



普通高等教育“十五”国家级规划教材

A History of Mathematics

数学史

朱家生



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十五”国家级规划教材

数 学 史

朱家生

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。全书以数学发展的脉络为主线,较为系统地介绍了数学的历史。本书对数学科学的一些重要思想方法及其产生、发展的过程进行了阐述,对所涉及的著名数学家的生平和主要工作也做了介绍。在内容的叙述中,既注重历史进程的纵向发展,又注意不同地区数学发展的横向比较,并力求将数学知识与历史史实、数学思想与数学方法、数学科学与数学应用相互渗透。全书共 12 章,内容丰富,叙述生动有趣。

本书可作为高等学校各专业开设数学史课程的教学用书,对广大数学教师和数学爱好者也有重要的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学史/朱家生.—北京:高等教育出版社,2004.7

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-04-014376-3

I. 数... II. 朱... III. 数学史-高等学校-教材
IV. O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 050064 号

策划编辑 王瑜 责任编辑 王瑜 封面设计 王凌波 责任绘图 郝林
版式设计 王莹 责任校对 朱惠芳 责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	涿州市星河印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2004 年 7 月第 1 版
印 张	12.75	印 次	2004 年 7 月第 1 次印刷
字 数	230 000	定 价	15.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089 64054601 64054588

目 录

绪论	1
1 源自河谷的古老文明——数学的萌芽	4
1.1 古埃及的数学	4
1.2 古巴比伦的数学	9
2 地中海的灿烂阳光——希腊的数学	14
2.1 希腊数学学派与演绎数学的产生	15
2.2 希腊数学的黄金时代	23
2.3 希腊数学的衰落	33
3 来自东方的继承者与传播者——印度与阿拉伯的数学	36
3.1 印度的数学	36
3.2 阿拉伯的数学	42
4 源远流长、成就卓著的中国古代数学	49
4.1 先秦时期——中国古代数学的萌芽	49
4.2 汉唐时期——中国传统数学体系的形成	53
4.3 宋元时期——中国传统数学的兴盛	68
4.4 明清时期——中国传统数学的衰落与复苏	76
4.5 中国传统数学的特点	78
5 希望的曙光——欧洲文艺复兴时期的数学	81
5.1 欧洲中世纪的回顾	81
5.2 欧洲文艺复兴时期的数学	84
6 数学的转折点——解析几何学的产生	97
6.1 解析几何学产生的背景	97
6.2 笛卡儿与他的《几何学》	99
6.3 费马与他的解析几何	102
6.4 解析几何的进一步完善和发展	104
7 巨人的杰作——微积分的创立	107
7.1 微积分产生的背景	107
7.2 先驱们的探索	110
7.3 科学的巨人——牛顿	113
7.4 多才多艺的数学大师莱布尼茨	117

8 赌徒的难题——概率论的产生与发展	121
8.1 赌徒的难题	121
8.2 来自保险业的推动	123
8.3 概率论的进一步发展	124
8.4 应用举例	127
9 分析的时代——微积分的进一步发展	129
9.1 来自物理学的问题——微分方程	129
9.2 变分法	140
9.3 分析基础的严密化	147
10 痛苦的分娩——几何学的革命	152
10.1 关于第五公设的思考	152
10.2 高斯、波尔约和罗巴切夫斯基的突破性工作	154
10.3 非欧几何学	159
10.4 黎曼对非欧几何的贡献	160
11 年轻人的事业——代数学的解放	164
11.1 从代数方程的解法到群论	164
11.2 代数学的扩张	173
12 春日盛开的紫罗兰——现代数学选论	177
12.1 泛函分析的诞生	177
12.2 抽象代数的确立	179
12.3 拓扑学的起源与发展	181
12.4 应用数学的崛起	183
12.5 计算机与计算数学	191
参考文献	196
后记	197

绪 论

众所周知,数学是人类文明的一个重要组成部分.与其他文化一样,数学科学也是几千年来人类智慧的结晶.从远古时期的结绳记事、屈指计数到借助于现代电子计算机进行计算、证明与科学管理,从利用勾股测量等具体的操作到抽象的公理化体系的产生,……所有这些,都构成了科学史上最富有理性魅力的题材.随着时代的进步,数学科学的思想、方法与内容已经渗透到人类生活的各个领域,科学技术包括社会科学的数学化已成为一种共识.人类的现实生活需要数学,国家的发展、科学技术的进步更离不开数学.因此,具备一些必需的数学知识和一定的数学思想方法,是现代人才基本素质的非常重要的组成部分.

