# 平面解析几何学习指导

山东教育出版社

# 平面解析几何学习指导

于忠文　编写

山东教育出版社

一九八二年·济南

**平面解析几何学习指导**

于忠文　编写

*

山 东 教 育 出 版 社 出 版
山 东 省 新 华 书 店 发 行
山 东 人 民 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092毫米32开本　13印张　277千字
1982年1月第1版　1982年1月第1次印刷
印数：1—25,000

书号　7275·5　　定价 1.10 元

# 前　　言

为提高教学质量，本书根据现行《中学数学教学大纲》、《中学数学教学实验大纲》（征求意见稿）及课本的要求，结合教学实际，对平面解析几何中涉及的概念、公式、定理进行了系统地论述，特别是对灵活运用基础知识寻求解题规律，培养能力方面，结合例题作了具体说明。同时，在内容上作了拓宽、加深和提高，并给出答疑。以便于学生学习、教师备课教学和复习时参考，也可供业余自学者使用。

书中的例题、练习题和测验题，力求典型、富有启发性，既重视基本训练又重视解综合题能力的培养。使用八组测验题时，要从学生的实际出发，根据题目的难易，分别在60、100、120分钟内进行练习。

由于水平所限，可能存有一些缺点、错误，希望读者批评指正。

一九八二年

# 编 者 的 话

为了帮助广大中学生学习数学基础知识，一九八一年秋，湖北人民出版社委托我们湖北省暨武汉市数学学会推荐介绍作者，组织编写了《逻辑代数初步》、《线性代数初步》、《概率统计初步》、《微积分初步》四本小册子，分别介绍中学数学教材中有关高等数学的初步知识．这一工作，得到大中学校教师的热情支持，并希望以中学生为主要对象，编辑出版一套《中学数学丛书》，根据读者的要求和老师们的意见，出版社约请我会在此基础上主编一套《中学数学丛书》．我们认为，这个工作是很有意义的．于是，发动高等院校及中学的广大数学教师以及教学研究工作者共同讨论，决定了二十几个选题，结合出版社组稿的四种，制定了《中学数学丛书》选题计划．

《中学数学丛书》的编写，围绕中学数学教学大纲和全国统编数学教材，从中学生的学习实际出发，对中学数学知识适当作了拓宽和加深，编写这套丛书的目的，是为了帮助中学生巩固基础知识，加强基本训练，熟练掌握基本技能，培养分析和解决数学问题的能力，提高学习质量．

参加这套丛书编写的，有大专院校的老师和教学研究工作者，以及教学经验丰富的中学教师．编写中充分注意中学生的实际，考虑到他们的实际水平和接受能力，力求写得深入浅出，通俗易懂，使一般水平的学生都能看懂，且学有

所得.

《中学数学丛书》共计三十余册，多数小册子内容是和教材相对应的，几本综合性的小册子，是为了帮助同学们掌握数学概念，学会分析与归纳，寻找解题途径并掌握较好的解题方法而编写的．丛书中每本小册子既相对独立又互相联系，同学们既可系统阅读，也可以根据自己的情况有选择地使用．学习中哪一方面比较薄弱，哪一方面存在疑难，便可选择其中的有关部分阅读．另外，丛书各册编有丰富的练习题、复习题，并附有答案与提示，便于同学们自学，同时对中学教师教学亦有一定的参考作用．

这套丛书出版以后，欢迎读者提出批评与建议，以便我们组织力量进一步修改再版，把这套丛书编好．同时，希望读者对进一步编好中学生课外读物提出宝贵意见．

湖北省暨武汉市数学学会

一九八二年五月

# 目　录

# 一、平面坐标法

## （一）有向直线和有向线段

在数学、力学和实际应用的许多问题中，直线和线段的方向有着重要的意义。

1．有向直线和有向线段

为了表示直线和线段的实际意义，对于一条直线和一条线段只考虑它们的位置及线段的长度是不够的，还必须指明它们的方向。

任意一条直线，它有两个相反的方向，我们可以规定其中的一个方向为正向，与其相反的方向为负向。这种确定了方向的直线叫做有向直线或叫做轴（如图1·1）。

为了表示这个正向，我们在它的右侧加一个箭头．这样，对于任意一条直线，箭头所指的方向就是直线的正向，与之相反的就是直线的负向。


图 1·1

同样，一条线段也有两个相反的方向，若选定一条线段的端点$A$为起点，另一端点 $B$ 为终点，那么，这样确定了起点和终点的线段叫做有向线段。有向线段的方向，就是从起点到终点的方向（正向），由终点到起点的方向为负向（如

图1·2）。

以$A$为起点，$B$为终点的有向线段，通常用记号$\overline{AB}$表示；以$B$为起点，$A$为终点的有向线段表示为$\overline{BA}$。

