普通高等教育“十五”国家级规划教材

3

工科数学分析基础

(第二版)(上册)

王绵森　马知恩　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

工科数学分析基础

（第　二　版）

上　　册

王绵森　马知恩　主编

高等教育出版社

内容提要

本书第一版是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果,是面向21世纪课程教材和教育部工科数学学科"九五"规划教材,普通高等教育"九五"国家级重点教材,曾获教育部2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖。第二版被列入普通高等教育"十五"国家级规划教材,分上、下两册出版。第1—4章为上册,主要内容为一元微积分与无穷级数;第5—8章为下册,主要内容为多元函数微积分,常微分方程组,无限维分析入门。

本书在保持第一版编写特色的基础上,根据几年来的教学实践经验,进行了相应的修订。精简了一些次要内容,适当降低了某些内容的难度,同时对部分内容进行了改写,增加了一些应用,使得本书思路更加简明,更加符合认识规律,更易于读者接受。在习题的选配上,仍然分为A、B两类,并配有综合练习题,删去了一些难题,增加了一些基本训练题,并在书末附有习题答案与提示。

本书可作为高等理工科院校的非数学类专业本科生教材,也可供其他专业选用和社会读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础. 上册 / 王绵森, 马知恩主编,
2版.—北京:高等教育出版社,2006.2
ISBN 7-04-018750-7

Ⅰ.工…　Ⅱ.①王…②马…　Ⅲ.数学分析-高等学校-教材　Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第159757号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 宋瑞才　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 尹　莉
版式设计 马静如　**责任校对** 胡晓琪　**责任印制** 韩　刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
		版　　次	1998年11月第1版
开　　本	787×960　1/16		2006年2月第2版
印　　张	23.25	印　　次	2006年2月第1次印刷
字　　数	430 000	定　　价	24.40元

物料号　18750-00

第二版前言

本书第一版于1998年出版以来，受到了有关专家和教师的广泛关注，很多兄弟院校将本书作为相关课程的教材。该书于2001年获“中国高等学校科学技术一等奖”，2002年又获“国家优秀教材一等奖”，并被列入高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”中的精品项目。为了进一步提高教材的质量，我们总结了几年来的教学经验，广泛听取了专家、使用过该书的教师和学生的意见，对第一版进行了认真的修改。本次修改是在保持第一版的框架结构和主要特色的基础上进行的，主要修改之处如下：

1. 精简了一些次要内容，适当降低了某些内容的难度。例如：将第一章的前两节合并为一节，删去了某些枝节问题，以加深对函数概念的理解为主线改写了映射的有关内容；删去了闭区间套定理、凸函数的一个等价命题、第一型面积分用双参数表示的一般计算公式、常微分方程中的可积组合与首次积分；在积分存在的条件下证明第一型曲线积分的计算公式；多元数量值函数微分学中的有关问题在重点讲清二元情形后再推广到多元；重写了向量值函数的导数与微分的内容，通过其分量来定义它的导数与可微性；某些内容改用异体字排版供读者选学等。

2. 根据几年来使用该书的教学实践经验，对部分内容进行了改写，使思路更加简明，更加符合认知规律，更易于为读者接受。例如：将一阶微分方程中的可分离变量和线性方程作为两种基本类型，其余类型作为可通过变量代换化为这两种基本类型的方程；删去函数列的一致收敛性，直接讲解函数项级数的一致收敛性；在讲解有重要应用的一元向量值函数的导数与微分的基础上，推广到二元和多元；对向量值函数的链式法则以及由方程组所确定的隐函数求导法也采用由特殊到一般的方法，重点放在低维情形；极坐标下二重积分化为二次积分，先用比较形象的无限累加的思想来讲解；对某些定理或公式的证明也以便于接受的需要作了改写或补充等。

3. 从应用的需要出发，添加了少量内容。例如：多元函数的等值线与等值面及其在函数的几何表示、梯度和Lagrange乘数法中的应用；线性微分方程组稳定性判定（工程中常用）；增加了少许应用性例题、习题和综合练习题等。

4. 删去了一些难题，增加了一些基本训练习题。

5. 对文字叙述作了进一步加工，改正了一些错误和不确切之处。

几年来，许多专家、多次使用过本书的兄弟院校和西安交通大学的教师与学生通过口头和书面等多种形式对第一版提供了宝贵的意见，这些意见对提高本书的质量起到了非常重要的作用。在此，我们真诚地向他们表示衷心的感谢！恳请他们对第二版继续提出批评和修改意见。