与其他科学相比,数学是一门积累性很强的学科,它的许多重大理论都是在继承和发展原有理论的基础上发展起来的.如果我们不去追溯古今数学思想方法的演变与发展,也就不可能真正理解数学的真谛,正确把握数学科学发展的方向.正如法国著名数学家庞加莱所说:“如果我们想要预知数学的未来,最适合的途径就是研究数学这门科学的历史和现状.”

数学史主要研究数学科学发生发展及其规律,简单地说是研究数学的历史.它不仅追溯数学内容、思想和方法的演变、发展过程,而且还探索影响这种过程的各种因素,以及历史上数学科学的发展对人类文明所带来的影响.数学史的研究对象不仅包括具体的数学内容,而且涉及历史学、哲学、文化学、宗教等社会科学与人文科学内容,是一门交叉性学科.研究与学习数学史,可以弄清数学发展过程中的基本史实,再现其本来面貌,同时透过这些历史现象对数学成就、理论体系与发展模式做出科学、合理的解释、说明与评价,进而探究数学科学发展的规律与文化本质,帮助我们掌握数学的思想、方法、理论和概念,认识数学科学与人类社会的互动关系以及研究数学思想的传播与交流史,了解数学家的生平.

具体而言,学习数学史至少具有以下一些重要意义:

首先,每一门科学都有其发展的历史,作为历史上的科学,既有其历史性又有其现实性.其现实性首先表现在科学概念与方法的延续性方面,今日的科学研究在某种程度上是对历史上科学传统的深化与发展,或者是对历史上科学难题的解决,因此我们无法割裂科学现实与科学史之间的联系.数学科学具有悠久的历史,与自然科学相比,数学更是积累性科学,其概念和方法更具有延续性,比如古代文明中形成的十进位制记数法和四则运算法则,我们今天仍在使用,又如费马猜想、哥德巴赫猜想等历史上的难题,长期以来一直是现代数论领域中的研究热点.数学传统与数学史材料可以在现实的数学研究中获得发展.国内外许多著名的数学大师都具有深厚的数学史修养或者兼及数学史研究,并善于从历史素材中汲取养分,做到古为今用,推陈出新.我国著名数学家吴文俊先生早年在拓扑学研究领域取得杰出成就,20世纪70年代开始研究中国数学史,在中国数学史研究的理论和方法方面开创了新的局面,特别是在中国传统数学机械化思想的启发下,建立了被誉为“吴方法”的关于几何定理机器证明的数学机械化方法,他的工作不愧为古为今用、振兴民族文化的典范.科学史的现实性还表现在为我们今日的科学研究提供经验教训和历史借鉴,预见科学未来,使我们在明确科学研究的方向上少走弯路或错路,为当今科技发展决策的制定提供依据.多了解一些数学史知识,就不会出现诸如用直尺和圆规去解决三等分角作图等荒唐事,也可避免在费马大定理等问题上白费时间和精力.同时,总结我国数学发展史上的经验教训,对我国当今数学发展不无益处.因此,我国著名数学史家李文林先生曾经说过:“不了解数学史就不可能全面了解数学科学.”

