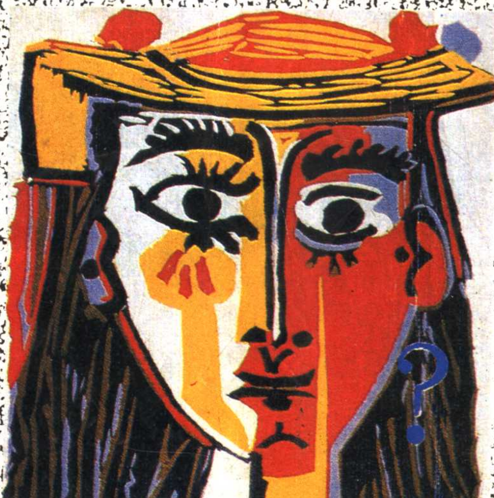
北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校数学课本

初一年级

中学部

北京市华罗庚学校 编



中国大百科全书出版社

北京市华罗庚学校奥林匹克系列丛书

华罗庚学校
数学课本

（初一年级）

北京市华罗庚学校编

主编：刘彭芝

中国大百科全书出版社

北京·1998

华罗庚学校数学课本 初一年级

编　　者：北京市华罗庚学校

主　　编：刘彭芝

责任编辑：简菊玲

封面设计：郭　健

版式设计：樊文瑛

责任印制：朱建毅

出版发行：中国大百科全书出版社

（北京阜成门北大街 17 号　100037）

印　　刷：北京市密云春雷印刷厂

经　　销：新华书店总店北京发行所

版　　次：1996 年 2 月第 2 版

印　　次：1998 年 10 月第 6 次印刷

印　　张：11

开　　本：787×1092　1/32

字　　数：222 千字

印　　数：85001—95000

ISBN 7—5000—5664—8/G·140

定　　价：9.80 元

前　言

北京市华罗庚学校是由中国科学院华罗庚实验室、中国科技大学和中国人民大学附中联合创办的，是中国人民大学附中超常教育体系的重要组成部分。其办学目标是为国家大面积早期发现与培养现代杰出科技人才开辟一条切实可行的途径，为我国教育事业面向现代化、面向世界、面向未来的战略方针探索一项行之有效的举措。在这里，一大批高级教师、大学教授和研究员精心执教，一批批数理超常儿童茁壮成长。华校全体师生缅怀我国著名数学家华罗庚教授，崇尚他为国为民鞠躬尽瘁的高贵品质，决心沿着他的路继续走下去，在教育改革的时代大潮中争做弄潮儿，为实现中华民族重振雄风的宏图大业甘当马前卒。

超常教育与早期教育，为当今各国教育家、心理学家所重视。超常教育研究得到了各国政府以及有远见卓识的社会各界人士的支持和赞助。他们认为，早期教育一旦在世界范围内推广成功，给世界带来的巨大影响，远比世界上任何一次科技革命和产业革命更深刻、更广泛。在前苏联，国家开办有各类天才学校，用于培养科技文体方面的超常儿童。在美国，控制论的创立者、“神童”维纳就是家庭和学校共同精心培育成功的典型。

近年来，我国众多有识之士在改革开放、建设有中国特色社会主义的宏图大业感召下，投身超常教育事业，辛勤耕

耘，刻苦研究，已经取得可喜的成果。超常教育是人类教育史上的一大进步。然而，不言而喻，超常教育又是一个异常复杂的新的教育课题。不论是历史上还是现实生活中，少年出众，而成年寻常的人比比皆是。究其原因，往往在于成长环境不佳，而主要则是未能在超常教育理论指导下施以特殊教育的结果。因此，我们必须更新教育观念，采取新的教育理论和方法，把大批聪慧儿童培养成为高科技时代的栋梁之材。创办华罗庚学校的主旨，就在于探索一条使那些天资优异的孩子们，既不脱离群体，以免身心畸形发展，又使他们的才华得以充分开发的可行之路。

七百多年前，英国思想家、现代实验科学的先驱罗吉尔·培根曾说："数学是科学的大门和钥匙。"时至今日，人们更加清楚地看到了数学在现代教育中占据着永恒的地位。当今世界，自然科学、社会科学和数学已发展成为三足鼎立之势，而数学更是各门科学发展的基础；科学和技术的迅猛、巨大的进步，主要就是得益于数学的现代发展，特别是数学在物理学、生物学以及社会科学中的纵深渗透。因此，华校在以数学为带头学科的施教前提下，同时又鼓励学生们在自己感兴趣的其他课程，如物理、化学、生物、外语、计算机等学科中开拓进取，施展才华。这样，近而言之，希望他们在运用中体验数学的思维模式和神奇魔力；远而图之，则是为他们日后发展的多价值取向打下全面的科学文化素质的坚实基础。

