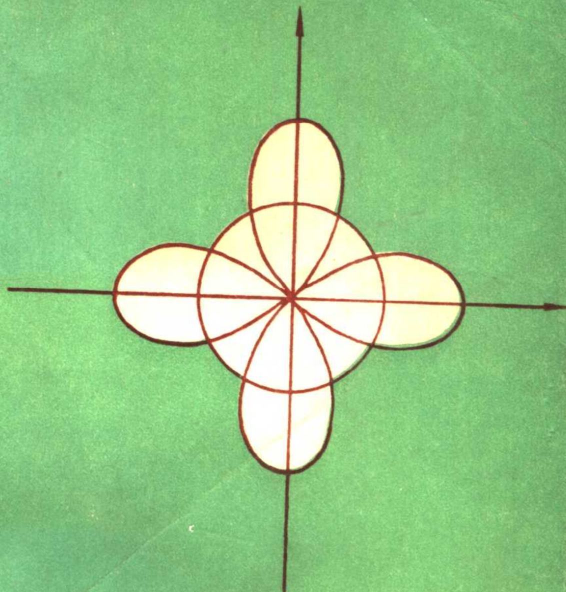

李珍焕 编

魏庚人 校

平面解析几何题解

陕西科学技术出版社

平面解析几何题解

李珍焕 编

魏庚人 校

陕西科学技术出版社

出 版 说 明

为了提高教学质量，根据教育部教学大纲的要求和现行教材，我们组织编写了一套中学数理化教学参考读物，陆续出版。

平面解析几何题解

李珍焕 编

魏庚人 校

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 乾县印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张11 字数233,000

1983年10月第1版 1983年10月第1次印刷

印数 1—24,000

统一书号：7202·39 定价：0.98元

前　　言

本书按照现行中学教学教材中有关解析几何部分的内容，分章选编了三百多题并作了较详细的解答。这些题可供学生复习、自学或教师选题参考。

本书每章前面均列举了一些与本章内容有关的基本知识和公式。在选题安排方面，注意了先易后难，分类集中，并力图兼顾概念、推理和计算技巧，以及初等几何题的解析几何解法。为了使读者开拓思路，提高解题的思维能力，有些题用了多种解法，并选了一些较难的综合性题。对于现行中学课本中没有涉及而在解某些问题时需要用到的知识，本书作了一些补充。

由于选编时间仓促，缺点和错误在所难免，请读者批评指正。

编　　者

1981年4月

目　　录

第一章　平面直角坐标系

一　基础知识

解析几何是在坐标法的基础上用代数方法研究几何内容的学科。因此，坐标法的概念是解析几何的基本概念。

在平面直角坐标系里，一点的坐标是两个有次序的实数，它们表示两个坐标轴到这点的有向距离。点和它的坐标是一一对应的。

在直角坐标系中，我们有下列几个重要公式：

1、两点间的距离公式

设两点的坐标分别为$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$，则这两点间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2、定比分点公式

设线段P_1P_2端点的坐标为$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，点$P(x, y)$分有向线段$\overline{P_1P_2}$所成比为$P_1P:PP_2=m:n$，

则 $$x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\quad y=\frac{ny_1+my_2}{m+n};$$

或 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};$$ 其中$\lambda=m:n$。

若$\lambda<0$，点P在$\overline{P_1P_2}$的延长线上，为外分点；若$\lambda>0$，P在

$\overline{P_1P_2}$的内部为内分点。

当$\lambda=1$时，得P_1P_2中点的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3、三角形的面积公式

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则$\triangle ABC$的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$

若A、B、C三点在一直线上，则$S_{\triangle ABC}=0$；反之，若$S_{\triangle ABC}=0$，则A、B、C三点共线。故三点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

二 题 和 解

1.1 计 算 题

1. 已知点P到x轴的距离为3，到y轴的距离为5．求点P的坐标。

解：设点P的坐标为(x,y)．

$\because |y|=3$，$|x|=5$，

$\therefore x=5$或-5，$y=3$或-3．

因此，点P的坐标为（5，3）或（－5，3），或(－5，

-3)，或（5，-3)

2. 求点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ 到点 $Q[\cos(\frac{2\pi}{3}+\theta), \sin(\frac{2\pi}{3}+\theta)]$ 的距离。

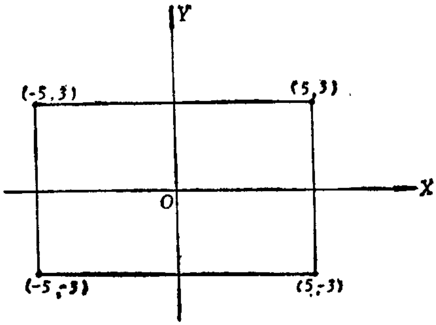

图 1—1

解：$|PQ|=$

$$\sqrt{[\cos(\frac{2\pi}{3}+\theta)-\cos\theta]^2+[\sin(\frac{2\pi}{3}+\theta)-\sin\theta]^2}$$

$$=\sqrt{[-2\sin(\frac{\pi}{3}+\theta)\sin\frac{\pi}{3}]^2+[2\cos(\frac{\pi}{3}+\theta)\sin\frac{\pi}{3}]^2}$$

$$=\sqrt{3\sin^2(\frac{\pi}{3}+\theta)+3\cos^2(\frac{\pi}{3}+\theta)}$$

$=\sqrt{3}$.