其次,美国数学史家 M. 克莱因曾经说过:“一个时代的总的特征在很大程度上与这个时代的数学活动密切相关.这种关系在我们这个时代尤为明显.”“数学不仅是一种方法、一门艺术或一种语言,数学更主要的是一门有着丰富内容的知识体系,其内容对自然科学家、社会科学家、哲学家、逻辑学家和艺术家十分有用,同时影响着政治家和神学家的学说”^①.数学已经广泛地影响着人类的生活和思想,是形成现代文化的主要力量.因而数学史是从一个侧面反映的人类文化史,又是人类文明史的最重要的组成部分.许多历史学家通过数学这面镜子,了解古代其他主要文化的特征与价值取向.例如,古希腊(公元前600年—公元前300年)的数学家们强调严密的推理和由此得出的结论,他们不关心这些成果的实用性,而是要人们去进行抽象的推理,从而激发对理想与美的追求.通过对希腊数学史的考察,就容易理解为什么古希腊会具有很难为后世超越的优美文学、极端理性化的哲学以及理想化的建筑与雕塑了.而罗马数学史则告诉我们,罗马

^① M. 克莱因. 古今数学思想. 张理京, 张锦炎等译. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.

的文化是外来的,罗马人缺乏独创精神而注重实用。

再者,当我们学习过数学史后,自然会有这样的感觉:数学的发展并不合乎逻辑。或者说,数学发展的实际情况与我们今日所学的数学教科书很不一致。我们今日中学所学的数学内容基本上属于17世纪微积分产生以前的初等数学知识,而大学数学系学习的大部分内容则是17、18世纪的高等数学。这些数学教学内容业已经过千锤百炼,是在科学性与教育要求相结合的原则指导下经过反复推敲而成的,是将历史上的数学材料按照一定的逻辑结构和学习要求加以取舍编纂成的知识体系,这样就必然会舍弃了许多数学概念和方法形成的实际背景、知识背景、演化历程以及导致其演化的各种因素。因此仅凭数学教材的学习,难以了解数学的原貌和全景,同时也会忽视了那些被历史淘汰掉的但对现实科学或许有用的数学材料与方法,而弥补这方面不足的最好途径就是学习和研究数学的历史。在一般人看来,数学是一门枯燥无味的学科,甚至很多人视其为畏途,从某种程度上说,这是由于我们的数学教科书介绍的往往是一些僵化的、一成不变的数学内容,如果在数学教学中适当地渗透一些数学史内容而让数学活起来,这样便可以激发学生的学习兴趣,也有助于学生对数学概念、方法和原理理解与认识的深化。

同时,数学史是一门文理交叉学科。从今天的教育现状来看,文科与理科的鸿沟导致我们的教育所培养的人才已经越来越不能适应当今自然科学与社会科学高度渗透的现代化社会,而数学史学科的这种交叉性正可显示其在沟通文理科方面的作用。通过对数学史的学习和研究,既可以使数学类专业的学生在接受数学专业训练的同时,获得人文科学方面的修养;也可使文科或其他专业的学生了解数学概貌,获得数理方面的修养。此外,历史上数学家的业绩与品德也会在青少年的人格培养上发挥十分重要的作用。

为了能让更多的学生了解和掌握初步的数学史知识,我们编写了这本教材。从历史研究和教师教学与学生学习方便的需要出发,本教材选择了数学发展进程中对数学、整个科学乃至人类社会的发展与进步具有重大意义的数学历史史料,按照历史发展的脉络,采用纵横交织、中外结合、史哲融合的方式,将数学知识与历史史实、数学思想与数学方法、数学科学与数学教育等相互渗透。考虑到大多数学校的教学需求,本教材不仅综述整个数学发展的历史,重点阐述了算术、代数、几何、三角、解析几何和微积分等重要数学学科的产生、发展过程,还对现代数学的概况做了介绍。在对内容的叙述中,既注重历史进程的纵向发展,又注意不同地区的横向比较,力求让不同层面的读者都能从中获益。

1

源自河谷的古老文明——数学的萌芽

数学,作为人类文明的重要组成部分,有着非常悠久的历史.那么,数学这门学科究竟是何时诞生的呢?据文字记载,至少在5 000年以前,人类就已有了数学活动.数学也和其他人类文明一样,最早出现于尼罗河中下游的古埃及、幼发拉底河与底格里斯河两河流域的古巴比伦、黄河流域的中国和恒河流域的印度.但就国外数学发展的源头而言,客观地讲,一般还应首推古埃及与古巴比伦.