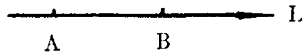


图 1·2

这里，要切实注意以下两点：

(1) 要认清$A$和$B$中哪一个是起点，哪一个是终点，否则，线段的方向容易弄错；

(2) $\overline{AB}$和$\overline{BA}$虽然一样长，但方向却相反。

2. 有向线段的值和长度

一条线段是两个定点间的部分。如果把有向线段放置在一条有向直线（轴）上，那么，这线段的方向可用“+”号或“-”号表示。当线段的方向与轴的正向一致时，则取“+”号；当线段的方向与轴的方向相反时，则取“-”号，这样规定一个带有确定的“+”号或“-”号的数，叫做有向线段的值(或称数量)，这个数的绝对值叫做有向线段的长度。

有向线段的值和有向线段的长度是两个不同的概念。所谓长度与初等几何中所规定的一样，就是用选定的单位长度，测量的结果。即数的绝对值；而有向线段的值既表示它的长度，又指出了它的方向。

如图1·2所示，有向线段$\overline{AB}$的值，用记号$AB$表示，$\overline{AB}$的长度用$|AB|$表示。

由此可知，$\overline{AB}$的值是正数，$\overline{BA}$的值是负数。显然，有向线段的值和长度的关系式为：

$$AB = -BA,$$

$$|AB| = |BA|.$$

成立。

**例** 如图1·3所示，轴 $L$ 上的每一个格表示一个单位长度，A、B、C、D是轴 $L$ 上四个点，求有向线段 $\overline{AB}$、$\overline{BA}$、$\overline{CD}$、$\overline{DC}$ 的值和长度。

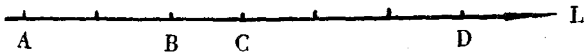


图 1·3

**解**：如图1·3所示，从 $A$ 到 $B$，从 $C$ 到 $D$ 的方向和轴 $L$ 的方向相同；显然从 $B$ 到 $A$，从 $D$ 到 $C$ 的方向和轴 $L$ 的方向相反。故知：

$$AB = 2,$$

$$BA = -2,$$

$$CD = 3,$$

$$DC = -3,$$

$$|AB| = |BA| = 2,$$

$$|CD| = |DC| = 3.$$

通过类似例题的练习还必须明确指出以下两点：

（1）当有向线段的起点与终点重合时，它的值和长度都等于零，此时它的方向不确定，这样的线段称为零线段；

（2）具有等长且有同方向的两个有向线段称为相等的有向线段。显然，一个有向线段可以用与它相等的有向线段来代替。

3. 基本恒等式

在同一轴上的$A$、$B$、$C$三点，不论它们排列的顺序如何，等式：

$$AB+BC=AC. \qquad (\mathrm{I})$$

总是成立的。

这个关系式(Ⅰ)叫做基本恒等式(或有向线段的和)。

要证明关系式(Ⅰ)成立，必须证明$A$、$B$、$C$三点在同一轴上，对一切排列的情况，关系式(Ⅰ)都成立。

事实上，除了$A$、$B$、$C$三点各种重合的情形外，$A$、$B$、$C$三点在同一轴上所有的各种不同的位置等于从$A$、$B$、$C$三个元素里，每次取出3个元素的全排列的种数。即$P_3=6$种情形。

具体地说，$A$、$B$、$C$在同一轴$L$上的位置排列情况(如图1·4)。

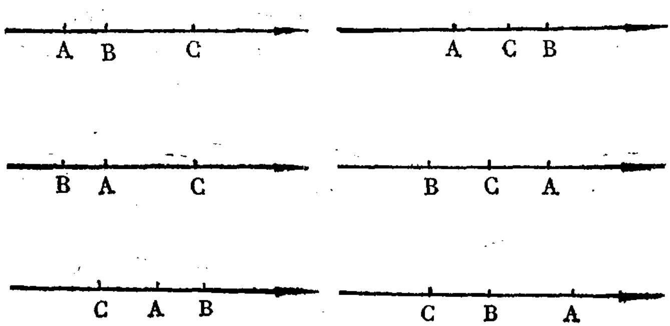


图 1·4

显然，$A$、$B$、$C$在轴上排列的情形分为两类：

(1) $\overline{AB}$和$\overline{BC}$的方向相同；

(2) $\overline{AB}$和$\overline{BC}$的方向相反。

若$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的方向相同，则有：

$$|AB| + |BC| = |AC|.$$

并且$AB$、$BC$、$AC$的符号相同，故有：

$$AB + BC = AC.$$

若$\overline{AB}$和$\overline{BC}$的方向相反，$|AC|$等于$|AB|$和$|BC|$之差，$AC$的符号和$AB$、$BC$中较长者的符号相同。故有

$$AB + BC = AC.$$

关系式(Ⅰ)，我们可以加以推广：

设$A_1$，$A_2$，$A_3$，……，$A_n$是轴上$n$个点，不论这$n$个点排列的顺序怎样，等式

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots\cdots + A_{n-1}A_n = A_1A_n \quad (\text{Ⅱ})$$