3. 已知线段 AB 的长为12，A 的坐标为$(-4,8)$，B 的纵坐标与横坐标相等。求点B的坐标。

解：设点B的坐标为(x,y)。

∵ B的纵坐标与横坐标相等，

∴ $\qquad x=y$. $\qquad\qquad$（1）

又 ∵ $|AB|=12$，

∴ $\qquad (x+4)^2+(y-8)^2=12^2$. $\qquad\qquad$（2）

解出（1）和（2）组成的方程组，得

$$\begin{cases} x_1 = -4, \\ y_1 = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 8 \end{cases}$$

故点B的坐标是$B_1(-4,-4)$或$B_2(8,8)$。

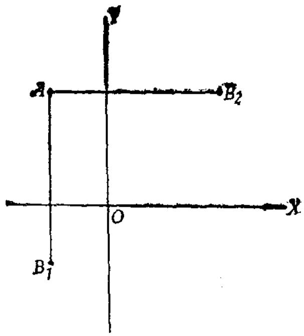

图1—2

4.已知$\angle ABC=90°$，**点**A**的坐标为（5,1），点**B**的坐标为（2,-1），点**C**的横坐标为3，求点**C**的坐标。**

解：设点C的坐标为$(3, y)$。

$\because \angle ABC=90°$，$\triangle ABC$是直角三角形，

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$。

而 AB^2

$=(5-2)^2+(1+1)^2=13$，

$BC^2=(3-2)^2+(y+1)^2$，

$AC^2=(3-5)^2+(y-1)^2$

$\therefore \quad 13+1+(y+1)^2$

$=4+(y-1)^2$。

由此得 $\qquad y=-\dfrac{5}{2}$，

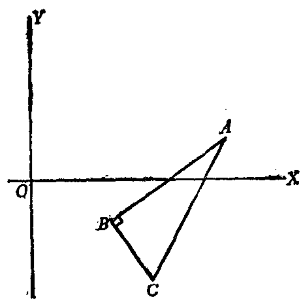

图1—3

故点C的坐标为（$3, -\dfrac{5}{2}$）。

5.已知正方形$ABCD$二相邻顶点的坐标为$A(2, 3)$，$B(6, 6)$。求顶点C和D的坐标。

解：设C和D的坐标分别为(x_C, y_C)和(x_D, y_D)。

$\because \quad |BC| = |AB| \quad$ 且 $\quad AC^2 = 2AB^2$，

$\therefore \quad \sqrt{(x_C-6)^2+(y_C-6)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$；（1）

$(x_C-2)^2+(y_C-3)^2$

$= 2\cdot 25$

$= 50$。　　　（2）

解由（1）和（2）组成的方程组，得

$$\begin{cases} x_C = 9, \\ y_C = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x'_C = 3, \\ y'_C = 10. \end{cases}$$

故顶点C的坐标是$C_1(9,2)$或$C_2(3,10)$。

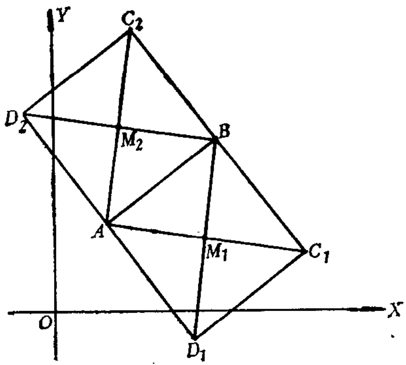

图1—4

∵正方形的对角线互相平分，即AC的中点和BD的中点重合。

$$\therefore \quad \frac{x_D+6}{2} = \frac{2+9}{2}, \quad \frac{y_D+6}{2} = \frac{3+2}{2};$$

或 $$\frac{x'_D+6}{2} = \frac{2+3}{2}, \quad \frac{y'_D+6}{2} = \frac{3+10}{2}.$$

由此得

$$x_D = 5, \ y_D = -1; \ x'_D = -1, \ y'_D = 7.$$

故顶点D的坐标是$D_1(5,-1)$，或$D_2(-1,7)$。

6. 已知正六边形相邻二顶点的坐标为$A(2,0)$，$B(5,3\sqrt{3})$。求它的中心的坐标。

解： 设中心的坐标为$M(x,y)$，

∵ $|MA|=|MB|=|AB|=\sqrt{3^2+27}=6$,

而 $|MA|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,

$|MB|=\sqrt{(x-5)^2+(y-3\sqrt{3})^2}$,

∴ $(x-2)^2+y^2=36$, (1)