1.1 古埃及的数学

我们知道,非洲的尼罗河是世界上最长的河流之一.早在公元前3000年左右,在这条河的中下游,古埃及人建立起了早期的奴隶制国家,其地理位置与现在的埃及区别不大(如图1-1).打猎、渔业及畜牧业是古埃及人最初的谋生方式.一年一度的尼罗河的洪水给这片谷地带来了肥沃的淤泥,那些以游牧为生的古埃及人便在这里定居下来,由狩猎转向耕种.在发展农业的同时,手工业与贸易也随之迅速发展起来,这些都推动了自然科学各学科知识的积累.

提到古埃及,大家就会自然想到作为世界七大奇迹之一的金字塔.位于开罗附近吉萨省的胡夫金字塔——法老胡夫(Khufu)的陵墓——是埃及最大的金字塔(如图1-2),大约建于公元前2500年左右.该金字塔呈正四棱锥形^①,底面正方形面向东西南北四个正方向,边长230.5m,塔高146.6m(现高约137m).近年

^① 经科学家考证,埃及的金字塔除了正四棱锥形的以外,还有其他许多种形状,如圆锥形、四棱台形等

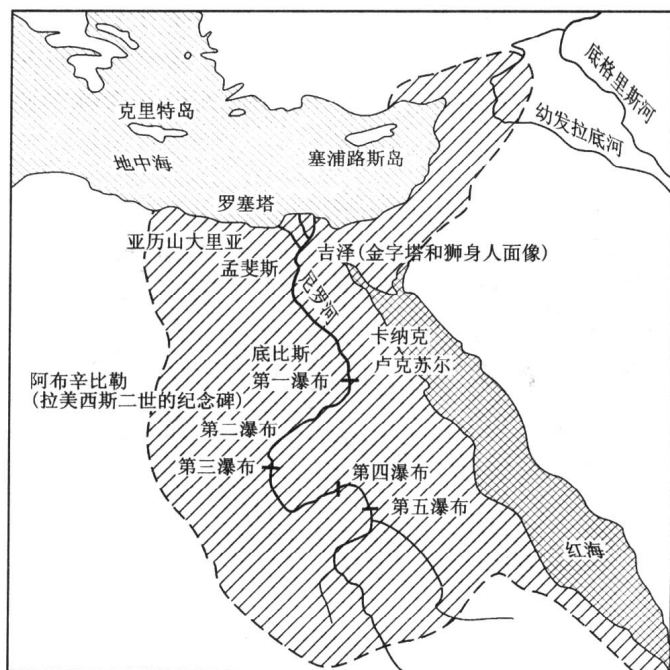


图 1-1 古代埃及所处的地理位置

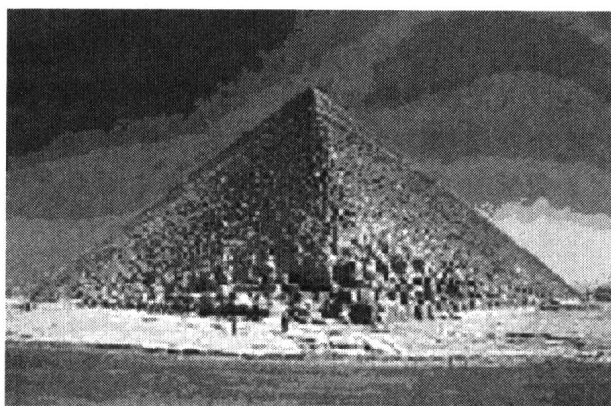


图 1-2 古埃及的胡夫金字塔

来,科学家们通过使用精密的仪器对这一金字塔进行了测量,惊奇地发现,其底基正方形边长的相对误差不超过 $1:14\,000$,即不超过 2 cm ;四底角的相对误差不超过 $1:27\,000$,即不超过 $12''$,四个方向的误差也仅在 $2' \sim 5'$ 之间,这些都说明当时的测量水平已相当高。