总是成立。

下面用数学归纳法和关系式(Ⅰ)，证明关系式(Ⅱ)总是成立。

**证**：由关系式(Ⅰ)得：

$$A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3,$$

即当$n = 3$时，(Ⅱ)式成立。

假设$n = k$时（$k$为自然数，且$k \geqslant 3$），(Ⅱ)式成立，于是有：

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots\cdots + A_{k-1}A_k = A_1A_k$$

成立。

当$n=k+1$时，将上式两边分别加上$A_kA_{k+1}$，得：

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}$$
$$=A_1A_k+A_kA_{k+1}.$$

但根据关系式（Ⅰ）$AB+BC=AC$，必有

$$A_1A_k+A_kA_{k+1}=A_1A_{k+1},$$

$$\therefore\quad A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}$$
$$=A_1A_{k+1}.$$

4. 直线上点的坐标、数轴

在代数里，我们已经熟悉了用数确定直线上点的位置的方法。

设任意一条直线，指定它的方向，就成为轴。在轴上任取一点$O$，称为原点，取一条线段作为测量长度的单位（如图1·5）。于是，对于轴上任意一点$M$，就可以得到有向线段$\overline{OM}$的值$OM$，设为$x$。即

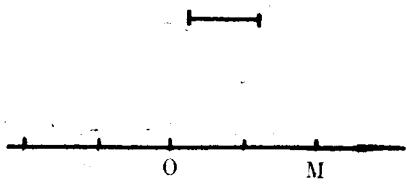

图 1·5

$$OM=x.$$

这个数$x$叫做轴上点$M$的坐标。用$M(x)$表示。

因为$M$是轴上任意一点，所以，当$\overline{OM}$和轴的方向相同时，$\overline{OM}$的值为正数；当$\overline{OM}$与轴的方向相反时，$\overline{OM}$的值为负数；当点$M$和原点$O$重合时，$\overline{OM}$的值为零。

易见，若这轴的位置是水平的，且自左至右为正向，那么，这个轴就是代数里讲的数轴。

对于任何一个实数，在数轴上有唯一的点和它对应；反之，数轴上任何一个点，表示唯一的一个实数。进而可知实数与轴上的点是一一对应的。

下面来证明经常用到的公式：

设$M_1(x_1)$和$M_2(x_2)$是轴上任意两点，则

$$M_1M_2=x_2-x_1.$$

**证**：由关系式（Ⅰ）$AB+BC=AC$得：

$$OM_1+M_1M_2=OM_2,$$

$\therefore$ $M_1M_2=OM_2-OM_1.$

但 $OM_2=x_2,$

$OM_1=x_1,$

$\therefore$ $M_1M_2=x_2-x_1.$

这就是说，轴上有向线段的值等于它的终点坐标减去它的起点坐标。

显然有：

$$|M_1M_2|=|x_2-x_1|.$$

就是说，轴上两点间的距离等于有向线段的起点和终点坐标之差的绝对值。

**例 1**． 如图1·6所示，在轴上有$A$，$B$，$C$三点，$A$、$B$两点间的距离为5，$B$、$C$两点间的距离为1，求：

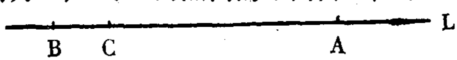


图 1·6

（1）有向线段$\overline{AB}$，$\overline{CB}$，$\overline{AC}$的值；

（2）若以$C$为原点，求点$A$、$B$的坐标。

**解**：（1）$AB=-5$，

$CB=-1$，

$AC=-4$。

（2）若以$C$为原点，则$A$点的坐标是4，$B$点坐标是$-1$。即$A(4)$，$B(-1)$。

**例2**。在轴上作出坐标满足方程$|3x+2|=5x+1$的点。

**解**：由题意知，方程的解即为所求的点的坐标。故要先解方程$|3x+2|=5x+1$。

若$3x+2\geqslant 0$时，$3x+2=5x+1$　故$x=\frac{1}{2}$；

若$3x+2<0$时，$-(3x+2)=5x+1$　故$x=-\frac{3}{8}$。

如图1·7所示，点$M$，$N$即为所求。

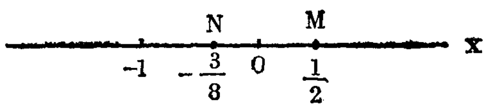


图 1·7

**例3**。如图1·8所示。$\overline{AB}$的值是5，$A$点的坐标是2，求$B$点的坐标。


图 1·8