参加本次修订工作的有马知恩、王绵森、魏战线、武忠祥、常争鸣和徐文雄。

编　者

2005 年 10 月于西安交通大学

第一版前言

本书是按照原国家教委面向21世纪教学改革立项项目《工科数学教学内容和课程体系改革的研究与实践》的要求编写的一本改革教材，面向重点院校对数学要求较高的理工科非数学类专业。旨在传授数学知识的同时，着力于提高读者的数学素养和能力，为读者在今后工作中更新数学知识，学习现代数学方法奠定良好的基础，培养读者应用数学知识解决实际问题的意识、兴趣和能力。与现行的同类教材相比，本书力求突出以下几个特点。

1. 拓宽和加强数学基础。当代科学技术的发展对数学知识的需求越来越广、越来越深、越来越现代化。在21世纪攀登科技高峰的各个领域的带头人和科技骨干，应当具备更加宽厚的数学基础。这不仅要求在大学阶段学习一定的数学知识，还需要在数学的抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的熏陶和训练，掌握学习数学的思想方法，以便提高自我更新知识、学习有关现代数学知识的能力。基于这种想法，本书加强了极限理论。在实数完备性的基础上，从确界定理出发，讲解并证明了极限理论中的几个基本定理；证明了闭区间上连续函数的几个重要性质；简要介绍了 $\mathbf{R}^n$ 空间中点集拓扑的初步知识，并在此基础上讲解多元函数的极限与连续性概念。此外，还增加了一些科学技术中颇有用处的数学知识。例如，一致连续，一致收敛，含参变量积分，向量值函数的微分，微分方程组等。

2. 注意分析、代数、几何内容的有机结合，相互渗透。本书在多元函数微积分和微分方程组部分，加强了向量和矩阵的运用，充分利用向量、矩阵和线性代数中其他知识来表述分析中的有关内容。例如，用 Jacobi 矩阵来表示 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的多元向量值函数的微分；利用梯度、Hesse 矩阵来表示多元函数 Taylor 公式中的有关系数；利用向量和矩阵研究微分方程组；运用向量值函数的微分来研究曲线与曲面；将第二型线面积分与向量场的研究密切结合等。这种处理方法，不但符合现代数学的发展趋势，也可以更好地满足现代科技对数学用法的要求，有利于改变在后继课程中学生不习惯于运用向量和矩阵的状况，培养学生综合运用数学知识的能力。

3. 内容安排形成三个台阶，逐步提高教学要求。全书内容可分为三大部分，形成三个台阶，希望读者通过跨越三个台阶的学习，逐步提高自身的素养和学习能力，以有利于与今后学习现代数学接轨。第一部分内容，即第一个台阶，

是书中的前四章,包括一元函数微积分与级数。这部分在讲解微积分基本概念、基本理论和方法的基础上,着重于数学分析基本思维方法的训练,使读者在抽象性、逻辑性和严谨性方面受到必要的熏陶。第二部分内容,即第二个台阶,是书中的第五、六、七章,包括多元函数微积分和常微分方程组。这部分将所讨论的空间由一维推广到(有限)n 维,加强了向量、矩阵在 n 维空间有关概念和理论中的应用,使一些内容的表述更趋现代化。例如,将多元函数的微分定义为从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的线性映射;将一些多元函数的积分统一为几何形体上的积分;将微分方程组写成向量形式,用矩阵的特征值理论讲解线性微分方程组的求解问题;以参数方程为主讲解曲线与曲面的有关内容。与现行的同类教材相比,这部分内容的处理适当地提高了难度,其目的是让读者从一维空间跨入多维空间后,在抽象思维和对高维问题的表达能力等方面上一个台阶。第三部分内容,即第三个台阶,是书中的第八章,介绍了无限维分析的初步知识和某些基本思想,显示了无限维分析的一些应用。旨在引导读者从有限维空间跨入无限维空间,使读者对现代数学的某些思想方法有所了解,在抽象能力上得到进一步的提高。