古埃及人在建造神奇的金字塔、狮身人面像以及神庙的同时,也创立了相

当发达的数学. 从公元前 3000 年起, 古埃及人就已经有了象形文字, 其中最具代表性的是僧侣们所使用的僧侣文(又称祭司文). 流传至今的古埃及文献, 大部分是以这种僧侣文书写在纸草上保存下来的, 人们通常称其为纸草书^①(如图 1-3).

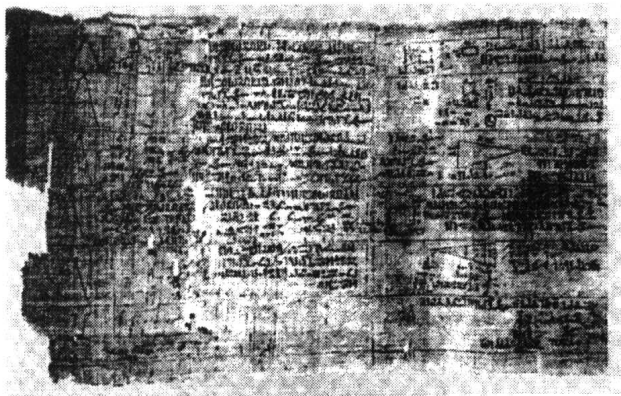


图 1-3 古埃及纸草书

保存至今有关数学的纸草书主要有两种: 一种是陈列于英国伦敦大不列颠博物馆东方展室中的兰德纸草书, 这是由英国人兰德(H. Rhind)1858 年搜集到的; 另一种收藏于俄国莫斯科美术博物馆, 被称为莫斯科纸草书, 这是由俄罗斯人郭列尼舍夫于 1893 年搜集到的. 这两份纸草书都是公元前 2000 年前后的作品, 为古埃及人记录一些数学问题的问题集. 兰德纸草书长 544cm, 宽 33cm, 共载有 85 个问题, 莫斯科纸草书长 544cm, 宽 8cm, 共载有 25 个问题. 人们对古埃及人数学的了解主要来自这些纸草书以及其他保留至今的历史文献.

1.1.1 古埃及的记数制与算术

古埃及人使用的是十进记数制, 并且有数字的专门符号(如图 1-4). 当在一个数中出现某个数码的若干倍时, 就将它的符号重复写若干次, 即遵守加法的法则, 这说明, 古埃及人的记数系统是叠加制而不是位值制. 古埃及人已经有了分数的概念, 但他们仅使用单位分数也就是分子为 1 的分数, 表示整体的若干等份中的一份, 只有 $\frac{2}{3}$ 是一个例外.

^① 这种纸草书是用尼罗河三角洲盛产一种形状如芦苇的水生植物——纸莎草, 从纵面剖成小条, 拼排整齐, 连接成片, 压榨晒干而成的.

1		一根垂直棒或一竖(笔画)
10	∩	一根踵骨或足械, 或靴
10 ²	⊙	一卷轴, 或一圈绳
10 ³	⊕	一朵莲花
10 ⁴	∩	一个伸着的手指
10 ⁵	∩	一条鳕鱼, 或蝌蚪
10 ⁶	∩	一个受惊的人, 或一个支撑宇宙的神

图 1-4 古埃及人的数字记号

古埃及人的乘法运算与除法运算都是通过叠加来进行的. 例如计算 26×33 , 他们先将 33 的倍数列表(如表 1-1), 然后从左边一列中选取和为 26 的数 2, 8 和 16, 再将右边一列中它们各自对应的数相加, 即将 66, 264, 528 相加得到 858 即为所求. 又如 $19 \div 8$, 他们是将 8 的倍数与部分列表(如表 1-2), 再从右边一列中选取和为 19 的 16, 2, 1 这三个数, 并将其对应的左边一列中的三个数 $2, 1/4, 1/8$ 相加即为所求^①.