华校采取科学的教学方法，进行开放式教学，努力开发学生的潜在能力，对学生实行超前教育。除由人大附中选派经验丰富的优秀教师任教外，还聘请中国科学院、中国科技

大学、北京大学、清华大学、中国人民大学以及北京师范大学等高校专家、教授来校办讲座。用最新的科技知识丰富学生的头脑，开阔他们的视野。

华校小学部属校外培训性质，从小学二年级选拔招生。入学后每周学习一次，寒暑假进行集中培训。招生时间定于每年10月份，招生范围以北京市为主，面向全国。届时小学各年级同时进行考试。录取时每个年级的前50名编为A班。几年来，华校小学部六年级A班的学生几乎百分之百被保送进入人大附中学习。初、高中部每个年级一个华校班，又称实验班。每年暑期，华校高中部聘请高等学校中的学科奥林匹克的高级教练来校讲授奥林匹克数学、物理、化学等知识，进行较强的针对性学习与训练，培养学生的独立思考、观察、分析和解决问题的能力，为他们参加区、市、全国乃至世界级的学科竞赛准备条件。

实践证明，华罗庚学校对超常儿童的培养方略是可取的。近十年来，华校为高一级学校输送了大量的学业优异的人才。以第一、二、三届试验班为例，三届毕业生总数为136人。其中，直接保送到国家第一流重点大学35人，占25.7%。参加高考的101人中，考入清华大学42人，占30.8%；北京大学41人，占30.1%；中国科技大学10人，占7%。总计考入上述三校为93人，加保送35人，总计为128人。第四届实验班又进一步：全班44人，保送9人，参加高考35人，高考平均分数为610.83分，数学平均分数为137分；总分数超过600分的有25人。不仅如此，还有数以千计的学生在区、市、国家乃至世界级的数理学科的竞赛中获奖夺魁，位居北京市重点中学之首。上述大量事实证明，一种新的教育理论和实

践,使得一批又一批英才脱颖而出,足以显示华罗庚学校的办学方向是正确的，教学是成功的。

更可喜的是：在探索办学的过程中，以华校为核心，造就并团结了校内外一大批具有新思想、新观念、肯吃苦、敢拼搏的优秀教师和教育专家。在这个来自平凡的教学科研岗位的不平凡的群体中，有多年工作在教学第一线的中小学高级教师，有近年来执着于数学、物理、化学、生物、计算机等学科奥林匹克活动的高级教练员，有中国科学院和各高等学校中教学科研上成绩卓著的专家教授。他们就像当年的华罗庚那样，做为人师，做为长者，着眼于祖国的未来，甘愿给下一代当人梯。狭义地说，他们是华校藉以成长、引以自豪的中流砥柱；广而言之，他们是推动中小学教育事业改革的一支特别劲旅；他们的教学经验和长期积累起来的教学资料更是我国中小学生在国内外学科奥林匹克赛场上争雄夺魁的无价“法宝”。

今天，在对华校创办十余年的经验进行总结时，我们可以说，在朝着自己的办学目标的不懈奋斗中，华校具有四大办学特色：

第一，从娃娃抓起的早期智力开发；

第二，必名师启蒙的成功教育传统；

第三，在全面发展时力求业有专精；

第四，处强手如林中敢于应接挑战。

教材是教学质量的基本保证，也是教学的基础建设。高质量的教材，是建立在高水平的学术研究成果和丰富的教学经验的基础上的。因此，华罗庚学校开创了荟萃专家编书的格局，愿将《华罗庚学校奥林匹克系列丛书》奉献给广大教

师、中小学生及学生家长同享。目前已出版和即将出版的有《华罗庚学校数学试题解析》（小学部一册、中学部六册）、《华罗庚学校数学课本》（小学部六册、中学部六册）《奥林匹克中学数学讲座》、《奥林匹克小学数学讲座》、《华罗庚学校计算机教材》、《华罗庚学校图解英语》、《华罗庚学校模范作文》、《华罗庚学校物理试题》、《华罗庚学校物理教材》、《华罗庚学校化学教材》、《华罗庚学校化学试题》。这套丛书的编选者都是华校的骨干教师，他们为了共同的目标献出了自己多年的教学经验和最新的教学科研成果，因而使得这套丛书具有实用、新颖、通俗、严谨的特点。这些特点使全书别具一格，面目一新。我相信，它必将博得广大师生与家长的喜爱。