$(x-5)^2+(y-3\sqrt{3})^2=36$. (2)

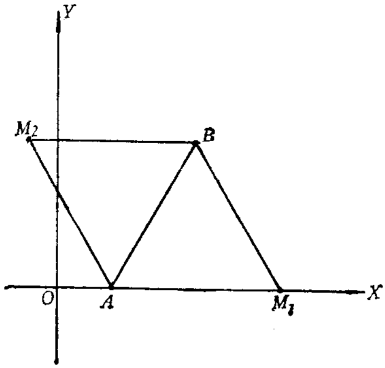

图1—5

解由(1)和(2)组成的方程组，得

$$\begin{cases}x_1=8,\\ y_1=0;\end{cases}$$

或 $$\begin{cases}x_2=-1,\\ y_2=3\sqrt{3}.\end{cases}$$

故这六边形的中心是$M_1(8,0)$或$M_2(-1, 3\sqrt{3})$。

7. 已知点$P(-3, 8)$，点Q在x轴上，且PQ的中点在y轴上。求线段PQ的长。

解：设点Q的坐标为$(x,0)$，则PQ中点M的坐标为 $\left(\frac{x-3}{2}, 4\right)$.

∵M在y轴上，它的横坐标为0.

∴ $\frac{x-3}{2}=0$， $x=3$.

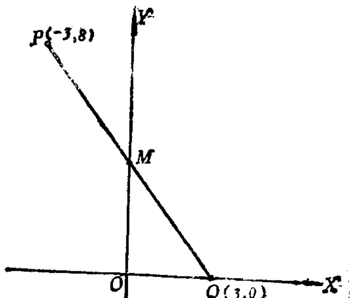

图1—6

因此，点Q的坐标为(3，0)

故　　$|PQ|=\sqrt{(3+3)^2+8^2}=10$。

8. 已知$A(-2,5)$，$B(1,1)$，求直线AB被二坐标轴所截取的线段的长。

解：设AB与x轴的交点为$P(x,0)$，与y轴的交点为$Q(0,y)$，并设$AP:PB=\lambda$，$AQ:QB=\mu$，则

$$\frac{-2+\lambda}{1+\lambda}=x,$$

$$\frac{5+\lambda}{1+\lambda}=0,$$

$$\therefore\quad \lambda=-5,\quad x=\frac{7}{4}.$$

即点P的坐标为$(\frac{7}{4},0)$。

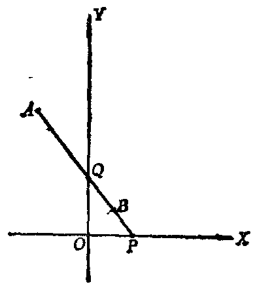

图1—7

$$\text{又}\because \frac{-2+\mu}{1+\mu}=0,$$

$$\frac{5+\mu}{1+\mu}=y,$$

$$\therefore\quad \mu=2,\quad y=\frac{7}{3}.$$

即点Q的坐标为$(0,\frac{7}{3})$。

故　　$|PQ|=\sqrt{(\frac{7}{4})^2+(\frac{7}{3})^2}=\frac{35}{12}$。

9. 已知△ABC顶点的坐标为$A(-16,0)$，$B(9,0)$，$C(0,12)$求∠BCA的平分线CD的长。

解：如图，设D的坐标为（x,0）。

$\because \quad |AC| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20,$

$|BC| = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = 15,$

而 $\quad AD:DB = |AC| : |BC| = 4:3$

$\therefore \quad x = \dfrac{-16 + \frac{4}{3} \times 9}{1 + \frac{4}{3}} = -\dfrac{12}{7}$，即$D$的坐标为$(-\dfrac{12}{7}, 0)$。

故 $\quad |CD| = \sqrt{(-\frac{12}{7})^2 + 12^2} = \dfrac{60}{7}\sqrt{2}$。

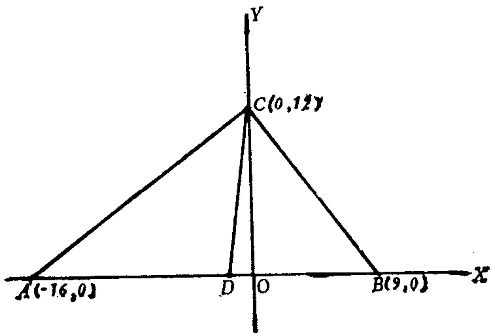

图1—8

10. 已知$\triangle ABC$顶点的坐标为$A(5,1)$，$B(-2,-2)$，C在x轴上，面积$S_{\triangle ABC}=10$，求顶点C的坐标。

解： 设C的坐标为$(x,\ 0)$，则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}\left|x-10+2+2x\right|=\frac{1}{2}\left|3x-8\right|.$$

∵已知 $S_{\triangle ABC}=10$,

∴ $|3x-8|=20$.