表 1-1

n	$33n$
1	33
2	66
4	132
8	264
16	528

表 1-2

α	8α
1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

1.1.2 古埃及的代数

古埃及纸草书中出现的“计算若干”的问题, 实际上相当于方程问题, 他们解决这类问题的方法是试位法. 例如对于方程 $x + \frac{x}{7} = 24$, 先给 x 选定一个数值, 譬如说 7, 于是 $7 + \frac{7}{7} = 8$, 而不是 24, 因为 8 必须乘以 3 才是 24, 故 x 的正确值一定是 7 乘以 3 即 21. 古埃及人还用它来解二次甚至更高次的方程. 例如在

^① 其实这种造表的方法正反映了古埃及人的睿智. 从这些表的选项可以看出, 他们是利用加法运算通过递推的方法来处理较为复杂的乘除运算问题的.

卡洪(Kahun)发现的一份大约是公元前 1950 年的纸草书中记载了下列问题:将给定的 100 单位的面积分为两个正方形,使二者的边长之比为 4:3.若设此二正方形的边长分别为 x, y ,且 $4y=3x$,由题设 $x^2+y^2=100$,首先取 $x=4$,则 $y=3$,此时 $x^2+y^2=25$,而不是 100,因此 x, y 的取值需修正.事实上,只需将原数值加倍,即可得方程的解 $x=8, y=6$. 必须指出的是,“试位法”对于解决属于一元一次方程的问题,可以得到精确的解,而对于二次以上的方程,这种方法一般情况下只能给出近似解^①.

在古埃及纸草书中还有有关数列问题的记载.如兰德纸草书中有这样一个问题:今将 10 斗麦子分给 10 个人,每人依次递降 $1/8$ 斗,问各得多少?这是已知一个等差数列的前若干项和、项数以及公差求其各项的问题.纸草书给出了其首项是 $a_1=1\frac{9}{16}$,再根据题意就不难求出.

等比数列也已在古埃及纸草书中出现.兰德纸草书中给出一个阶梯图形(如图 1-5),对此,数学史家康托尔是这样解释的:在一个人的财产中,有七间房子,每间房子里七只猫,每只猫能捉七只老鼠,每只老鼠能吃七穗大麦,而每穗大麦又能长出七俄斗大麦,问这份财产中房子、猫、老鼠、麦穗和麦子总共有多少?按照这样的解释,这显然是一个公比为 7 的等比数列求和问题,阶梯图形给出的是这个数列中的各项.

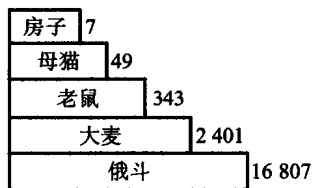


图 1-5

1.1.3 古埃及的几何学

古埃及人在建筑规模宏大的教堂、金字塔和修建复杂的灌溉系统时,都需要测量;尼罗河水泛滥后冲刷去了许多边界标记,洪水退后也需要重新勘测土地的界线;……所有这一切,为他们认识基本几何形状和形成几何概念提供了实际背景.因此,古埃及人的几何学知识较为丰富.在上述两种纸草书的 110 个问题中,有 26 个是几何问题,其中大部分是计算土地的面积与谷物的体积,还有许多与金字塔有关.例如,古埃及人知道,任何三角形的面积均为底与高的乘积的一半;圆的面积等于直径的 $\frac{8}{9}$ 的平方,由此可知,他们把圆周率近似地取为 3.16;直圆柱的体积为底面积与高的乘积.在兰德

^① 一般认为,古埃及人的方程解法要比古巴比伦人的方法落后.事实上,他们的这种方法可以看作是后来的数学中对那些无法用一般解法处理的高次方程的数值解法的先驱.有关高次方程的数值解法,可参考有关“计算方法”的教材或著作.

