中学生之友

数学辅导

中

中学生之友丛书

数学辅导

（中）

涂世泽　眭秋生　蒋淑文　编

江苏科学技术出版社

本书根据现行《中学数学教学大纲》和新编教材精神编写，系《中学生之友》丛书——《数学辅导》的几何部分。全书系统介绍了平面几何、立体几何、解析几何的基础知识，内容全面，深入浅出。编写中注意讲清基本概念，指点解题方法。平面几何部分，对证题方法又特别作了较多的论述。全书各章都配备了相当数量的例题和习题，用以指明解题思路，增进读者的解题能力。各章习题都附有答案与提示。

本书可供中学生及其他学习中学数学的读者阅读，也可供中学数学教师参考。

中学生之友丛书

数 学 辅 导（中）

涂世泽 眭秋生 蒋淑文编

出版：江苏科学技术出版社
发行：江 苏 省 新 华 书 店
印刷：泰 州 人 民 印 刷 厂

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 23.375 字数 500,900
1981年 9 月第 1 版 1981年 9 月第 1 次印刷
印数 1—104,000册

书号 13196·054 定价 1.67元

责任编辑 沈绍绪

目　录

第一章 直 线 形

§1. 绪 论

1. 几何学

几何学的研究对象是物质的空间形式；也就是物体的形状、大小和位置. 人们在考察各种实际的物体时，如果只注意其形状、大小和位置，而把其他的性质（如，质量、成分、颜色等等）撇开不管，那就抽象地把这些物体看作是“几何体”或者“几何图形”（简称“**图形**”）. 几何学研究的对象就是这些**图形**的性质.

点、线、面是构成几何图形的**元素**. 由点、线、面组成的任何集合，统称为**几何图形**. 图形里所含有的点、线如果都在同一个平面上，那末，这样的图形称为**平面图形**. 平面几何所研究的，就是这种平面图形的性质.

2. 全等形

在初等几何里，对于图形，总认为它们是可以任意移动而不改变其形状和大小的. 两个图形，**通过某种方式的移动，如果能使它们的各部分彼此重合**，就称为**全等的图形**，简称为**全等形**. 很明显，全等的图形必定是形状相同、大小相等的. 如果**两个图形都和第三个图形是全等**的，那么**这两个图形也一定是全等形**.

§ 2. 线段、角

1. 直线、射线、线段

在纸上取两个点，经过这两点可以用直尺来画出一条直线．

在图上，一个点可用一个大写字母来表示，同一图上不同的点，要用不同的字母表示；直线可以用它上面任何两点的大写字母来表示，如"直线AB"，也可以单用一个小写的字母来表示，如"直线l"（图1—2—1）．

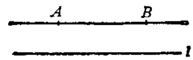

图1—2—1

很明显，经过A、B两点所画出的直线只能有一条．从这个事实可以看出，直线有这样的一个基本性质：**经过两点可以画出一条直线，并且只可以画出一条直线**．或者说，**两点决定一直线**．

根据这个性质，可以推知：**两条不同的直线最多只能相交于一点**．

这是因为，如果有两个公共点，那它们就重合而成为一条直线了．

在直线上，两点之间的部分叫作直线段，简称**线段**；这两点叫作**线段的端点**．

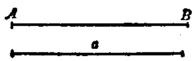

图1—2—2

线段可以用表示它的端点的两个大写字母来表示，如"线段AB"，也可以用一个小写的字母表示，如"线段a"（图1—2—2）．

从一点出发（在这点一侧）画出的一部分直线，叫作**射线**（或者**半直线**）；这一点称为**射线的端点**（或**原点**）．

射线用表示它的端点和在它上面的另外一点的大写字母来表示，如"射线OC"（图1—2—3）．

图1—2—3

应该明确：直线是朝着两方无限伸长的，它没有端点．射线和线段都是直线的一部分．射线有一

个端点，它是从这个端点出发朝着一方无限伸长的．线段有两个端点（分别是它的“起点”和“终点”）；因此，线段之长是有限的，每条线段都各有一定的长度．

在所有连接两点的线中（图1—2—4），**线段是最短的**．连接两点的线段的长度，也叫作这**两点间的距离**．

图1－2－4

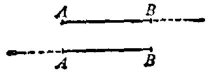

图1－2—5

一条线段，可以利用直尺来把它向两方任意延长．例如，对于线段AB（图1—2—5），我们可以经过B点把它延长出去，也可以经过A点把它延长出去；在前一种情形，我们说“延长AB”，在后一种情形，我们说“延长BA”，或者说“反向延长AB”．所延长出去的部分（图1—2—5中用虚线表示的部分）就叫作原线段AB的延长线．

要比较两条线段AB、CD的长短，可以移动线段AB，把它放置到线段CD上，使A和C重合，而且使线段AB沿着线段CD落下．①如果B正好也和D重合（图1—2—6），则$AB=CD$（或说$CD=AB$）．

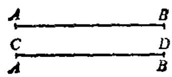

图1—2—6

②如果B落在C与D之间（图1—2—7），则$AB<CD$（或说$CD>AB$）．

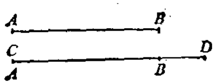

图1—2—7

③如果B落在CD的延长线上（图1—2—8），则$AB>CD$（或$CD<AB$）.

