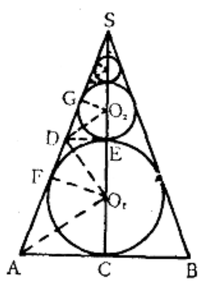
〔**另法**〕　此题当求得$S=\frac{1}{2}r(l-2r)$后可将其变形为$S=\frac{1}{4}\cdot 2r(l-2r)$。

∵$2r+(l-2r)=l$是一个定值，

∴当$2r=l-2r$即$l=4r$时乘积$2r(l-2r)$有最大值，以下各步同上法。

4．数列与极限知识在几何中的应用

〔**例8**〕　在底面半径为R，母线和底的夹角为α的一个圆锥内有上下一系列的内切球。第一个球切于圆锥的底



面和侧面。其余各球顺次切于前一个球和圆锥侧面。若这些球的个数无限增加，求所有这些内切球的体积。

〔解〕 上图为圆锥及其内切球的轴截面，则 $\angle SAB=\alpha$，$AC=R$。

设自下而上一系列的内切球之球心和半径分别为 O_1，O_2、$O_3\cdots$ 和 r_1、r_2、$r_3\cdots$，ED 为球 O_1 和球 O_2 的切线，连结 O_1A、O_1F、O_1D，在 $Rt\triangle O_1CA$ 中，

$$\because \angle O_1AC=\frac{\alpha}{2},\qquad \therefore\ r_1=R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

在 $Rt\triangle O_1DE$ 中，$\because A$、C、O_1、F 共圆，

$\therefore\ \angle FO_1E=\angle FAC=\alpha$，

$\angle DO_1E=\dfrac{\alpha}{2}$，$DE=r_1\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=R\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$。

在 $Rt\triangle O_2DE$ 中，$\because ED/\!/AC$，

$\therefore \angle GDE=\angle SAC=\alpha$，$\angle O_2DE=\dfrac{\alpha}{2}$。

$$\therefore\ r_2=DE\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=R\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

同理 $r_3=R\operatorname{tg}^5\dfrac{\alpha}{2}$，$r_4=R\operatorname{tg}^7\dfrac{\alpha}{2}$，$\cdots$，

$$\therefore\ V_1+V_2+V_3+\cdots$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^{12}\frac{\alpha}{2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{1-\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2}}$$

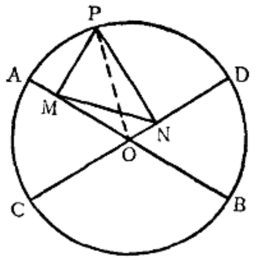
$$=\frac{4\pi R^3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{3\left(1-\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

（三）三角在解决几何问题中的作用

三角函数是用有关线段的数量比来反映角的大小关系的，而在几何图形中，往往是以不同的形式出现各种边角关系，所以用三角方法解决几何图形中的问题，有时会带来很多方便。

1．由三角函数的定义，解决几何题中线段和角的关系问题

〔例 9〕 设 AB 和 CD 为 $\odot O$ 的两条定直径，P 为圆周上任一点，$PM\perp AB$ 于 M，$PN\perp CD$ 于 N，〔求证〕MN 为定长。



〔证〕 $\because \angle PMO=\angle PNO=90°$，

$\therefore P$，M、O、N 四点共圆。

$$\therefore\ MN\cdot OP=OM\cdot NP+ON\cdot MP.$$

设 $\odot O$ 的半径为 r，$\angle AOD=\alpha$，$\angle AOP=\theta$，于是上式化为 $MN\cdot r$

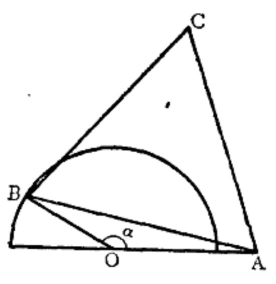
$=r\cos\theta\cdot r\sin(\alpha-\theta)+r\cos(\alpha-\theta)\cdot r\sin\theta$。

$$\therefore\ MN=r[\cos\theta\sin(\alpha-\theta)+\cos(\alpha-\theta)\sin\theta]=r\sin\alpha.$$