纸草书中有这样一个问题：“已知金字塔的陡度为每肘五手又一指（一肘为七手，一手为五指），底面边长为 140 肘，求其高。”在莫斯科纸草书中还有这样一个问题，用现代语言表达就是：“如果告诉你一个截顶金字塔的垂直高度为 6，底边为 4，顶边为 2，求其体积。”古埃及人的算法是：4 的平方为 16，4 的二倍为 8，2 的平方是 4，把 16，8 和 4 相加得 28，取 6 的三分之一为 2，取 28 的二倍为 56，则它的体积就是这个数。由此我们可以看出，古埃及人是通过具体问题说明了高为 h 、底边长为 a 和 b 的正四棱台的体积公式是

$$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h.$$

著名数学史家贝尔(E. T. Bell, 1883—1960)形象地将这一古埃及数学杰作称为“最伟大的埃及金字塔”^①。

1.2 古巴比伦的数学

古巴比伦，又称美索波达米亚，位于亚洲西部的幼发拉底与底格里斯两河流域，大体上相当于今天的伊拉克(如图 1-6)。大约是在公元前 3000 年左右，古巴比伦人^②在这里建立起了自己的奴隶制王国。

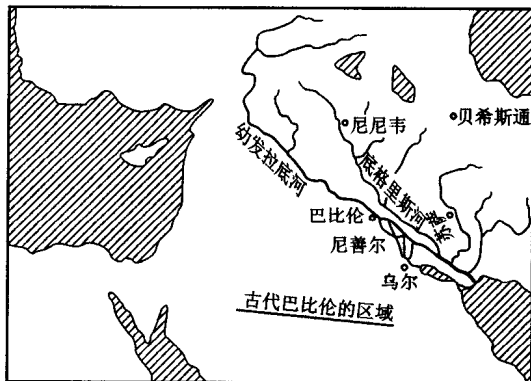


图 1-6 古巴比伦所处的地理位置

在过去相当长的一段时间内，人们对于古巴比伦数学的认识是通过古希腊文化中的零星资料得到的。19 世纪后期，考古学家开始发掘美索波达米亚

^① 因为棱锥与埃及金字塔在英语中的单词都是 pyramid.

^② 事实上，居住在这里的除了巴比伦人外，还有苏美尔人、阿卡德人、卡尔迪安人、亚述人等，为了方便起见，人们把他们都归入巴比伦人。

遗址,它们是由过去长期存在过的城市的废墟所形成的土丘,其中的房屋几乎都是用未经烧制的土坯建造的.每次降雨后,房屋都要被冲毁一些,而新的房屋就建造在同一地方,于是地面就逐渐升高,形成了现在的土丘.如果给一幅土丘的垂直剖面图,就可以发现,同一个城市按不同的时期分成不同的层次,最古老的处在最底层.在发掘的过程中,人们发现了数以万计的不同时期的泥板,它们是用胶泥制成的.一块完整的泥板与手掌的大小差不多,上面写有符号(如图 1-7).这种符号是用断面呈三角形的尖棍刻写的,呈楔形,故人们称之为楔形文字.

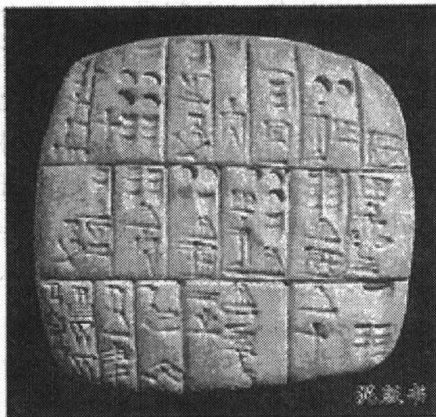


图 1-7 古巴比伦的泥版书

1.2.1 古巴比伦的记数制与算术

古巴比伦人很早就有了数的写法,他们用楔形文字中较小的▼(竖写)代表 1,较大的▼(竖写)代表 60.由此可知,古巴比伦人的记数系统是 60 进制^①.他们还用较小的◀(横写)代表 10,较大的◀(横写)代表 100.例如他们用 $\text{w} \text{m} \text{z} \text{z} \text{z}$ 表示 $2 \times 60^3 + 3 \times 60^2 + 41$.