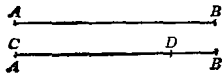

图1—2—8

在线段AB上取一点C（图1—2—9），就把AB分成AC、CB两部分；这时，我们有线段关系式：

图1—2—9

$AB=AC+CB$（或$AC+CB=AB$），及$AC=AB-CB$，$AB-AC=CB$. 特别地，如果C点把AB分成相等的两部分，这点C就叫作**线段AB的中点**；这时，有$AC=CB=\frac{1}{2}AB$，

$AB=2\cdot AC=2\cdot CB$.

很明显，一条线段必有一个中点，而且也只有一个中点.

2. 角

从一点出发的两条射线所构成的图形，叫作**角**. 这个点叫作**角的顶点**，这两条射线叫作**角的边**.

角用符号“$\angle$”（或“$\wedge$”）来表示；例如，由两条射线AB、AC所成的角(图1—2—10)，就记作“$\angle BAC$”（或“$B\hat{A}C$”）. 应当注意，在这样的记法里，表示顶点的字母A要写在其他两个字母的中间. 如果图形上在已知顶点只有一个角，那也可以单用表示顶点的一个字母来表示这个角；如图1—2—10中的$\angle BAC$也可记作“$\angle A$”.

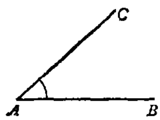

图1—2—10

一个角（例如，$\angle AOB$）也可以看作是由一条动射线绕着它的端点(O)转动、从原来的位置(OA)转到另一个终止位置(OB)而形成的(图1—2—11). ——OA称为$\angle AOB$的**始边**，OB称为$\angle AOB$的**终边**. 始边OA旋转经过的部分，称角的**内部**，其他称为角的**外部**.

终边和始边成一直线的角，叫作**平角**. 如图1—2—12

中的$\angle AOC$（它的两边OA、OC成一直线）就是一个平角.

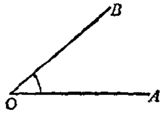

图1—2—11

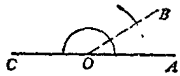

图1—2—12

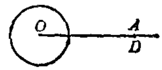

图1—2—13

如果动射线绕着它的端点转动一周回到原来的位置，这时所得的角叫作**周角**. 如图 1—2—13所示的$\angle AOD$(它的终边OD重迭在始边OA上）就是一个周角.

要比较两个角$\angle AOB$和$\angle CQD$的大小，可以把$\angle AOB$放置到$\angle CQD$上，使顶点O和Q重合、边OA重迭在 QC上. ①如果边OB正好和QD重合（图 1—2—14），则$\angle AOB = \angle CQD$. ②如果边OB落在$\angle CQD$内（图 1—2—15），则$\angle AOB < \angle CQD$. ③如果边OB落在$\angle CQD$外（图 1—2—16），则$\angle AOB > \angle CQD$.

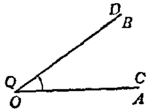

图1—2—14

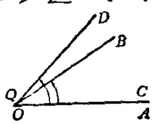

图1—2—15

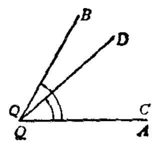

图1—2—16

在$\angle AOB$内作一条射线 OC（图 1—2—17），就把$\angle AOB$分成两部分$\angle AOC$、$\angle COB$；这时，也就有$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$，及$\angle AOB - \angle AOC = \angle COB$. 特别地，如果 OC 把 $\angle AOB$分成相等的两部分，这条射线OC就叫作$\angle AOB$的**角平分线**；这时，有

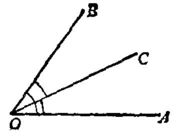

图1—2—17

$$\angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB,$$

$\angle AOB = 2 \cdot \angle AOC = 2 \cdot \angle COB$.

很明显，每一个角必有一条平分线，而且也只有一条平分线.

度量角的大小，在理论研究上，常采用弧度制；在军事上用的，则有**密位制**. 实用上常采取角度制；它以度、分、秒为单位. ——把周角分作 360 等份，每一份的大小为 1 度，记作1°；又把 1 度分作60等份，每一份为 1 分，记作$1'$；把 1 分再分为60等份，每一份为 1 秒，记作$1''$.