4. 加强数学应用能力的培养。本书在讲解数学内容的同时,力求突出在解决实际问题中有重要应用的数学思想方法,揭示重要数学概念和方法的本质。例如,在绪论中强调且贯穿全书的微积分基本思想方法;微分中的局部线性化思想;Taylor 公式和无穷级数中的逼近思想;极值问题中的最优化思想;积分应用中的微元法以及贯穿全书的变换思想和方法等。本书除保存了一些几何、物理方面的例子外,增加了不少诸如在工程、生态、人口、经济、医学甚至日常生活方面的例题和习题,注意了应用问题的趣味性,以增强对读者的吸引力。此外,还配备了一些综合练习题,有的需要上机计算,使读者从建立模型,寻求方法到问题解决的全过程受到初步的训练。

5. 削减次要内容,淡化运算技巧。与现行同类教材相比,本书精简了一些次要内容。例如,以链式法则为主精练了一元函数的求导法;不定积分只介绍换元与分部两种基本积分法,删去了有理函数、三角有理函数和某些无理函数的积分法;删去了函数作图;将某些近似计算移至后续课程等。在习题配备上,分成 A、B 两类,A 类题为基本要求,避免过多的运算技巧;B 类题可供学有余力的读者选用。

6. 为学习现代数学开设内容展示的窗口和延伸发展的接口,尽量使用现代数学的语言、术语和符号。例如,介绍微分方程的相平面和稳定性,无限维分析,Frenet 标架和公式等,以扩大读者视野,也为今后更新知识铺路搭桥。

学习本书下册内容需要线性代数与空间解析几何知识。建议将线性代数与空间解析几何另行单独设课,与本课程双轨并进,并在学习本书下册内容前完成。书中用楷体字排印的内容不作基本要求,对第七章第五节与第八章的内容,

各校可视具体情况不讲或少讲。根据我们试点的经验，用 180 学时左右（含习题课）可以讲完本书的主要内容。

参加本书编写的有马知恩、王绵森、魏战线、常争鸣、武忠祥和徐文雄。全书分上、下两册，上册由王绵森、马知恩主编，下册由马知恩、王绵森主编。在编写过程中参阅了我校从 1992 年到 1995 年在电类教改试点班使用的《高等数学讲义》。本书初稿完成后，由部分编者王绵森、魏战线、徐文雄以及西北工业大学王雪芳、孟雅琴两位副教授分别在两校的部分班级中进行了两届教学试点，对本书的修改完善起了重要作用。西安交通大学的寿纪麟教授曾参加过总体方案和部分内容的讨论，提出了宝贵意见。编者借此机会对王雪芳、孟雅琴副教授和寿纪麟教授表示衷心的感谢。我们要特别感谢主审人董加礼教授，他花费了大量的时间，对书稿进行了非常认真细致的审查，提出了许多宝贵的意见和建议。感谢参加审稿会的谢国瑞教授以及汪国强、田铮、马继钢和林益诸教授对书稿提出的宝贵意见和建议。他们的意见和建议对提高本书的质量起了十分重要的作用。感谢高等教育出版社的文小西编审、杨芝馨副编审，没有他们加倍的辛勤工作，本书不可能这样快地与读者见面。

本书得到原国家教委教学改革和重点教材建设基金的资助，还得到西安交通大学教务处的关怀和资助，借此机会我们向有关方面一并表示感谢。

面向 21 世纪的改革教材应该多模式、多品种，本书仅是就其中的一种模式所作的初步探索和尝试。在内容精简和现代化以及培养学生数学应用能力等方面，我们虽然也做了一些努力，但仍感差距很大。限于编者的水平，加之短期内仓促成章，不妥与错误之处在所难免。殷切期望专家、同行和广大读者批评指正。

编　者

一九九八年四月于西安交通大学

目　　录

绪　论

同学们来到大学，要学习许多新的数学课程，微积分就是其中第一门重要的数学基础课. 在开始学习这门课的时候，自然要问，它与中学已经学过的初等数学有什么不同？微积分的研究对象与基本思想方法是什么？下面就来简要地讲一讲这些问题.

大家知道，现实世界中的万事万物，无一不在一定的空间中运动变化，在运动变化过程中都存在一定的数量关系. 按照恩格斯的说法，**数学就是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学**. 简略地说，**就是研究数和形的科学**. 时至今日，虽然数学的内容更加丰富，方法更加综合，应用更加广泛，但是，关于数学的上述说法大体上还是正确的. 只是随着人们对事物认识的逐渐深化，作为数学研究对象的“数”和“形”，在数学发展的不同阶段它们的内涵和表现形式也不相同罢了！

数学的发展可以划分为三个阶段.