古巴比伦人也使用分数,他们总是用 60 作为分母,例如◀◀作为分数来记时可以表示 $20/60$,而◀◀▼作为分数来记时可以表示 $21/60 = 20/60 + 1/60$.因此古巴比伦人的分数系统是不成熟的.

与古埃及人相仿,古巴比伦人的算术运算也是借助于各种各样的表来进行的.在已发现的泥版书中,大约有 200 块是乘法表、倒数表、平方表、立方表,甚至还有指数表.倒数表用于把除法转化为乘法进行,指数表和插值法一起用来解决复利问题的.例如,设有本金为 1,利率为 20%,问需要多久即可使利息与本金相等.这需要求解指数方程

$$(1+20\%)^x = 2.$$

由指数表,古巴比伦人首先确定出 x 的取值范围是: $3 < x < 4$. 然后使用一次插值法求出 4 与 x 的差,相当于现在这样的算法:

$$4 - x = \frac{(1.2)^4 - 2}{(1.2)^4 - (1.2)^3} \approx 0.21,$$

^① 由此可见,古埃及和古巴比伦人采用的记数制都不是 10 进位值制.10 进位值制记数法最早是由中国人和印度人首先采用的,详细情况可参见有关章节.

故得 $x \approx 4 - 0.21 = 3.79$ (年).

1.2.2 古巴比伦的代数

在公元前 2000 年前后,古巴比伦数学已出现了用文字叙述的代数问题.如英国大不列颠博物馆 13901 号泥板记载了这样一个问题:“我把我的正方形的面积加上正方形边长的三分之二得 $\frac{35}{60}$,求该正方形的边长.”这个问题相当于求解方程

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{35}{60}.$$

该泥板上给出的解法是:1 的三分之二是 $\frac{40}{60}$,其一半是 $\frac{20}{60}$,将它自乘得 $\frac{6}{60} + \frac{40}{60^2}$ 并把它加到 $\frac{35}{60}$ 上得 $\frac{41}{60} + \frac{40}{60^2}$,其平方根是 $\frac{50}{60}$,再从中减去 $\frac{40}{60}$ 的一半得 $\frac{30}{60}$,于是 $\frac{1}{2}$ 就是所求正方形的边长.这一解法相当于将方程 $x^2 + px = q$ 的系数代入公式

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

求解,只不过在计算时用的是 60 进制.又如,已知两个正方形的面积之和为 1 000,其中一个正方形的边长为另一个正方形的边长的 $\frac{2}{3}$ 减去 10,求这两个正方形的边长.设较大的正方形的边长为 x ,则另一正方形的边长为 $\frac{2}{3}x - 10$,故只需解二次方程

$$x^2 + \left(\frac{2}{3}x - 10\right)^2 = 1\,000.$$

古巴比伦人将这一解法所需的步骤简单地叙述为“平方 10,得 100;1 000 减去 100,就得 900,开平方得 30”,求得该正方形的边长为 30,另一个正方形边长为 10.这就是说,古巴比伦人那时可能已经知道某些类型的一元二次方程的求根公式.由于他们没有负数的概念,二次方程的负根不予考虑.至于他们是如何得到上述这些解法的,泥板上没有具体说明.他们还讨论了某些三次方程和双二次方程的解法.在一块泥板上,他们给出这样的数表,它不仅包含了从 1 到 30 的整数的平方和立方,还包含这个范围内的整数组合 $n^3 + n^2$,专家经研究认为,这个数表是用来解决形如 $x^3 + x^2 = b$ 的三次方程的.

此外,在洛佛尔博物馆的一块泥板上,人们还发现了两个级数问题.用现代形式可表述为

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1,$$