俗云："一花怒放诚可爱，万紫千红才是春。"华校在努力办学、完善自身的同时，诚望对国内中小学教学水平的提高微尽绵薄，诚望与其他兄弟学校取长补短，携手共进。"合抱之木，生于毫末，九层之台，起于垒土。"遥望未来，我们同呼志士之言：为中国在 21 世纪成为科技强国而献身。

作为本教材的主编，我谨以一个超常教育的积极参与者与组织者的名义，向各位辛勤的编著者致以衷心的谢意；恳请教育战线的前辈和同仁给予指导和推荐，也恳请广大师生在使用过程中提出宝贵的意见。

刘彭芝

目　　录

第一讲　整式的恒等变形(一) …………………………… (1)
第二讲　整式的恒等变形(二) …………………………… (11)
第三讲　分式的恒等变形(一) …………………………… (24)
第四讲　分式的恒等变形(二) …………………………… (38)
第五讲　因式分解及其常用方法 ………………………… (53)
第六讲　换元法 ………………………………………… (69)
第七讲　配方法 ………………………………………… (81)
第八讲　待定系数法 …………………………………… (95)
第九讲　余数定理及综合除法…………………………… (109)
第十讲　对称多项式的因式分解………………………… (124)
第十一讲　应用题(一)………………………………… (137)
第十二讲　应用题(二)………………………………… (149)
第十三讲　应用题(三)………………………………… (164)
第十四讲　应用题(四)………………………………… (180)
第十五讲　整数基本知识……………………………… (192)
第十六讲　连续整数的性质…………………………… (201)
第十七讲　同余………………………………………… (215)
第十八讲　平方数……………………………………… (226)
第十九讲　数字、数位问题 …………………………… (237)
第二十讲　关于整数的杂题选讲……………………… (251)

第二十一讲　抽屉原理……………………………………（268）
第二十二讲　图论中的一些问题………………………（282）
第二十三讲　图论中的树和优美图……………………（300）
第二十四讲　排列组合初步……………………………（317）

第一讲　整式的恒等变形(一)

把一个代数式变换成另一个和它恒等的代数式，叫做代数式的恒等变形．

代数式的恒等变形是数学的基础知识，它在化简、求值、证明恒等式等问题中，有着广泛的应用．

通过代数式的恒等变形，对学生准确理解有关概念，掌握有关法则，提高运算能力、逻辑推理能力，增强解题的灵活性，都有重要意义．

整式的恒等变形是代数式恒等变形的一种，它既是代数式恒等变形的基础，又具有独特的复杂性和技巧性．

整式恒等变形涉及到的主要内容有：整式的各种运算性质和法则；各种乘法公式的正、逆应用，变形应用；因式分解的有关知识等．其中主要乘法公式除教科书上的平方差公式、完全平方公式、立方和与立方差公式外，有时还用到下面几个：

(1)$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

(2)$a^3+b^3+c^3-3ab$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(3)$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

下面介绍整式恒等变形的一些常用方法和特殊技巧．

一、运用运算性质和法则

例 1　设 x,y,z 都是整数，且 11 整除 $7x+2y-5z$，求

My+Kz1

证：11 整除 $3x-7y+12z$（1987 年北京市初中竞赛试题）.

证明：$\because 4(3x-7y+12z)+3(7x+2y-5z)=11(3x-2y+3z)$，又由题设知 11 整除 $3(7x+2y-5z)$，而 11 整除 $11(3x-2y+3z)$，同时 $(11,4)=1$，　　$\therefore$ 11 整除 $3x-7y+12z$.

例 2　已知 $y=ax^5+6x^3+cx+d$，当 $x=0$ 时，$y=-3$，当 $x=-5$ 时，$y=9$，求当 $x=5$ 时 y 的值.

分析　已知 $x=-5$ 时，$y=9$，求 $x=5$ 时 y 的值，我们注意到 x 的取值 -5 和 5 互为相反数；进一步再观察已知多项式里除了常数项外 x 的指数都是奇数，所以可以利用奇数次幂的性质，即任何数奇数次乘方后，符号不变，来解决本题.

解：当 $x=0$ 时，$y=-3$，代入得 $d=-3$，即

$y=ax^5+6x^3+cx-3$

$\because x=-5$ 时，$y=9$，

代入，$9=a(-5)^5+b(-5)^3+c(-5)-3$，

$\therefore$　$a\cdot 5^5+b\cdot 5^3+c\cdot 5=-12$.