从古希腊时代（公元前五世纪—公元前三世纪）到 17 世纪中叶，是数学发展的第一阶段. 在这长达两千多年的时期内，由于生产力的落后，人们把客观世界中各种事物看成是孤立的、静止不变的，因而数学中研究的“数”基本上是**常数或常量**（即在某一运动变化过程中保持不变或相对保持不变、可以看作取固定数值的量），研究的“形”也主要是简单的、不变的、规则的几何形体（例如直线段、直边形与直面形等）. 研究常量间的代数运算和规则几何形体内部及相互间的关系，分别形成了初等代数和初等几何，统称为初等数学. 因此，这个阶段常被称为**初等数学阶段或常量数学阶段**.

从 1637 年著名法国哲学家、数学家 R. Descartes（1596—1650）建立解析几何到 19 世纪末是数学发展的第二阶段. 在这个阶段中，由于工业革命的兴起，推动了机械、造船、采矿、航海和修建铁路等新兴工业的建立和发展，大大拓宽了人们的视野，加深了人类对自然界的认识. 现实世界中的各种事物都处于不停的运动变化之中，物理、力学和天文学等学科的迅速发展，要求建立新的数学工具研究物体的运动变化规律，研究曲线和曲面的性质. 在这种形势下，天才的英国物理学家、力学家、天文学家和数学家 I. Newton（1642—1727）和德国数学家和哲学家 G. W. Leibniz（1646—1716）各自独立地创立了微积分. 此后，数学的发展呈现出一日千里之势，形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分

支，并出现了一些其他的相关分支，它们被统称为高等数学．在这个阶段，数学中研究的“数”是**变数**或**变量**（即在某一运动变化过程中不断变化、可以取不同数值的量），研究的“形”是复杂的不规则的几何形体（例如曲线、曲面、曲线形与曲面形等）．而且，由于 Descartes 直角坐标系的引入，使“数”与“形”紧密地联系起来．平面上的点可以用有序数偶表示，平面曲线（动点的轨迹）可以用代数方程来表示，因此，“运动和辩证法便进入了数学”（恩格斯著《自然辩证法》）．这个阶段被称为**高等数学阶段**或**变量数学阶段**．同学们在大学本科阶段学习的数学课程大多属于这个阶段的内容．

从 19 世纪末开始，数学的发展进入了第三个阶段，即现代数学阶段．至今，这个阶段还在发展之中．由于集合论的创立，不但为数学的发展奠定了坚实的基础，而且使得数学的研究对象——“数”与“形”——具有了更丰富的内涵和更广泛的外延，表现形式也更加抽象．关于这方面内容将在本书的第八章中做初步的介绍，读者从中可略见一斑．本书在前几章中也将适当地采用一些现代数学的观点、方法、术语和符号．

从研究常量到研究变量，从研究规则的几何形体到研究不规则的几何形体，是人类对自然界认识的一大飞跃，是数学发展中的一个转折点．由于研究的对象不同，研究的方法也不同．初等数学主要采用形式逻辑的方法，静止地、一个一个问题孤立地进行研究，而高等数学却不然．下面，我们以“已知位移求速度”和“已知速度求位移”这两个经典问题为例，介绍微积分的基本思想方法，说明它与初等数学的研究方法有什么区别．

例 1　求变速直线运动的瞬时速度问题．

设一物体作变速直线运动，已知位移随时间的变化规律为 $s=s(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$．由于物体的运动速度是随时间不断变化的，要精确地研究物体的运动规律，必须计算它在运动过程中每一时刻的速度，就是所谓瞬时速度．怎样认识和度量它呢？