由此得 $x=-4$或$\frac{28}{3}$.

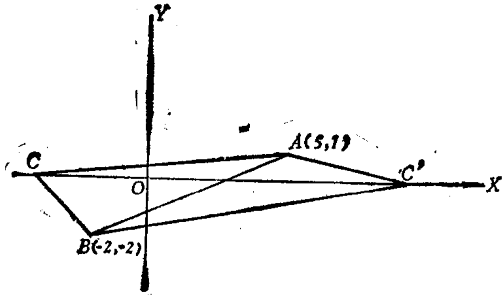

图 1—9

故点C的坐标为$(-4,0)$或$(\frac{28}{3},0)$.

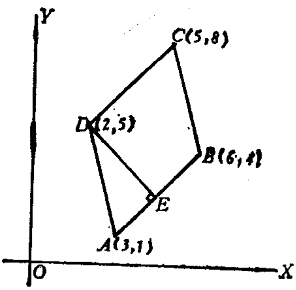

图 1—10

11. 已知▱$ABCD$顶点的坐标为$A(3,1)$,$B(6,4)$,$C(5,8)$,$D(2,5)$。求它的面积和AB边上的高。

解: $S_{ABCD}=2S_{\triangle ABC}$

$$=\begin{vmatrix}3&1&1\\6&4&1\\5&8&1\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$=15$.

设DE为AB边上的高。

$\because \quad |DE|\cdot|AB|=S_{\square ABCD}=15$，而$|AB|=3\sqrt{2}$，

$\therefore \quad |DE|=\dfrac{15}{3\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$。

故$\square ABCD$的面积为15，AB边上的高等于$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$。

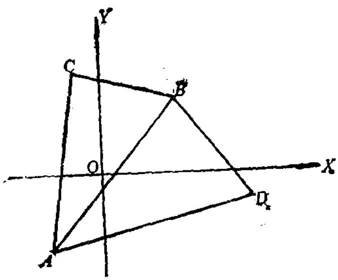

图1—11

12. 已知四边形各顶点的坐标为$A(-2,-3)$，$B(3,3)$，$C(-1,4)$，$D(6,-1)$求。这四边形的面积。

解： 作草图可知这四边形顶点的顺序依次为A，D，B，C。因此，这四边形的面积等于$\triangle ADB$和$\triangle ABC$的面积之和。

$$\because \quad S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ 6 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}=\frac{29}{2},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & -3 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}=\frac{38}{2},$$

$\therefore$四边形$ADBC=\dfrac{29}{2}+\dfrac{38}{2}=33\dfrac{1}{2}$。

13. 已知$\triangle ABC$顶点的坐标为$A(1,1)$，$B(8,4)$，$C(3,10)$。求点P的坐标，使$\triangle PAB$，$\triangle PBC$和$\triangle PCA$的面积相等。

解： 设点P的坐标为$P(x,y)$。

$$\because\ S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 8 & 4 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{2}|-3x+7y-4|,$$

$$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}|-6x-5y+68|,$$

$$S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}|9x-2y-7|,$$

而 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}$

$=S_{\triangle PCA}$，

$\therefore$ $|-3x+7y-4|$

$=|-6x-5y+68|$

$=|9x-2y-7|$。

去掉绝对值符号，得四个方程组：

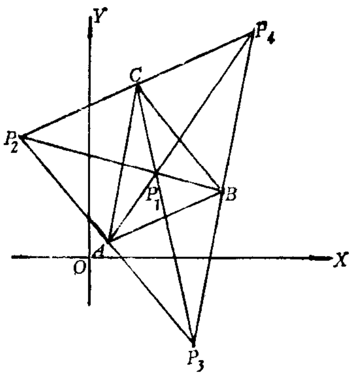

图 1—12

$$-3x+7y-4=-6x-5y+68=9x-2y-7;\quad (1)$$

$$-3x+7y-4=-6x-5y+68=-(9x-2y-7);\quad (2)$$

$$-3x+7y-4=-(-6x-5y+68)=-(9x-2y-7);\quad (3)$$

$$-3x+7y-4=-(-6x-5y+68)=9x-2y-7.\quad (4)$$

分别解这四个方程组，得

$x=4$，　$y=5$；　$x=-4$，　$y=7$；