$\therefore$　$x=5$ 时，$y=a\cdot 5^5+b\cdot 5^3+c\cdot 5-3=-12-3=-15$.

利用一个数的奇、偶次方幂的性质来求代数式值是常用的方法，如果上例中 x 的乘方的次数都变为偶次，你能想到它的解法是否完全类似吗？

例 3　若 a、b、c 都是自然数，且满足 $a^5=b^4$，$c^3=d^2$，且 $c-a=19$，求 $d-b$ 的值.

分析　$\because$ 5 和 4 的最小公倍数是 20，$\therefore$ 可设 $a^5=b^4=m^{20}$. 同样 3 和 2 的最小公倍数是 6，故可设 $c^3=d^2=n^6$. 这样 a、b 可以用 m 的幂的形式表示出来，c、d 可以用 n 的幂的形式表示出来.

解：　设 $a^5=b^4=m^{20}$，$c^3=d^2=n^6$（m、n 为自然数），

那么，$a=m^4$，$b=m^5$，$c=n^2$，$d=n^3$.

$\because c-a=19$，　$\therefore n^2-m^4=19$，

即$(n+m^2)(n-m^2)=19$.

$\because n+m^2>n-m^2$，又 19 是质数，

$\therefore \begin{cases} n+m^2=19, \\ n-m^2=1, \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} m=3, \\ n=10, \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} d=n^3=1000, \\ b=m^5=243, \end{cases}$

因此，$d-b=1000-243=757$.

本例题的解法是有关幂的问题中常常使用的一种方法，即对形如 $a^m=b^n$ 的式子，当$(m,n)=1$ 时，可设 $a^m=b^n=t^{mn}$，则 $a=t^n$，$b=t^m$，从而使问题简化，这种解法既利用了幂运算的性质，又使用了换元的思想.

二、灵活运用乘法公式

乘法公式是进行整式恒等变形的常用的重要工具，我们通过下面的例题来说明在整式的恒等变形中，如何灵活巧妙地运用乘法公式.

例 4　计算$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots\cdots(2^{32}+1)+1$.

分析　观察连乘积的每个因式：每一个因式均为 2 的方幂与 1 之和，且每个因式中 2 的幂次是其前一因式中 2 的幂次的两倍，又第一个因式是 2+1. 为了利用平方差公式简化计算，在连乘积的最前面乘以$(2-1)$，即乘以 1，原式的值不变，而问题却迎刃而解.

解：　原式$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{32}+1)+1$

$=(2^2-1)(2^2+1)\cdots(2^{32}+1)+1$

……

$=(2^{32}-1)(2^{32}+1)+1$

$$=2^{64}-1+1=2^{64}$$

应用乘法公式进行整式的恒等变形时，应熟悉公式形式、特点，设法为利用公式创造条件.

例 5　已知整数 a、b、$(a-b)$都不是 3 的倍数，试证 a^3+b^3 是 9 的倍数.

分析　因为 a、b 不是 3 的倍数，$a-b$ 也不是 3 的倍数，故 a、b 不同余，故设 $a=3m+1$，$b=3n-1$（m、n 为整数），代入 a^3+b^3 中，即可能出现因数 9，而使问题得到解决.

证明：　$\because a$、b、$a-b$ 都不是 3 的倍数，　$\therefore a$、b 不同余. 设 $a=3m+1$，$b=3n-1$（m、n 为整数；如 $a=3m-1$，$b=3n+1$，论证相仿），那么

$$a^3+b^3=(3m+1)^3+(3n-1)^3$$
$$=[(3m+1)+(3n-1)][(3m+1)^2-(3m+1)(3n-1)+(3n-1)^2]$$
$$=3(m+n)(9m^2+9n^2-9mn+9m-9n+3)$$
$$=9(m+n)(3m^2+3n^2-3mn+3m-3n+1).$$

$\because m$、n 为整数，$\therefore m+n$ 及 $3m^2+3n^2-3mn+3m-3n+1$ 均为整数，故 a^3+b^3 是 9 的倍数.

例 6　设 a、b、c 为有理数，且 $a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$.

求证　对于任何正奇数 n，都有 $a^n+b^n+c^n=0$.