如果物体做匀速直线运动，那么位移 s 随时间 t 的变化是均匀的．即无论从什么时刻 t_1 开始，只要时间的变化 t_2-t_1 相同，位移的变化 $s(t_2)-s(t_1)$ 也相同．这时，物体的运动速度只需通过除法用

$$v=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$$

来度量，显然它是一个常量．对于非匀速运动，位移 s 随时间 t 的变化是非均匀的，即在相同的时间内位移的变化不尽相同．为了度量在 t_0 时刻的速度 $v(t_0)$，考察物体从 t_0 时刻到与它邻近的 t 时刻所通过的位移 $s(t)-s(t_0)$．记 $\Delta t=t-t_0$，$\Delta s=s(t)-s(t_0)$，则用除法得到的

$$\bar{v}=\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

仅表示物体在 $|\Delta t|$ 这段时间内的平均速度,还不是物体在 t_0 时刻的速度. 假定位移随时间的变化是连续不断的,则当 $|\Delta t|$ 很小(常用 $|\Delta t| \ll 1$ 表示)时,速度的变化也很小,可以近似地看成是不变的. 就是说,在很小的时间区间内,位移随时间的变化可以近似看成是均匀的,这样,$\bar{v}$ 可以作为 t_0 时刻速度的近似值,即

$$v(t_0)\approx\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{0.1}$$

$|\Delta t|$ 越小,上面的近似值越精确. 如果令 $\Delta t\to 0$(即 $t\to t_0$),$\bar{v}$ 能任意接近某确定的常数,即 $\bar{v}$ 的极限存在,那么这个极限值就规定为 t_0 时刻的瞬时速度,即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{0.2}$$

例 2　求变速直线运动的位移问题.

设物体作变速直线运动,速度随时间的变化规律为 $v=v(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$,求在时间区间 $[a,b]$ 内物体所通过的位移 s.

对于匀速直线运动,由于速度 v 是常量,位移随时间的变化是均匀的,所以物体在时间区间 $[a,b]$ 内通过的位移只要用乘法就能求得,即

$$s=v\times(b-a).$$

对于非匀速运动,由于速度 v 是变量,位移随时间的变化是非均匀的,所以在时间区间 $[a,b]$ 内,物体所通过的位移不能简单地用上述乘法公式求得. 但若假定速度随时间的变化是连续不断的,那么当 $|\Delta t|\ll 1$ 时,速度的变化也很小,运动可以近似看成是匀速的,即位移随时间的变化可近似看成均匀的. 因此,若将时间区间 $[a,b]$ 任意分割为若干小区间,物体在每个小区间内部近似看成是匀速运动,就可以利用上面的公式求出位移的近似值. 再将各小区间内通过的位移近似值相加,就可得到在 $[a,b]$ 内物体通过的总位移的近似值. $|\Delta t|$ 越小,近似值就越精确. 如同例 1 那样,当每个时间小区间的长度无限趋近于零时,总位移近似值的极限存在,那么这个极限值就是物体在 $[a,b]$ 内通过的总位移的精确值.

上面的分析过程可以分解为四个具体步骤:

第一步　**分**　将区间 $[a,b]$ 任意分割为 n 个小区间 $[t_{k-1},t_k]$ $(k=1,2,\cdots,n)$,

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

每个小区间的长度记为 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

第二步 **匀** 当 $|\Delta t_k| \ll 1$ 时，在每个小区间$[t_{k-1},t_k]$上位移随时间的变化可以近似看成是均匀的，因此可以用任一时刻 $\xi_k\,(t_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant t_k)$ 时的速度 $v(\xi_k)$ 近似替代物体在各小区间$[t_{k-1},t_k]$上的速度，从而求得物体在各小区间内通过的位移近似值：

$$\Delta s_k \approx v(\xi_k)\Delta t_k. \tag{0.3}$$

第三步 **合** 将物体在各小区间内通过的位移近似值相加，就得到总位移的近似值：

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k.$$

第四步 **精** 令 n 无限趋大（记作 $n\to\infty$），且最大小区间的长度无限趋于零（记作 $d=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\Delta t_k|\to 0$），通过取极限（如果存在的话），总位移的近似值就转化为所求总位移的精确值，即

$$s = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta t_k. \tag{0.4}$$

上面两个例子中，不仅研究的问题具有普遍的典型意义，而且采用的方法也蕴含了微积分的基本思想方法.