$\because r$、α 都是定值，$\therefore MN$ 为定长。

2．应用正弦定理或余弦定理解决几何问题

〔例10〕 半圆 O 的直径为 2，A 为直径延长线上一点，且 $OA=2$，B 为半圆上任一点，以 AB 为一边作等边三角形 ABC。问 B 在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大？



〔解〕 如图，$S_{OACB}=S_{AOB}+S_{ABC}$

$$=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$$

$$=\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2.$$

由余弦定理，

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\alpha$$
$$= 5 - 4\cos\alpha.$$

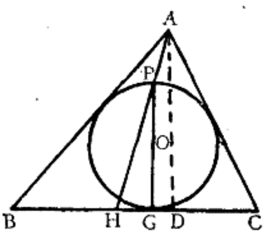
$$\therefore S_{OACB} = \sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}(5 - 4\cos\alpha)$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{4} + 2\sin(\alpha - 60°).$$

而 $\sin(\alpha - 60°)$ 的最大值为1，此时 $\alpha - 60° = 90°$. $\alpha = 150°$. $\therefore$ 当 $\angle AOB = 150°$ 时四边形 $OACB$ 面积最大。

3. 应用三角形的面积公式解决几何问题

〔例11〕 如图，$\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，G 为切点，GP 为直径，AP 交 BC 于 H。求证 $BH = GC$。



〔证〕 设 $\triangle ABC$ 的三边分别为 a、b、c，S 为半周长，$\triangle$ 为面积。

作 $AD \perp BC$，则 $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot CD$。

因而 $$CD = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$GC = S - c = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

$$\therefore GD = GC - CD = \frac{(b-c)(a-b-c)}{2a}.$$

$$\because \quad PG // AD, \ \therefore \frac{HG}{GD} = \frac{2r}{h_a - 2r}$$

$$= \frac{\dfrac{2\triangle}{S}}{\dfrac{2\triangle}{a} - \dfrac{2\triangle}{S}} = \frac{a}{S - a} = \frac{-2a}{a - b - c},$$

$$HG = -\frac{2a}{a - b - c} \cdot \frac{(b-c)(a-b-c)}{2a}$$
$$= c - b.$$

但 $BG = S - b = \frac{1}{2}(a - b + c)$

$$\therefore \quad BH = BG - HG = \frac{1}{2}(a + b - c) = GC.$$

4. 应用三角函数的恒等变形解决几何问题

〔例12〕 若三角形的三边成等差数列，且其最大角与最小角之差为 $90°$，试证这个三角形三边的比为

$$(\sqrt{7}+1) : \sqrt{7} : (\sqrt{7}-1).$$

〔证〕 $\because$ 三边成等差数列，$\therefore$ 可设三边为 a、$\frac{a+c}{2}$、c，又 $\because$ 最大角与最小角之差为 $90°$，$\therefore$ 可设最大角为 $90° + \alpha$，最小角为 α，则中间角为 $90° - 2\alpha$。

由正弦定理，$\dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{a+c}{2\cos 2\alpha} = \dfrac{c}{\sin\alpha}$，

由合比定理，$\dfrac{a+c}{2\cos 2\alpha} = \dfrac{a+c}{\cos\alpha + \sin\alpha}$，

$\therefore \quad 2\cos 2\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha$。

上式两边平方，整理，得

$$4\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha - 3 = 0.$$

$\therefore \quad \sin 2\alpha = \dfrac{3}{4}$

或 $\sin 2\alpha = -1$（不合题意，舍去）。

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}+1}{4}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{7}-1}{4}.$$

$$\therefore \quad a : \frac{a+c}{2} : c = \cos\alpha : \cos 2\alpha : \sin\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{7}+1}{4} : \frac{\sqrt{7}}{4} : \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$
$$= (\sqrt{7}+1) : \sqrt{7} : (\sqrt{7}-1).$$

5. 应用三角知识求几何中的轨迹问题

〔例13〕 两个顶点固定，另一顶点不断变化的动三角形，无论怎样动总满足条件 $S(S-a) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}bc$，（$S$ 为周长之半，a 为定边长，b、c 为两动边长）。求动点 A 的轨迹.