证明：　$\because a+b+c=0$，$\therefore c=-(a+b)$，则

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=-3a^2b-3ab^2=3abc=0$$

故 a、b、c 中至少有一个为 0

不妨设 $c=0$，则有 $a+b=0$，推出 $a=-b$

$\because$　n 是正奇数，

$\therefore$　$a^n+b^n+c^n=-b^n+b^n=0.$

例 7 当 $a+b+c=0, a^2+b^2+c^2=1$ 时，试求下列各式的值：

(1) $bc+ca+ab$；　　(2) $a^4+b^4+c^4$

分析　(1)因为已知中出现各数之和 $a+b+c$，各数平方之和 $a^2+b^2+c^2$，而所求式为 $ab+bc+ca$，自然想到要用公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$.

$\therefore 0^2=1+2(ab+ac+bc)$　即　$bc+ca+ab=-\dfrac{1}{2}$.

(2)根据 n 个数和的平方公式可知，若能求出 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$ 的值，那么 $a^4+b^4+c^4$ 的值就容易求出了. 而

$(bc+ca+ab)^2=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2(a^2bc+ab^2c+abc^2)$

$=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$

$\therefore\quad b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=(-\dfrac{1}{2})^2-2abc\times 0=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\quad a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$

$=1-2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

例 8 试求 $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$ 被 $x-1$ 除的余数.

分析　由于 x^{243} 的次数太高，因此采取一般的竖式除法显然是不容易奏效的，如果将多项式各项均配上 -1. 利用公式：$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots ab^{n-2}+b^{n-1})$，，即可出现因式 $x-1$，使问题得到解决.

解：　$x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$

$=(x^{243}-1)+(x^{81}-1)+(x^{27}-1)+(x^9-1)+(x^3-1)+(x-1)+6$

$\because$ 上式中，每个小括号里的二项式均可被 $x-1$ 整除，

$\therefore x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$ 被 $x-1$ 除的余数为 6.

本题是第 10 届莫斯科数学竞赛题．解法简捷、灵活，别开生面，给我们一定的启示，即多项式的项数、各项的指数、系数都可以进行各种变化而使之具备使用公式的条件．如果要求 $a^{24}-a^{20}+3a^{16}-5a^{12}+a^{8}-2a^{4}+1$ 被 $a-1$ 除的余数，你能用这种思路解答吗？

例 9　求证：$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

证明：　左边 $=(a^3+b^3)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

本公式在变形中，经常使用的是“若 $a+b+c=0$ 则 $a^3+b^3+c^3=3abc$”和其逆命题．

例如：设 a、b、c 为有理数，且 $a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$. 证明对于任何正奇数 n，都有 $a^n+b^n+c^n=0$

证明：　由 $a+b+c=0$ 得 $a^3+b^3+c^3=3abc$.

又 $a^3+b^3+c^3=0$，故 $3abc=0$，从而在 a、b、c 中至少有一个为 0.

不妨设 $c=0$，则 $a=-b$.

因 n 是正奇数，故 $a^n+b^n+c^n=-b^n+b^n=0$.

三、配方法

配方法是一种重要的数学方法，配方法在恒等变形中应用十分广泛．在配方时，还常用到拆项或补项的技巧．

例 10　证明：当 a、b 取任意有理数时，多项式 a^2+b^2-2a

$+6b+11$ 的值总是正数.

证明：$\because$ $a^2+b^2-2a+6b+11$

$=(a^2-2a+1)+(b^2+6b+9)+1$

$=(a-1)^2+(b+3)^2+1$，

又 $\because$ $(a-1)^2\geqslant 0$，$(b+3)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ 不论 a、b 取什么有理数，都有

$a^2+b^2-2a+6b+11>0$.

例 11 若 $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，求 $a:b:c$.

解：$\because$ $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，

$\therefore$ $13a^2+10b^2+5c^2-4ab-12bc-6ac=0$，

即 $(4a^2-4ab+b^2)+(9a^2-6ac+c^2)+(9b^2-12bc+4c^2)=0$，

亦即 $(2a-b)^2+(3a-c)^2+(3b-2c)^2=0$.

$$\therefore\begin{cases}2a-b=0\\3a-c=0\\3b-2c=0\end{cases}$$

解得 $b=2a$，$c=3a$，$\therefore$ $a:b:c=1:2:3$.

例 12 已知 a、b、c、d 为四边形的四条边，且 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$. 求证：此四边形是菱形(即 $a=b=c=d$).

证明：$\because a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=0$

$\therefore a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd=0$，

即 $(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$.

$\because$ $(a^2-b^2)^2\geqslant 0$，$(c^2-d^2)^2\geqslant 0$，$(ab-cd)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ $a^2-b^2=0$ (1)

$c^2-d^2=0$ (2)

$ab-cd=0$ (3)