因此，1 周角$=360^\circ$，1 平角$=180^\circ$.

平角的一半，叫作**直角**，1 直角$=90^\circ$.

显然，**所有的周角都相等；所有的平角都相等；所有的直角也都相等.**

小于直角的角，叫作**锐角**. 大于直角而小于平角的角，叫作**钝角**（图 1—2—18）.

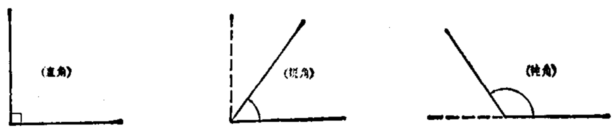

图 1—2—18

如果**两个角的和等于 1 直角**，就说**这两个角互为余角.**

如果**两个角的和等于 1 平角**，就说**这两个角互为补角.**

如图 1—2—19中，$\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$. 这两个角有相同的顶点、一条公共的边，又是互为补角，而且一个角在另一个角的外部，这两个角称为**邻补角**.

显然，**等角的余角相等；等角的补角也相等. 邻补角的外边**（即，在公共边异侧的两边；如图 1—2—19中的 OA、OC）**成为一直**

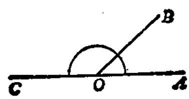

图 1—2—19

线．反之，如果相邻两角的外边成一直线，这两个角互为补角．

§3．圆

圆是一种常见的图形．每个圆*都有一个中心（点），而且圆周上各点到中心的距离都相等．圆的中心，叫作**圆心**；圆心和圆周上任何一点连成的线段，叫作**半径**．

在同一个圆里，所有的半径都相等．如果一个圆的圆心位置确定了，半径的长也确定了，这个圆的大小和位置就完全确定．

圆规是用以画圆的工具；通常所用的圆规，是可以把它的两脚自由张、闭的．在用圆规来画"半径为 r"的圆时，需要把圆规的两脚张开，使两脚尖的距离等于半径r．

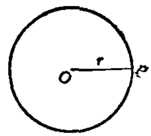

图1—3—1

圆常用符号"⊙"来表示；例如，"圆心在O点的圆"就记作"$\odot O$"（读为"圆O"）．此外，也用"$\odot O(r)$"表示"圆心为O、半径为r的圆"（图1—3—1）．

容易知道，**半径相等的两个圆是全等形**．

连接圆周上任意两点的线段（如图1—3—2中的AB），叫作圆的**弦**．经过圆心的弦（如图1—3—2中的CD），叫作圆的**直径**．直径的长等于半径的2倍．圆的直径把圆分成相等的两部分，每一部分叫作**半圆**．圆周上任意两点间的部分，

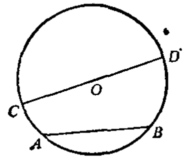

图1—3—2

*圆这个名称，有时用以指"圆周"，有时则用以指"圆面"．

叫作**圆弧**．小于半圆的弧叫作**劣弧**；大于半圆的弧叫作**优弧**．通常说的"弧"，总是指劣弧而言的．

弧用符号"⌒"来表示；如图1—3—2中界于A、B两点间的弧，就记作"$\overset{\frown}{AB}$"，读为"弧AB"．

顶点在圆心的角叫作**圆心角**；如图1—3—3中的$\angle AOB$就是一个圆心角．A、B是圆周上的点，这时$\overset{\frown}{AB}$叫作圆心角$\angle AOB$所对的弧；弦AB，叫作圆心角$\angle AOB$所对的弦，也叫作$\overset{\frown}{AB}$所对的弦．

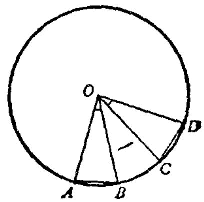

图1—3—3

容易知道，**在同圆或等圆中，如果圆心角**（如图1—3—3中的$\angle AOB$和$\angle COD$）**相等，则它们所对的弧**（$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$）**相等，所对的弦**（AB和CD）**相等．**

这因为，只要绕着圆心O来旋转$\angle AOB$，使OA与OC重合，则OB与OD也必定重合；因而$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$重合，弦AB与CD重合，也就是，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$，$AB=CD$．

反过来，也可推知，**在同圆或等圆中，等弧所对的圆心角相等，所对的弦相等；等弦所对的圆心角相等，所对的弧相等．**

§4．定义、定理

1．概念和定义

"概念"是一种"思维形式"，也就是"思想"．人们在生活和生产的实践中接触客观事物，逐渐地对它们有了深

入认识（由感性认识上升到理性认识），就形成“反映各种事物的本质特征”的思想；这种**反映事物本质特征的思想**，就是所谓**概念**.