〔解〕 由 $S(S-a) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}bc$ 可得

$$\frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}bc,$$

$$(b+c)^2-a^2=(2+\sqrt{3})bc,$$

整理得$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

又由余弦定理 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A$。

$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because 0<A<180°$，

$\therefore \angle A=30°$。

$\therefore$ A 点的轨迹是以 a 为弦，所对圆周角为 30° 的两个大圆弧。

（四）三角在解决代数问题上的作用

复数问题一般化为三角形式解决较简单，还有些代数问题，用变量替换化为三角问题解决也比较简单。常用到的变量替换是，在代数中出现形如$\sqrt{x^2+1}$可设

$$x=\mathrm{tg}\alpha \text{ 或 } x=\mathrm{ctg}\alpha;$$

形如$\sqrt{x^2-1}$可设 $x=\sec\alpha$ 或 $x=\csc\alpha$；

形如$\sqrt{1-x^2}$可设 $x=\sin\alpha$ 或 $x=\cos\alpha$；

形如$\frac{2x}{1-x^2}$、$\frac{2x}{1+x^2}$、$\frac{1-x^2}{1-x^2}$，都可设

$$x=\mathrm{tg}\alpha \text{ 或 } x=\mathrm{ctg}\alpha.$$

〔例14〕 求方程 $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$ 的实数根。

〔解〕 此题若按代数的常规方法做，会出现一个四次方程，不易解出，但因其有三角公式的外形$\sqrt{x^2-1}$（$\sqrt{\sec^2\alpha-1}=|\mathrm{tg}\alpha|$，故应用变量替换化为三角问题来解可使问题化难为易。

由方程显然有 $x>1$，故可令 $x=\sec\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$。则 $\sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}\alpha$，于是原方程变为

$$\sec\alpha+\frac{\sec\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{35}{12}.$$

解之得 $\sin2\alpha=\frac{24}{25}$，

$\sin2\alpha=-\frac{24}{49}$（不合题设，舍去）

解 $\sin2\alpha=\frac{24}{25}$，考虑到 α 为锐角，得

$$\cos\alpha_1=\frac{4}{5},\quad \cos\alpha_2=\frac{3}{5}.$$

$\therefore$ $x_1=\sec\alpha_1=\frac{5}{4}$，$x_2=\sec\alpha_2=\frac{5}{3}$。

经检验$x_1=\frac{5}{4}$，$x_2=\frac{5}{3}$为原方程的解。

〔例15〕 解不等式

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1-x^2}{1+x^2}>0$$

若用去分母来解此题，则较复杂。题中因含有$\sqrt{1+x^2}$的形式，故可设 $x=\mathrm{tg}\alpha$，解得 $x>-\frac{\sqrt{3}}{3}$（读者可自己完成）。

（五）几何图形在解决代数和三角问题中的作用

几何图形能把代数与三角中的许多问题直观地表示出来，这不仅使抽象的数量关系得到直观的说明，而且也使有些问题由难变易。

1. 利用几何图形表示方程（组），不等式（组）的解。

〔例16〕 解方程 $x^2=2^x$。

作出抛物线 $y=x^2$ 与指数函数曲线 $y=2^x$，两条曲线的交点即为方程的解（图略）。

又如解方程 $\cos x=x$，解方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ xy=4 \end{cases}$$