从研究的问题来看，例 1 是研究在 t_0 时刻位移函数 $s=s(t)$ 随自变量 t 变化的快慢程度，例 2 是研究位移函数 $s=s(t)$ 在区间$[a,b]$上变化的大小. 事实上，在科学技术中存在着大量的实际问题都可以归结为这两类问题. 例如，设有位于 x 轴上区间$[a,b]$上的物质非均匀分布的细棒. 若已知细棒质量 m 随 x 变化的规律 $m=m(x)$（即质量函数），求棒上某点 $x_0\,(a\leqslant x_0\leqslant b)$ 处的线密度，实际上就是求 x_0 处质量函数 $m=m(x)$ 随 x 变化的快慢程度. 反之，若已知棒的线密度 $\rho=\rho(x)$，求区间$[a,b]$上那段细棒的质量，则是求质量函数 $m=m(x)$ 在$[a,b]$上变化的大小. 一般地说，研究函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处随自变量 x 变化的快慢程度（称之为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**变化率**）和该函数在区间$[a,b]$上变化的大小正是微积分的两个基本问题. 若函数 $y=f(x)$ 随 x 均匀变化，该函数在 x_0 处的变化率只要用除法就能求得，它在$[a,b]$上变化大小只要用乘法就能求得. 若 $y=f(x)$ 随 x 非均匀变化，前者像例 1 中那样，需要用极限（假定存在）

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

才能求得；后者像例 2 中那样，需要通过“分、匀、合、精”四个步骤，用一个“和式极限”(0.4)式才能求得. 前者就是将在第二章中研究的**导数**问题，后者则是第三章中讨论的**积分**问题.

从上面的分析可以看到,在均匀变化情况下用除法解决的问题,在非均匀变化情况下要用导数来解决;在均匀变化情况下用乘法解决的问题,在非均匀变化情况下要用积分来解决. 在上述意义下,我们说,导数可以看作商(除法)的推广,积分可以看作积(乘法)的推广. 这些推广都是建立在极限概念的基础上的.

从研究的方法上来看,虽然两个例子属于两类不同的问题,但它们的基本思想方法是一致的. 概括地说,主要包含下面两个步骤:

第一步　在微小局部"以匀代非匀",求得近似值.

为了研究非匀速运动,两例中均采用在很小的时间区间内,将位移随时间的非均匀变化近似看成是均匀的,也就是用均匀近似代替非均匀,求得近似值(见(0.1)式与(0.3)式).

第二步　通过极限,将近似值转化为精确值.

虽然随着时间区间长度 $|\Delta t|$ 的减小,由(0.1)式与(0.3)式求得的近似值越来越精确,但是,无论 $|\Delta t|$ 多么小,得到的仍是近似值. 当且仅当 $|\Delta t|\to 0$ 时,(0.2)式与(0.4)式中的极限存在,它们的极限值才是所求量的精确值.

上述方法是从运动变化过程中变量之间相互依赖、相互联系出发,通过分析问题和困难所在,克服困难,促使问题的转化使问题得以解决的,充满了辩证法的思想. 例如,欲求 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$,如果静止地、孤立地看问题,仅仅停留在 t_0 时刻来考虑,永远也求不出 $v(t_0)$. 只有看到物体在 t_0 时刻的运动状态是从 t_0 时刻之前的状态变化而来的,并且还要向 t_0 时刻之后运动变化,它们与 t_0 邻近时刻的状态是相互联系、相互依存的,才能想到在一个包含 t_0 的时间区间内去研究. 由于区间很小,在其中采用"以匀代非匀"求得 t_0 时刻的近似值后,问题又转化为"近似"与"精确"的矛盾. 这样,通过取极限来解决矛盾就成为关键. 否则,问题的解答永远停留在近似值,得不到精确值. 这种方法与初等数学中采用的形式逻辑推演是有本质区别的. 当然,形式逻辑推演对于微积分,对于变量数学是不可缺少的,但仅仅用形式逻辑对于变量数学的研究是很不够的. 在微积分中,在变量数学的研究中,需要将形式逻辑与辩证法的相互结合. 希望读者在今后的学习中认真体会这种思想方法.

通过上面的分析,读者不难看到,函数是微积分的研究对象,极限是研究微积分的基础. 因此,不仅微积分的研究对象和研究方法与初等数学有很大的不同,而且与初等数学相比,微积分中的概念更加复杂,表达更加抽象,推理更加严谨,理论性更强. 同学们在学习本课程的时候,应当认真阅读和深入钻研教材的内容. 一方面,要透过抽象的表达形式,深刻理解基本概念和理论的本质以及它们之间的内在联系,正确领会一些重要的数学思想方法;另一方面,还要培养一定的抽象思维和逻辑推理能力. 学习数学,必须做一定数量的习题,做习题不仅是为了掌握数学的基本运算方法,而且可以帮助我们更好地理解概念、理论和思