“事物的本质特征”就是同一类事物所共有的、足以作为区别于其他事物的标志的属性.

思想是要借助语言来表达的；因此，对于每一概念，总要有规定的专用名称．平常也把“概念的名称”当成就是“概念”．我们经常利用概念作为一切知识的基础．在任何科学的叙述里，都要求对有关概念作出清晰的说明．了解概念，在任何学习中，都是非常必要的．如果概念不清，那就会在学习和讨论中因为“没有共同语言”而造成误解，导致错误.

为了说明概念的意义，通常总采用下定义的办法（即定义法）．所谓**定义**，就是利用“已知的概念”来给出“新遇到的概念”（即，“被定义的概念”）的明确的解说（主要是揭示被定义概念的本质特征，以明其有别于其他概念）．例如，前面讲到的“平面图形”的定义、“圆的直径”的定义以及线段、角等等的定义．然而，我们不能企图对一切概念都下定义．这因为：对每一概念如果都要利用旧有的、已知的概念来给予定义，则溯至最初，就必然会有某些最简单的概念，它们是最早碰到的，因而也就是不可能加以定义的．所以，定义的系列必须从不加定义的概念来开始．这种**不加定义的概念**，称为**原始概念**(或**基本概念**)．例如，点、直线、平面等等就是几何学中的原始概念.

对于原始概念，通常只是给出一些简单的例示或者描述．例如对于直线，我们指明它是朝着相反两方“无限伸长”的，也可用“拉紧了的丝线”来作为它的形象.

2. 命题、定理和公理

几何学中，进行图形性质的研究，总要把所得的结果表达成**命题**的形式．所谓“命题”，就是一句意义完整的语言，它对所述及的事实要有所肯定或者有所否定；换句话说，“命题”是叙述判断的语言．**判断**是对客观事物有所肯定或有所否定的思维形式．叙述数学中判断的语言，就叫作**数学命题**．

命题并不一定总是具有正确性的．一个判断如果能如实地反映实际情况，就是真实的判断；否则，就是虚假的判断．命题是否正确，取决于它所叙述的判断是否真实．例如，“任何正数与其倒数之和不小于2”是一个正确的命题，而“任意两个无理数之和为无理数”则是错误的命题．

在几何学中，对于命题，为了确认它的正确性，总要用逻辑推理的方法，以旧有的、已知为正确的命题作依据来加以证明．但是，证明的系列，也象定义的系列一样，必须从不加证明的命题来开始．这因为在命题的证明中，都要回溯到旧有的、已知的命题，然而这种回溯的过程并不是可以无限继续的，也就是必然会有某些最早碰到的命题，它们是不可能加以证明的．

经过证明确认为正确的命题，叫作**定理**．

不加证明就采用的正确命题，叫作**公理**．

几何公理所表达的，都是一些图形的最基本的性质；它们的正确性是人类在亿万次实践中直接证实的．例如，前面讲到的①几何图形可以任意移动而不改变其形状、大小；②两点决定一直线；③在连接两点的所有线中，直线段最短；就是常用的几条几何公理．

由定义、公理、定理直接推得的命题（它们的真实性，

是只要稍加思索就可确定的），叫作**推论**（或**系**）．例如，前面讲到的命题"两条不同的直线，最多只能相交于一点"就是公理"两点决定一直线"的推论．

作为推论的命题，也是定理．此外，在几何课本中，还有许多列为例题和习题的命题（它们的真实性是经过证明来确认的），实际上也都是定理．

3．定理的结构

每个定理都有两个组成部分：其一是假设的事项，另一是根据假设推导出来的结果．前者称为定理的**前提**或**条件**，后者称为定理的**终结**或**结论**．

在任何一个定理中，它的条件和结论之间都存在着一种必然的联系；可以说，条件是结论成立之"因"，而结论则是条件所生之"果"．换句话讲，定理中所陈述的，无非是有了这样的条件，就必然会推得如此的结论．

以A记定理的条件，以B记定理的结论，就可以把定理表示为如下的一般形式：

若A，则B．

从这个形式可以看出：在定理的这样叙述中，我们是用连接词"若……，则……"（或"如果……，那么……"）把条件和结论联系起来，从而反映它们之间所存在的关系的．在"若"（或"如果"）后面的部分，是定理的条件，在"则"（或"那么"）后面的部分，是定理的结论．——例如，前面讲过的定理"在同圆或等圆中，如果圆心角相等，则它们所对的弧相等"，其中，"在同圆或等圆中，圆心角相等"是条件，而"它们所对的弧相等"是结论．

在学习中，对于每个定理，都宜确切弄清它的条件是什