等都可借助几何图象来解。

〔例17〕 解不等式组

$$\begin{cases} y-x+1>0, \\ 2x-y-3>0. \end{cases}$$

〔解〕 对 y 解不等式，得

$$y>x-1 \text{ 与 } y<2x-3.$$

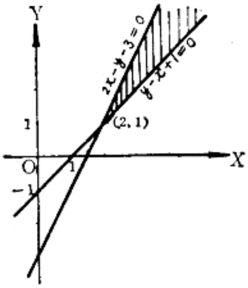
因此 $x-1<y<2x-3$。

$\therefore\quad x-1<2x-3,\ x>2.$

∴原不等式组的解是

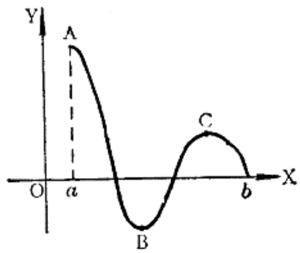
$$\begin{cases} x>2, \\ x-1<y<2x-3. \end{cases}$$

它的几何解释如下图中阴影部分。



2. 借助几何图象求函数的极值

例如，设 $y=f(x)$ 是定义在$[a,b]$上函数，其图象如图，由图形很容易看出，B、C



是极值点，而 A 为函数的最大值，B 点为函数的最小值。

3. 利用几何图形可以直观地解释集合运算。

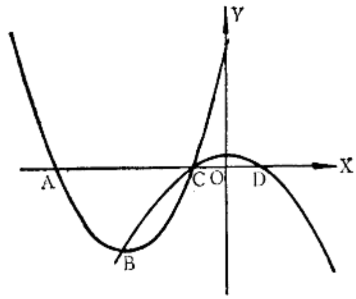
例如，集合的分配律，摩根公式等等。

4. 利用几何图象可以研究函数的性质以及确定函数的解析式。

例如，利用指（对）数函数的图象研究指（对）数函数的性质等。

〔例18〕 如图，抛物线 $y=ax^2+2bx+c$ 和 $y=(a+1)x^2+2(b+2)x+(c+3)$ 中的一条通过 A、B、C 三点，另一条通过 B、C、D 三点。

(1) 问哪一个函数解析式所表达的图象经过 A、B、C 三点？



(2) 求点 B、C 的横坐标；

(3) 若 $|AB|=|BC|$，$|CO|=|OD|$，求 a、b、c 的值。

〔解〕 (1) ∵ 通过点 A、B、C 的抛物线开口向上，通过点 B、C、D 的抛物线开口向下，所以 a 与 $a+1$ 必是异号，则必有 $a<0$，$a+1>0$。

因此 $y=(a+1)x^2+2(b+2)x+(c+3)$ 通过 A、B、C。

(2) 解方程组

$$\begin{cases} y=ax^2+2bx+c \\ y=(a+1)x^2+2(b+2)x+(c+3) \end{cases}$$

得 $x_1=-3$，$x_2=-1$

∴ B、C 的横坐标分别为 -3，-1。

(3) 由 $|AB|=|BC|$ 及抛物线的对称性可知 A 点的坐标为$(-5,0)$。又由于$|OC|=|OD|$及抛物线的对称性可知 D 点的坐标为$(1,0)$。 ∵ 抛物线 $y=ax^2+2bx+c$ 通过 C、D 两点，∴ $C(-1,0)$、$D(1,0)$ 适合方程

$$y=ax^2+2bx+c.$$

将 C、D 代入上方程得 $a+c=0$，$b=0$。

又 ∵ 抛物线 $y=(a+1)x^2+2(b+2)x+(c+3)$ 通过 $A(-5,0)$，

∴ $25(a+1)-10(b+2)+c+3=0$。

把 $b=0$，$a+c=0$ 代入后得

$$a=-\frac{1}{3},\ b=0,\ c=\frac{1}{3}.$$

（六）代数、几何、三角的综合应用

〔例19〕 K 取何值时，直线 $y-1=$